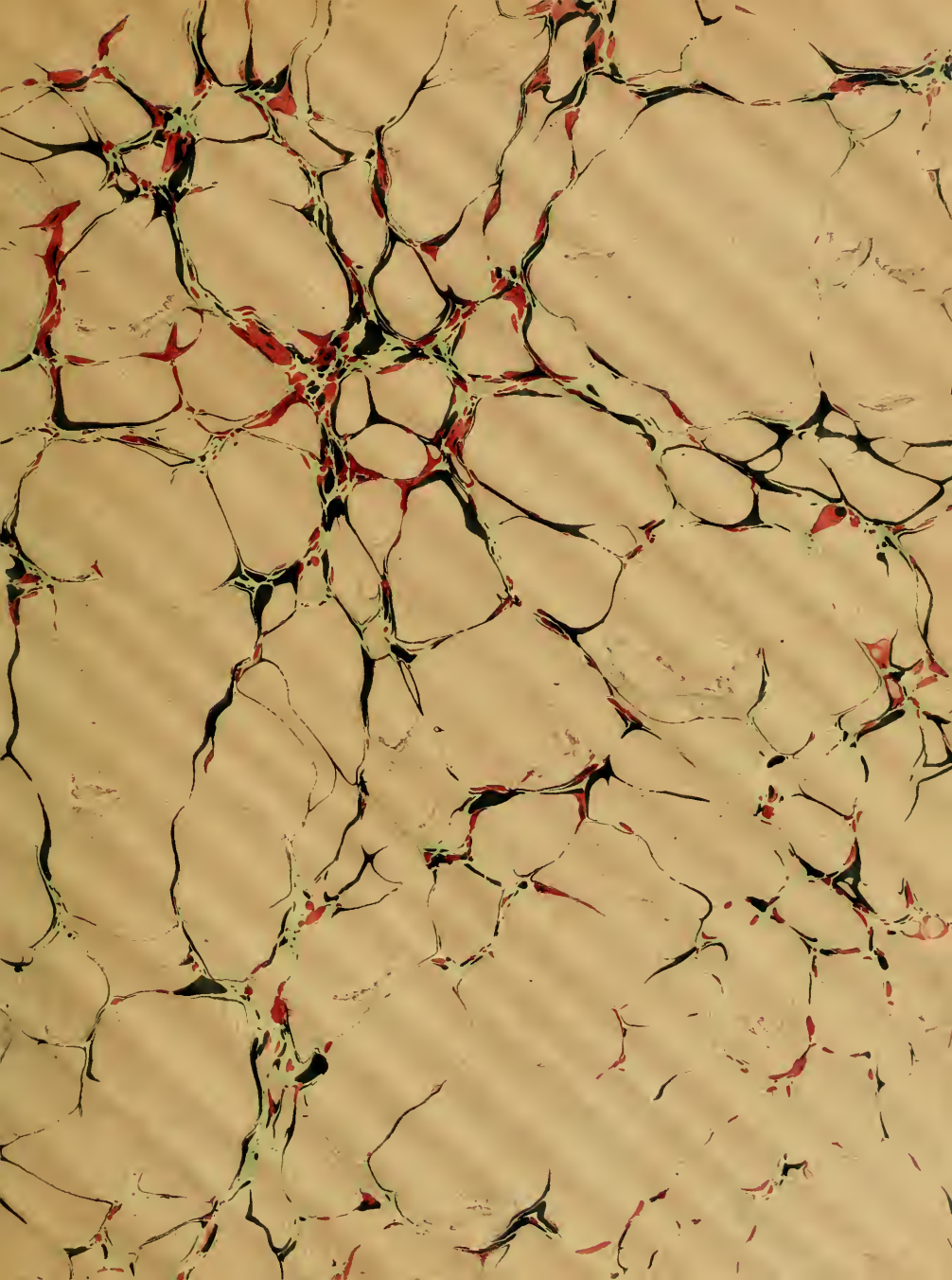


Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/revuedemathmat16pari

REVUE

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

REVUE

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALE

RÉDIGÉE PAR MM.

E. HUMBERT

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE LOUIS-LE-GRAND

ET

G. PAPELIER

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE D'ORLÉANS

AVEC LA COLLABORATION DE MM.

P. AUBERT,

PROFESSEUR AU LYCÉE HENRI IV

P. LAMAIRE,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DE MATHÉMATIQUES, PROFESSEUR AU COLLÈGE CHAPTAL

CH. RIVIÈRE,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
DOCTEUR ÈS SCIENCES, PROFESSEUR AGRÉGÉ DE PHYSIQUE AU LYCÉE SAINT

H. VUIBERT,

RÉDACTEUR DU *Journal de Mathématiques élémentaires.*

TOME HUITIÈME

ANNÉES 1904-1905 & 1905-1906

291732
9. 33
30

PARIS

VUIBERT ET NONY ÉDITEURS

63, BOULEVARD SAINT-GERMAIN 63

GH
1
N46
series 16

REVUE

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

16e Année.— N° 1. Octobre 1905.

PREMIÈRE PARTIE

SUR LES CUBIQUES GAUCHES CONSIDÉRÉES COMME COURBES UNICURSALES

par M. **Ch. Michel**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Dijon.

1. Il est possible, comme pour les courbes planes unicursales, de définir le rapport anharmonique de quatre points d'une courbe gauche unicursale : c'est le rapport anharmonique des paramètres de ces quatre points dans une représentation propre, lequel conserve la même valeur, quelle que soit la représentation propre. De même, il est possible de définir le rapport anharmonique de quatre plans osculateurs à une courbe gauche unicursale : c'est le rapport anharmonique des paramètres de ces quatre plans dans une représentation propre tangentielle, lequel a une valeur indépendante de la représentation propre choisie. En particulier, le rapport anharmonique de quatre plans osculateurs est égal au rapport anharmonique de leurs points de contact.

D'une manière générale, les définitions que j'ai posées, relativement aux courbes unicursales planes, au début de mon étude *Sur les coniques considérées comme courbes unicursales* (*Revue* du mois de février 1904), s'étendent sans modification aux courbes unicursales gauches.

2. Cela posé, arrivons aux cubiques gauches.

Toute cubique gauche indécomposable est une courbe unicursale. En effet, tout plan passant par deux points fixes de la courbe rencontre cette courbe en un point variable et un seul. Il s'ensuit que les coordonnées de ce point variable sont des fonctions rationnelles du paramètre dont dépend le plan variable autour de la droite qui joint les deux points fixes. Si, en outre, le paramètre représente proprement le plan autour de la droite fixe, il représente proprement aussi le point variable sur la cubique.

D'après ce qui précède, il est possible de définir le rapport anharmonique de quatre points sur une cubique gauche. C'est en particulier le rapport anharmonique des quatre plans qui passent par une même droite quelconque rencontrant la cubique en deux points distincts ou confondus et respectivement par les quatre points donnés. Il en résulte que le rapport anharmonique des quatre plans qui passent par une même droite variable rencontrant la cubique en deux points et respectivement par quatre points fixes de la courbe est constant : c'est un théorème dû à Chasles, qui correspond au théorème de Chasles sur les coniques.

Il est possible d'ailleurs, par une voie géométrique, de déduire le théorème relatif aux cubiques du théorème relatif aux coniques. Soient en effet quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 de la cubique, deux droites AB et A'B' rencontrant la cubique en A, B et en A', B'. Il s'agit de montrer que le rapport anharmonique $AB(M_1M_2M_3M_4)$ est égal au rapport anharmonique $A'B'(M_1M_2M_3M_4)$. Considérons pour cela la droite AA'. Le cône ayant pour sommet le point A et pour base la cubique étant du second degré, en vertu du théorème de Chasles relatif aux coniques, le rapport anharmonique $AB(M_1M_2M_3M_4)$ est égal au rapport anharmonique $AA'(M_1M_2M_3M_4)$. Cela posé, le cône ayant pour sommet A' et pour base la cubique étant aussi du second degré, le rapport anharmonique $A'A(M_1M_2M_3M_4)$ est égal au rapport anharmonique $A'B'(M_1M_2M_3M_4)$. Donc, finalement,

$$AB(M_1M_2M_3M_4) = A'B'(M_1M_2M_3M_4).$$

3 Soit une cubique gauche (C) et considérons une droite (D) la rencontrant en deux points A et B que nous supposerons d'abord distincts. Soient O un point fixe de la cubique, M un point variable de cette courbe et m le point où le plan passant par la tangente OT en O à la courbe et le point M rencontre la droite (D). A tout point M de la cubique, il correspond un et un seul point m de la droite, et inversement. Le paramètre λ qui représente proprement le point m sur (D) représente proprement aussi le point M sur (C).

Soient en outre deux points M′ et M″ de la cubique et n le point de rencontre du plan MM′M″ avec (D). Si M′ et M″ restent fixes et si M varie sur (C), le rapport anharmonique de quatre positions du point m est égal à celui des quatre positions correspondantes du point n. Or, quand m vient en A ou en B, n vient aussi en A ou en B. Par suite, le rapport anharmonique de deux positions du point m et des deux points A et B est égal à celui des positions correspondantes du point n et des points A et B. Si α et β sont les paramètres des points A et B sur la droite (D) et aussi sur la cubique (C), et si μ est le paramètre du point n, on voit que lorsque le plan MM′M″ tourne autour de la droite fixe M′M″, le rapport anharmonique

$$\frac{\lambda-\alpha}{\lambda-\beta} : \frac{\mu-\alpha}{\mu-\beta}$$

reste constant. Posons, d'une manière générale, $\varphi(x) = \dfrac{x-\alpha}{x-\beta}$. Le rapport anharmonique précédent s'écrit alors $\dfrac{\varphi(\lambda)}{\varphi(\mu)}$. Si λ' et λ'' désignent les paramètres des points M′ et M″ sur la cubique (C), on voit que la quantité

$$\frac{\varphi(\lambda)\varphi(\lambda')\varphi(\lambda'')}{\varphi(\mu)}$$

reste invariable, quand le plan MM′M″ tourne autour de la droite M′M″, supposée fixe.

Je dis qu'elle conserve encore la même valeur, quand le plan sécant MM′M″ varie d'une façon quelconque. Soient en effet $M_1M_1'M_1''$ une autre position du plan sécant et n_1 le point de rencontre avec (D). Menons le plan $M_1M'M''$, qui coupe (D) en n'. Les deux plans MM′M″ et $M_1M'M''$ passant par la droite M′M″, on a, d'après ce qui précède,

$$\frac{\varphi(\lambda)\varphi(\lambda')\varphi(\lambda'')}{\varphi(\mu)} = \frac{\varphi(\lambda_1)\varphi(\lambda')\varphi(\lambda'')}{\varphi(\mu')}.$$

Menons ensuite le plan $M_1M_1'M''$ qui coupe (D) en n''. Les deux plans $M_1M'M''$ et $M_1M_1'M''$ passent tous deux par la droite M_1M''; on a donc

$$\frac{\varphi(\lambda_1)\varphi(\lambda')\varphi(\lambda'')}{\varphi(\mu')} = \frac{\varphi(\lambda_1)\varphi(\lambda_1')\varphi(\lambda'')}{\varphi(\mu'')}.$$

Mais les deux plans $M_1M_1'M''$ et $M_1M_1'M_1''$ passent tous deux par la droite M_1M_1'; on a donc

$$\frac{\varphi(\lambda_1)\varphi(\lambda_1')\varphi(\lambda'')}{\varphi(\mu'')} = \frac{\varphi(\lambda_1)\varphi(\lambda_1')\varphi(\lambda_1'')}{\varphi(\mu_1)}.$$

On a, par suite, par comparaison,

$$\frac{\varphi(\lambda)\varphi(\lambda')\varphi(\lambda'')}{\varphi(\mu)} = \frac{\varphi(\lambda_1)\varphi(\lambda_1')\varphi(\lambda_1'')}{\varphi(\mu_1)},$$

ce qui démontre le théorème.

Soit ω le point où le plan osculateur en O à la cubique (C) rencontre (D), et désignons par γ le paramètre commun des points O et ω. On a la relation

$$\frac{\varphi(\lambda)\varphi(\lambda')\varphi(\lambda'')}{\varphi(\mu)} = [\varphi(\gamma)]^2,$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{\varphi(\lambda)}{\varphi(\gamma)} \cdot \frac{\varphi(\lambda')}{\varphi(\gamma)} \cdot \frac{\varphi(\lambda'')}{\varphi(\gamma)} = \frac{\varphi(\mu)}{\varphi(\gamma)}.$$

Or, $\frac{\varphi(\lambda)}{\varphi(\gamma)}$ est le rapport anharmonique des quatre points M, O, A, B sur la cubique (C), $\frac{\varphi(\mu)}{\varphi(\gamma)}$ est celui des quatre points n, ω, A, B sur la droite (D). D'une manière générale, désignons par R le rapport anharmonique (M, O, A, B) et par r le rapport anharmonique (n, ω, A, B). La relation précédente prend une forme indépendante des représentations paramétriques choisies sur la cubique et sur la droite,

$$RR'R'' = r.$$

C'est la condition nécessaire et suffisante pour que trois points M, M' et M'' *de* (C) *et un point* n *de la droite* (D) *soient dans un même plan.*

4. Soient six points M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 de la cubique (C). Je dis d'abord que *les quadriques qui passent par ces six points rencontrent la droite* (D) *en des couples de points d'une même involution, qui contient le couple des points* A *et* B. Soient en effet deux points quelconques P et Q de l'espace. Les quadriques qui passent par les six points M et les deux points P et Q forment un faisceau ponctuel linéaire et, par suite, par application du théorème de Desargues, rencontrent la droite (D) en des couples de points d'une même involution. Je dis que cette involution est indépendante des points P et Q. D'abord, elle contient le couple des points A et B; en effet, celle des quadriques du faisceau linéaire qui passe par le point A, ayant sept points communs avec la cubique (C), la contient tout entière et passe par suite par le point B. Cela posé, soient P' et Q' deux autres points de l'espace. Parmi les quadriques qui passent par les points M et les points P et Q, il en est une qui passe par P'. Par suite, l'involution déterminée sur la droite (D) par les quadriques qui passent par les points M et les points P et Q est la même que celle que déterminent sur cette droite les quadriques qui passent par les points M et les points P' et Q, puisque ces deux involutions ont deux couples de points communs, savoir le couple (A, B) et le couple des points de rencontre (D) avec la quadrique qui passe par les six points M et les points P, P', Q. L'involution précédemment définie ne change donc pas quand on remplace les points P et Q par les points P' et Q. Pour la même raison, elle ne change pas quand on remplace les points P' et Q par les points P' et Q'. Donc, elle est indépendante des points P et Q arbitrairement choisis dans l'espace, et le théorème est démontré.

Cela posé, considérons une quadrique quelconque rencontrant la cubique (C) aux six points M_1, M_2, ..., M_6 et la droite (D) aux deux points n et n'. Désignons par n_{123} le point de rencontre avec (D) du plan $M_1M_2M_3$, par n_{456} le point de rencontre avec (D) du plan $M_4M_5M_6$. D'après ce qui précède, les trois couples de points (A, B), (n, n') et (n_{123}, n_{456}) sont en involution. Donc (voir *Une leçon sur l'involution*, *Revue*, décembre 1903), on a

$$r_{123}\, r_{456} = rr'.$$

Mais, en vertu d'une relation précédemment établie,

$$r_{123} = R_1R_2R_3, \qquad r_{456} = R_4R_5R_6.$$

Par suite, on a

$$rr' = R_1R_2R_3R_4R_5R_6.$$

C'est la condition nécessaire et suffisante pour que six points de la cubique (C) *et deux points de la droite* (D) *soient sur une même quadrique.*

5. Voici des applications de la relation qui existe entre les points de rencontre de la cubique (C) et de la droite D avec un plan variable.

1° Supposons que le plan sécant varie en passant par un point fixe M de la cubique (C) et par un point fixe n de la droite (D). La droite Mn est une droite quelconque rencontrant la cubique, car, par tout point de l'espace, il passe, comme on sait, une droite s'appuyant en deux points sur la cubique. Si M' et M'' sont les points de rencontre variables du plan avec la cubique, le produit R'R'', qui est égal à $\frac{r}{R}$, est constant. Autrement dit, le couple des points M' et M'' (voir *Une leçon sur l'involution*) varie sur la

cubique dans une même involution. Ainsi, *un plan variable passant par une droite fixe s'appuyant en un point sur la cubique* (C) *rencontre la cubique en un couple de points variant en involution.* Par suite, il est possible de mener par cette droite deux plans tangents à la cubique.

2° Supposons que le plan sécant varie en passant par un point fixe n de la droite (D), lequel est un point quelconque de l'espace. Soit ρ le rapport anharmonique (P, O, A, B) du point de contact P d'un plan osculateur à la cubique (C) mené par le point n de la droite (D); si r est le rapport anharmonique (n, ω, A, B), on a l'égalité

$$\rho^3 = r,$$

qui est du troisième degré en ρ et admet trois racines ρ, ρ' et ρ''. Ce sont les rapports anharmoniques qui correspondent aux points de contact P, P' et P'' de trois plans osculateurs menés du point n à la cubique. On a la relation

$$\rho\rho'\rho'' = r,$$

ce qui montre que le plan PP'P'' passe par le point n. On a ainsi le théorème suivant, dû à Chasles :

Par tout point de l'espace, on peut mener trois plans osculateurs à une cubique gauche, et les trois points de contact de ces plans sont dans un même plan avec le point donné.

Ce théorème fait apparaître le caractère dualistique des propriétés des cubiques gauches. Ainsi, *le rapport anharmonique des quatre points où quatre plans osculateurs sont rencontrés par une droite d'intersection de deux plans osculateurs variables est indépendant de cette droite.* C'est le rapport anharmonique des quatre plans osculateurs donnés, lequel est d'ailleurs égal au rapport anharmonique des quatre points de contact. En particulier, on peut supposer que la droite sécante soit une tangente variable à la courbe.

Nous ne développerons pas les conséquences de ce théorème.

6. Dans ce qui précède, nous avons supposé essentiellement que la droite (D) s'appuie sur la cubique en deux points distincts. Supposons maintenant que la droite (D) soit tangente à la cubique (C) en un point A.

Soient encore O un point fixe de la cubique, M un point variable de cette courbe et m le point où le plan passant par la tangente OT en O à la courbe et le point M rencontre la droite (D). A tout point M de la cubique il correspond un et un seul point m de la droite, et inversement. Le paramètre λ qui représente proprement m sur (D) représente proprement aussi le point M sur (C).

Soient en outre deux points M' et M'' de la cubique et n le point de rencontre du plan MM'M'' avec la droite (D). Si M' et M'' restent fixes et si M varie sur (C), le rapport anharmonique de quatre positions du point m est égal à celui des quatre positions correspondantes du point n. La correspondance entre les points m et n sur la droite (D) est homographique. Or, pour que m coïncide avec n, il faut et il suffit qu'il coïncide avec A. Par suite, la correspondance homographique a ses deux points doubles confondus en A. Soient α, λ et μ les paramètres sur (D) des points A, m et n. *A priori*, la relation entre λ et μ peut se mettre sous la forme

$$A(\lambda - \alpha)(\mu - \alpha) + B(\lambda - \alpha) + C(\mu - \alpha) + D = 0.$$

Par suite, l'équation aux paramètres θ des points doubles de l'homographie est

$$A(\theta - \alpha)^2 + (B + C)(\theta - \alpha) + D = 0.$$

Pour que cette équation ait ses deux racines égales à α, il faut et il suffit que l'on ait

$$B + C = 0, \qquad D = 0;$$

par suite, la relation entre λ et μ s'écrit

$$A(\lambda - \alpha)(\mu - \alpha) + B(\lambda - \alpha) - B(\mu - \alpha) = 0,$$

et, en divisant les deux membres par $\lambda - \alpha$ et $\mu - \alpha$, on voit que, lorsque m et n varient sur (D), autrement dit, lorsque le plan sécant MM'M'' tourne autour de la droite fixe M'M'', la quantité

$$\frac{1}{\lambda - \alpha} - \frac{1}{\mu - \alpha}$$

reste constante. Posons, d'une manière générale,

$$\psi(x) = \frac{1}{x - \alpha}.$$

La quantité précédente s'écrit $\psi(\lambda) - \psi(\mu)$. Si λ' et λ'' désignent les paramèlres des points M′ et M″ sur la cubique (C), on voit que la quantité

$$\psi(\lambda) + \psi(\lambda') + \psi(\lambda'') - \psi(\mu)$$

reste invariable, quand le plan MM′M″ tourne autour de la droite M′M″, supposée fixe.

Je dis qu'elle conserve encore la même valeur, quand le plan sécant MM′M″ varie d'une façon quelconque. Soient en effet $M_1M_1'M_1''$ une autre position du plan sécant et n_1 le point de rencontre avec (D). Menons le plan $M_1M'M''$ qui coupe (D) en n'. Les deux plans MM′M″ et $M_1M'M''$ passant par la droite M′M″, on a, d'après ce qui précède,

$$\psi(\lambda) + \psi(\lambda') + \psi(\lambda'') - \psi(\mu) = \psi(\lambda_1) + \psi(\lambda') + \psi(\lambda'') - \psi(\mu').$$

Menons ensuite le plan $M_1M_1'M''$ qui coupe (D) en n''. Les deux plans $M_1M'M''$ et $M_1M_1'M''$ passent tous deux par la droite M_1M'' ; on a donc

$$\psi(\lambda_1) + \psi(\lambda') + \psi(\lambda'') - \psi(\mu') = \psi(\lambda_1) + \psi(\lambda_1') + \psi(\lambda'') - \psi(\mu'').$$

Mais les deux plans $M_1M_1'M''$ et $M_1M_1'M_1''$ passent tous deux par la droite M_1M_1' ; on a donc

$$\psi(\lambda_1) + \psi(\lambda_1') + \psi(\lambda'') - \psi(\mu'') = \psi(\lambda_1) + \psi(\lambda_1') + \psi(\lambda_1'') - \psi(\mu_1).$$

On a, par suite, par comparaison

$$\psi(\lambda) + \psi(\lambda') + \psi(\lambda'') - \psi(\mu) = \psi(\lambda_1) + \psi(\lambda_1') + \psi(\lambda_1'') - \psi(\mu_1),$$

ce qui démontre le théorème.

Désignons par C la valeur constante de l'expression précédente, C dépendant de la représentation paramétrique de la droite (D) et de la cubique (C). On a ainsi la relation

$$\frac{1}{\lambda - \alpha} + \frac{1}{\lambda' - \alpha} + \frac{1}{\lambda'' - \alpha} - \frac{1}{\mu - \alpha} = C.$$

Si α est infini, on a une relation de la forme

$$\lambda + \lambda' + \lambda'' - \mu = \text{constante}.$$

7. 1° Par application, cherchons à mener par n un plan osculateur à la cubique, autre que le plan osculateur en A. Si γ est le paramètre du point P de contact, on a la relation

$$\frac{3}{\gamma - \alpha} - \frac{1}{\mu - \alpha} = C,$$

qui est du premier degré en γ. Du point n sur (D), on peut mener par conséquent un et un seul plan osculateur à la cubique autre que le plan osculateur en A. En réalité, le point n étant sur la développable qui admet la cubique comme arête de rebroussement, de ce point on peut mener trois plans osculateurs à la cubique, dont deux sont confondus avec le plan osculateur en A.

2° Étant donné un plan rencontrant la cubique (C) aux points M, M′, M″ de paramètres λ, λ', λ'' et la droite (D) au point n de paramètre μ, si γ est le paramètre du point P de contact du plan osculateur qui passe par n, autre que celui qui a son contact en A, on voit qu'on a la relation

$$\frac{1}{\lambda - \alpha} + \frac{1}{\lambda' - \alpha} + \frac{1}{\lambda'' - \alpha} = \frac{3}{\gamma - \alpha}.$$

Cette relation est susceptible d'une interprétation géométrique. Il est possible d'appliquer aux courbes gauches unicursales la notion, que j'ai introduite dans une étude déjà rappelée (*Sur les coniques considérées comme courbes unicursales*, *Revue*, mars 1904), de *pôle harmonique* d'un point de la courbe par rapport à un système de points de cette courbe. Grâce à ce théorème, on a le théorème suivant :

Le pôle harmonique du point A *par rapport au système des trois points où un plan sécant rencontre la cubique* (C) *est le point tel que le plan osculateur en ce point à la cubique passe par le point où le plan sécant rencontre la tangente en* A.

3° Soit un plan sécant rencontrant (C) aux points M, M′, M″ et la tangente (D) en n. Les plans oscula-

teurs à la cubique aux points M, M', M'' rencontrent la droite (D) aux points p, p', p'', de paramètres ν, ν', ν''. On a d'abord la relation

$$\frac{1}{\lambda-\alpha}+\frac{1}{\lambda'-\alpha}+\frac{1}{\lambda''-\alpha}=\frac{1}{\mu-\alpha}+C;$$

puis on a

$$\frac{3}{\lambda-\alpha}=\frac{1}{\nu-\alpha}+C,\qquad \frac{3}{\lambda'-\alpha}=\frac{1}{\nu'-\alpha}+C,\qquad \frac{3}{\lambda''-\alpha}=\frac{1}{\nu''-\alpha}+C.$$

Par addition de ces trois relations membre à membre, et après comparaison de la relation obtenue avec la première, on obtient la relation

$$\frac{1}{\nu-\alpha}+\frac{1}{\nu'-\alpha}+\frac{1}{\nu''-\alpha}=\frac{3}{\mu-\alpha}.$$

Cette relation exprime que

Le point n est le pôle harmonique du point A *sur la droite* (D) *par rapport au système des points p, p' et p'' situés sur cette droite.*

En particulier, supposons que le point A soit un point à l'infini. Le théorème devient le suivant :

Le point de rencontre d'un plan avec une asymptote de la cubique est le centre des moyennes distances des points de rencontre avec l'asymptote des plans osculateurs à la courbe aux points de rencontre de la courbe avec le plan.

4° Nous pouvons exprimer d'une autre façon le résultat démontré au paragraphe précédent. Remarquons qu'en généralisant les définitions que j'ai posées dans mon étude sur les coniques, si P est sur la cubique (C), le pôle harmonique du point A de la courbe par rapport aux points M, M', M'' de cette courbe, le plan qui passe par une droite (Δ) s'appuyant en deux points distincts ou confondus sur la cubique (C) et par le point P est le plan polaire harmonique du plan qui passe par (Δ) et A par rapport aux plans qui passent par (Δ) et respectivement par M, M', M''. En particulier, prenons comme droite (Δ) la tangente en A ; le plan qui passe par (Δ) et A devient le plan osculateur en A à la cubique. Par suite, le plan qui passe par P et par la tangente en A est polaire harmonique du plan osculateur en A par rapport aux plans qui passent par la tangente en A et respectivement par M, M', M''.

Prenons la propriété corrélative et pour cela introduisons la notion de plan osculateur *polaire harmonique* d'un plan osculateur par rapport à un système de plans osculateurs à une courbe gauche unicursale. Cette notion est une généralisation immédiate et sur laquelle il est inutile d'insister de celle de tangente polaire harmonique d'une tangente par rapport à un système de tangentes à une courbe unicursale plane. Grâce à cette notion, on voit que le pôle harmonique du point A par rapport aux points d'intersection avec la tangente en A des plans osculateurs à la cubique aux points M, M', M'' est le point de rencontre avec la tangente en A du plan osculateur polaire harmonique du plan osculateur en A par rapport au système des plans osculateurs en M, M', M''. Si on compare ce résultat avec le résultat obtenu au paragraphe précédent, on reconnaît que ce dernier résultat revient à celui-ci : *Si* P *est le pôle harmonique de* A *par rapport aux points* M, M', M'', *le plan osculateur en* P *est polaire harmonique du plan osculateur en* A *par rapport aux plans osculateurs en* M, M', M''. Nous démontrons ainsi, dans le cas des cubiques gauches, d'une façon particulière, un résultat qui s'applique aux courbes unicursales gauches d'un degré quelconque.

5° Les propriétés précédentes admettent des propriétés corrélatives. J'énoncerai seulement la suivante :

Les plans osculateurs en M, M', M'' se coupent en un point I qui, nous l'avons vu, est situé dans le plan MM'M''. *Le pôle harmonique* P *de* A *par rapport à* M, M', M'' *est à l'intersection de la cubique avec le plan qui passe par la tangente en* A *et le point* I.

8. Proposons-nous de même de trouver ce que devient la relation entre les points de rencontre d'une quadrique avec la cubique (C) et la droite (D), quand cette droite est tangente à la cubique en A.

Nous avons d'abord le théorème suivant, cas particulier d'un théorème précédemment démontré :

Les quadriques qui passent par six points d'une cubique rencontrent une tangente (D) *à la courbe en des couples de points d'une même involution, et le point de contact de la tangente est un point double de cette involution.*

Cela posé, soit une quadrique (Q) rencontrant la cubique en six points variables $M_1, \ldots, M_6$ et la droite (D) aux deux points n et n'. Désignons par n_{123} le point de rencontre avec (D) du plan $M_1M_2M_3$, par n_{456} le point de rencontre avec (D) du plan $M_4M_5M_6$. Les deux couples de points (n, n') et (n_{123}, n_{456}) déterminent une involution dont un point double est A. Donc (voir *Une leçon sur l'involution*), on a

$$\frac{1}{\mu-\alpha}+\frac{1}{\mu'-\alpha}=\frac{1}{\mu_{123}-\alpha}+\frac{1}{\mu_{456}-\alpha}.$$

D'après cela,

$$\frac{1}{\lambda_1-\alpha}+\cdots+\frac{1}{\lambda_6-\alpha}-\frac{1}{\mu-\alpha}-\frac{1}{\mu'-\alpha}=\frac{1}{\lambda_1-\alpha}+\frac{1}{\lambda_2-\alpha}+\frac{1}{\lambda_3-\alpha}-\frac{1}{\mu_{123}-\alpha}$$
$$+\frac{1}{\lambda_4-\alpha}+\frac{1}{\lambda_5-\alpha}+\frac{1}{\lambda_6-\alpha}-\frac{1}{\mu_{456}-\alpha}$$
$$=2C.$$

Telle est la nouvelle relation cherchée.

Soient γ et γ' les paramètres des points de contact Q et Q′ des plans osculateurs menés à la cubique des points n et n'. On a

$$\frac{3}{\gamma-\alpha}=\frac{1}{\mu-\alpha}+C,\qquad \frac{3}{\gamma'-\alpha}=\frac{1}{\mu'-\alpha}+C;$$

par suite, la relation précédente devient

$$\frac{1}{\lambda_1-\alpha}+\cdots+\frac{1}{\lambda_6-\alpha}=\frac{3}{\gamma-\alpha}+\frac{3}{\gamma'-\alpha}.$$

Désignons par P le conjugué harmonique du point A par rapport aux points Q et Q′ et par θ son paramètre. On a

$$\frac{1}{\gamma-\alpha}+\frac{1}{\gamma'-\alpha}=\frac{2}{\theta-\alpha}.$$

Donc, finalement, la relation devient

$$\frac{1}{\lambda_1-\alpha}+\frac{1}{\lambda_2-\alpha}+\cdots+\frac{1}{\lambda_6-\alpha}=\frac{6}{\theta-\alpha}.$$

On a ainsi le théorème suivant :

Le pôle harmonique du point A *par rapport au système des points de rencontre de la quadrique* Q *avec la cubique n'est autre que le conjugué harmonique de ce point par rapport aux deux points de contact des plans osculateurs menés à la cubique par les points de rencontre de la quadrique* Q *avec la tangente en* A.

Les plans osculateurs aux points $M_1, M_2, \ldots, M_6$ rencontrent la tangente en A aux points $p_1, p_2, \ldots, p_6$, de paramètres $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_6$. On a la relation

$$\frac{1}{\lambda_1-\alpha}+\cdots+\frac{1}{\lambda_6-\alpha}=\frac{1}{\mu-\alpha}+\frac{1}{\mu'-\alpha}+2C.$$

Mais on a

$$\frac{3}{\lambda_1-\alpha}=\frac{1}{\nu_1-\alpha}+C,\qquad \cdots,\qquad \frac{3}{\lambda_6-\alpha}=\frac{1}{\nu_6-\alpha}+C.$$

On a par suite

$$\frac{1}{\nu_1-\alpha}+\cdots+\frac{1}{\nu_6-\alpha}=\frac{3}{\mu-\alpha}+\frac{3}{\mu'-\alpha}.$$

Si on désigne par q le point où le plan osculateur en P rencontre la tangente en A et par ρ

son paramètre, on a

$$\frac{3}{\gamma - \alpha} = \frac{1}{\mu - \alpha} + C, \qquad \frac{3}{\gamma' - \alpha} = \frac{1}{\mu' - \alpha} + C,$$

et par suite

$$\frac{6}{\theta - \alpha} = \frac{1}{\mu - \alpha} + \frac{1}{\mu' - \alpha} + 2C,$$

mais,

$$\frac{6}{\theta - \alpha} = \frac{2}{\rho - \alpha} + 2C.$$

Donc,

$$\frac{1}{\mu - \alpha} + \frac{1}{\mu' - \alpha} = \frac{2}{\rho - \alpha},$$

ce qui montre que *le point* q *est conjugué harmonique du point* A *par rapport aux points* n *et* n'. On a en outre

$$\frac{1}{\nu_1 - \alpha} + \cdots + \frac{1}{\nu_6 - \alpha} = \frac{6}{\rho - \alpha},$$

ce qui exprime que

Le conjugué harmonique du point A *par rapport aux deux points où la quadrique* (Q) *rencontre la tangente en* A *est le pôle harmonique du point* A *par rapport au système des points de rencontre avec cette droite des plans osculateurs aux points où la quadrique rencontre la cubique.*

En particulier, supposons que le point A soit un point à l'infini de la cubique. On a le résultat suivant :

Le milieu des points de rencontre d'une quadrique avec une asymptote de la cubique est le centre des moyennes distances des points de rencontre de cette asymptote avec les plans osculateurs aux points où la cubique rencontre la quadrique.

Les théorèmes précédents admettent des théorèmes corrélatifs que je me contente de signaler.

ALGÈBRE

1361. — *Soient* $1, j, j^2$ *les trois racines de l'équation* $x^3 - 1 = 0$.

Former une fraction rationnelle

$$R(x) \equiv \frac{A(x)}{x^3 - 1},$$

dans laquelle $A(x)$ *désigne un polynome entier du quatrième degré qui s'annule pour* $x = 0$ *et pour* $x = -1$, *et tel que la fraction* $R(x)$ *ait pour partie fractionnaire* $\frac{\alpha}{x-1} + \frac{\alpha}{x-j} + \frac{\alpha}{x-j^2}$ *et en outre que* $\frac{R(x)}{x}$ *ait pour limite* 3 *quand* x *devient infini.*

Calculer alors l'intégrale $\int R(x)dx$

et la dérivée n^e *de* $R(x)$.

Donner ensuite les développements de $R(x)$ *en séries ordonnées, l'une par rapport aux puissances croissantes de* x, *l'autre par rapport aux puissances décroissantes.*

On sait que si $a, b, c, \ldots, l$ désignent les racines de l'équation entière $f(x) = 0$, on a l'identité

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \equiv \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \cdots + \frac{1}{x-l};$$

par conséquent

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-j} + \frac{1}{x-j^2} \equiv \frac{3x^2}{x^3-1},$$

et

$$\frac{\alpha}{x-1} + \frac{\alpha}{x-j} + \frac{\alpha}{x-j^2} \equiv \frac{3\alpha x^2}{x^3-1}.$$

D'autre part, le quotient de $A(x)$ par $x(x^3-1)$ doit avoir 3 pour limite quand x devient infini ; la partie entière du quotient de $A(x)$ par (x^3-1) est donc $3x+\beta$ et l'on a identiquement

$$\frac{A(x)}{x^3-1} \equiv 3x + \beta + \frac{3\alpha x^2}{x^3-1}.$$

Mais pour $x=0$, A est nul; donc $\beta = 0$. Pour $x=-1$, A est encore nul ; donc $\alpha = -2$, et l'on a définitivement les deux identités

$$A(x) \equiv 3x(x^3-1) - 6x^2,$$

$$R(x) \equiv 3x - \frac{6x^2}{x^3-1}.$$

L'intégrale de $R(x)dx$ est alors immédiate ; si l'on remarque que $6x^2$ est le double de la dérivée de x^3-1, on a de suite

$$\int R(x)dx = \frac{3x^2}{2} - 2L(x^3-1) + C.$$

La dérivée n^e s'obtient sans peine en partant de la forme

$$R(x) \equiv 3x - \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x-j} - \frac{2}{x-j^2};$$

lie a pour expression

$$R^{(n)}(x) \equiv (-1)^{n+1} 2.n! \left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}} + \frac{1}{(x-j)^{n+1}} + \frac{1}{(x-j^2)^{n+1}} \right].$$

En réunissant ensemble les deux termes imaginaires, qui sont imaginaires conjugués, nous avons l'expression

$$R^{(n)}(x) \equiv (-1)^{n+1} 2.n! \left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}} + \frac{(x-j^2)^{n+1} + (x-j)^{n+1}}{(x^2+x+1)^{n+1}} \right].$$

Celle-ci est mise sous forme réelle et il suffit de développer le numérateur de la seconde fraction pour faire disparaître l'imaginaire. Il est plus simple d'ailleurs de développer la somme totale

$$(x-1)^{n+1} + (x-j)^{n+1} + (x-j^2)^{n+1};$$

les seuls termes qui restent sont ceux qui ont pour rangs 1, 4, 7, ..., de 3 en 3 ; les autres contiennent $1+j+j^2$ en facteur et sont nuls. Nous avons donc

$$(x-j)^{n+1} + (x-j^2)^{n+1} \equiv 3(x^{n+1} - C_{n+1}^3 x^{n-2} + C_{n+1}^6 x^{n-5} - \cdots) - (x-1)^{n+1}.$$

Quant au développement en série de $R(x)$, il s'obtient immédiatement en considérant $\frac{1}{1-x^3}$ comme la somme d'une progression géométrique illimitée ou $\frac{1}{1-\frac{1}{x^3}}$. On a ainsi pour $R(x)$ les deux développements

$$R(x) \equiv 3x + 6x^2(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots)$$

et

$$R(x) \equiv 3x - \frac{6}{x}\left(1 + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^9} + \cdots\right).$$

qui sont convergents, le premier, pour $|x| < 1$ et le second pour $|x| > 1$.

BROS, à Albi.

Bonnes solutions : MM. M. Laurence ; Parrod, à Vesoul ;
Assez bonnes solutions : MM. Claude Jourdan ; G. Foucry, à Roanne.

1370. — *On considère une équation du troisième degré*

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

et on regarde les racines α, β, γ *comme étant les abscisses de trois points de* Ox, A, B, C.

Trouver l'équation qui admet pour racines les valeurs de $y^2 = \mathrm{AB.AC}$. *Voir ce qui arrive quand* y *est nul ou que l'équation en* y *a une racine double.*

Appelons α, β, γ les trois racines de l'équation du troisième degré; nous aurons

$$y^2 = (\beta - \alpha)(\gamma - \alpha) = (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma).$$

Or si l'on remarque que $f(x)$ se met sous la forme

$$f(x) \equiv a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma),$$

on voit que

$$f'(x) \equiv a(x - \beta)(x - \gamma) + a(x - \alpha)(x - \gamma) + a(x - \alpha)(x - \beta),$$

et, pour $x = \alpha$,

$$f'(\alpha) = a(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma);$$

donc

$$f'(\alpha) = ay^2.$$

Par conséquent, nous aurons l'équation en y en éliminant α entre cette équation et l'équation $f(\alpha) = 0$; or celle-ci peut s'écrire $\alpha f'(\alpha) + f'(\alpha) = 0$. Nous avons donc finalement à éliminer x entre les deux équations

$$3ax^2 + 2bx + c - ay^2 = 0,$$
$$bx^2 + (2c + ay^2)x + 3d = 0;$$

ce qui nous donne

$$(aby^2 + 9ad - bc)^2 - (3a^2y^2 + 6ac - 2b^2)(a^2y^4 + acy^2 + 6bd - 2c^2) = 0.$$

Cette équation, développée et simplifiée, s'écrit

$$3a^4y^6 + 3a^2(3ac - b^2)y^4 - \Delta = 0,$$

en posant

$$\Delta = (9ad - bc)^2 - 4(3ac - b^2)(3bd - c^2).$$

La quantité Δ est, comme il est facile de s'en assurer, le discriminant de l'équation cubique donnée.

Pour que l'équation en y ait une racine nulle, il faut que l'on ait

$$(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) = 0,$$

c'est-à-dire $\alpha = \beta$ ou $\alpha = \gamma$. Il faut donc que l'équation cubique ait une racine double. C'est bien ce que nous montre d'ailleurs la relation $\Delta = 0$. Nous voyons en outre que l'équation en y^2 a deux racines nulles, ce qui est évident *a priori*, car si $\alpha = \beta$, par exemple, il y a deux valeurs nulles de y^2, les deux dans lesquelles figure le facteur $\alpha - \beta$.

Égalons maintenant deux valeurs de y^2; nous aurons $(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) = (\beta - \alpha)(\beta - \gamma)$, ou bien

$$(\alpha - \beta)(\alpha + \beta - 2\gamma) = 0.$$

Nous retrouvons la solution précédente $\alpha = \beta$; alors les deux valeurs de y^2 sont nulles. Puis, nous trouvons la solution nouvelle $\alpha + \beta - 2\gamma = 0$, qui nous montre qu'alors les trois racines de l'équation cubique sont en progression arithmétique. Or, la relation $\alpha + \beta - 2\gamma = 0$ peut s'écrire $\alpha + \beta + \gamma = 3\gamma$, et, comme $\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$, $\gamma = -\frac{b}{3a}$. Nous aurons donc la condition correspondante en écrivant que le nombre $\frac{-b}{3a}$ est racine de l'équation cubique; ceci nous donne la relation

$$27a^2d - 9abc + 2b^3 = 0.$$

Il reste à vérifier que si l'on écrit que l'équation en y^2 a une racine double, on trouve justement cette relation. A cet effet, prenons l'équation aux inverses, c'est-à-dire posons $\frac{1}{y^2} = z$, nous obtiendrons l'équation nouvelle

$$\Delta . z^3 - 3a^2(3ac - b^2)z - 3a^4 = 0;$$

la condition pour qu'elle ait une racine double est $4p^3 + 27q^2 = 0$,
ou, en supprimant la solution $\Delta = 0$ qui correspond à $y^2 = 0$,

$$9a^2\Delta - 4(3ac - b^2)^3 = 0.$$

Cette relation se développe et se simplifie aisément; elle s'écrit finalement

$$-(2b^3 - 9abc + 27a^2d)^2 = 0,$$

ce qui justifie bien le résultat annoncé.

Remarques diverses. — Les trois valeurs de y^2 se représentent *a priori* par

$$(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma), \qquad (\beta - \alpha)(\beta - \gamma), \qquad (\gamma - \alpha)(\gamma - \beta);$$

il est facile de vérifier que la somme de leurs produits deux à deux est nulle : en effet, cette somme s'écrit

$$(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)(\alpha - \beta)[\beta - \gamma + \gamma - \alpha + \alpha - \beta],$$

quantité qui est identiquement nulle. D'autre part, le produit de ces nombres est

$$-(\beta - \gamma)^2(\gamma - \alpha)^2(\alpha - \beta)^2,$$

c'est-à-dire le discriminant, au facteur ka^4 près, k désignant un facteur numérique.

Si on envisage les trois points A, B, C de Ox qui correspondent aux racines α, β, γ de l'équation cubique, on aperçoit de suite le sens des cas particuliers indiqués, $y^2 = 0$ et $y'^2 = y''^2$.

PARROD.

Bonnes solutions : MM. Bros, à Albi ; M. Laurence.
Assez bonne solution : M. Planchard, à Lyon.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1371. — *On considère une hyperbole équilatère de centre* O *et une droite fixe passant par ce point. On mène par le point* O *deux droites variables également inclinées sur la droite fixe. L'une de ces droites rencontre l'hyperbole en* P *et la tangente en* P *rencontre l'autre droite en* M.

Trouver le lieu du point M *et l'enveloppe du cercle circonscrit au triangle* OPM.

Nous prendrons pour origine le centre O de l'hyperbole équilatère, pour axe des x la droite fixe et pour axe des y une perpendiculaire à cette droite. Dans ces conditions, l'équation de l'hyperbole est de la forme

$$x^2 + 2Bxy - y^2 + F = 0,$$

où B et F désignent des nombres fixes.

Soient α et β les coordonnées du point P, comme ce point est sur l'hyperbole, nous avons

$$(1) \qquad \alpha^2 + 2B\alpha\beta - \beta^2 + F = 0;$$

la tangente en ce point est représentée par l'équation

$$(2) \qquad \alpha(x + By) + \beta(Bx - y) + F = 0,$$

et la droite OM, symétrique de OP par rapport à Ox, a pour équation

$$(3) \qquad \frac{x}{\alpha} = -\frac{y}{\beta}.$$

Nous aurons le lieu du point M en éliminant α et β entre les équations (1), (2) et (3).

Des deux dernières, on tire aisément

$$\frac{\alpha}{x} = \frac{\beta}{-y} = \frac{\alpha(x + By) + \beta(Bx - y)}{x(x + By) - y(Bx - y)} = \frac{-F}{x^2 + y^2},$$

ou

$$\alpha = \frac{-Fx}{x^2+y^2}, \qquad \beta = \frac{Fy}{x^2+y^2}.$$

Portons ces valeurs dans l'équation (1), nous obtenons l'équation du lieu

$$(x^2+y^2)^2 + F(x^2 - 2Bxy - y^2) = 0.$$

Cette équation représente une quartique bicirculaire admettant un point double à tangentes rectangulaires et ce point est le centre de la courbe. Ce sont là les propriétés caractéristiques de la lemniscate de Bernoulli.

On voit aisément que les tangentes au point double sont les symétriques des asymptotes de l'hyperbole par rapport à Ox.

Cherchons maintenant l'enveloppe du cercle circonscrit au triangle OPM. Ce cercle est une conique passant par l'intersection de la conique formée par les droites OP et OM et d'une autre conique formée par la tangente PM et une droite passant par le point O. L'équation de ce cercle est donc de la forme

$$\beta^2x^2 - \alpha^2y^2 + (ux+vy)(x(\alpha+B\beta) + y(B\alpha-\beta) + F) = 0;$$

et nous déterminerons u et v en écrivant que cette équation représente un cercle, c'est-à-dire que les coefficients de x^2 et de y^2 sont égaux et que le coefficient de xy est nul. Nous avons ainsi

$$\beta^2 + u(\alpha+B\beta) = -\alpha^2 + v(B\alpha-\beta),$$
$$u(B\alpha-\beta) + v(\alpha+B\beta) = 0;$$

nous en tirons

$$\frac{u}{\alpha+B\beta} = \frac{v}{-(B\alpha-\beta)} = \frac{u(\alpha+B\beta) - v(B\alpha-\beta)}{(\alpha+B\beta)^2+(B\alpha-\beta)^2} = \frac{-(\alpha^2+\beta^2)}{(\alpha^2+\beta^2)(1+B^2)} = -\frac{1}{1+B^2},$$

ou

$$u = -\frac{\alpha+B\beta}{1+B^2}, \qquad v = \frac{B\alpha-\beta}{1+B^2}.$$

L'équation du cercle circonscrit au triangle OMP est alors

$$(\beta^2x^2 - \alpha^2y^2)(1+B^2) - (\alpha+B\beta)x - (B\alpha-\beta)y(\alpha+B\beta)x + (B\alpha-\beta)y + F) = 0,$$

ou en simplifiant et en utilisant la relation (1),

$$(4) \qquad x^2+y^2 - x(\alpha+B\beta) + y(B\alpha-\beta) = 0.$$

Pour avoir l'enveloppe de ce cercle, il suffit d'éliminer α et β entre les trois équations

$$(1) \qquad f(\alpha,\beta) \equiv \alpha^2 + 2B\alpha\beta - \beta^2 + F = 0,$$

$$(4) \qquad \varphi(\alpha,\beta) \equiv x^2+y^2 - x(\alpha+B\beta) + y(B\alpha-\beta) = 0,$$

$$\frac{f'_\alpha}{\varphi'_\alpha} = \frac{f'_\beta}{\varphi'_\beta} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\alpha+B\beta}{-x+By} = \frac{B\alpha-\beta}{-(Bx+y)}.$$

Cette dernière nous donne immédiatement

$$\frac{\alpha}{x} = \frac{\beta}{-y} = \lambda \qquad \text{ou} \qquad \alpha = \lambda x, \qquad \beta = -\lambda y,$$

et, en portant dans la précédente, nous avons $\lambda = \dfrac{x^2+y^2}{x^2-2Bxy-y^2}$ et, par suite,

$$\alpha = \frac{x(x^2+y^2)}{x^2-2Bxy-y^2}, \qquad \beta = \frac{-y(x^2+y^2)}{x^2-2Bxy-y^2}.$$

Remplaçons enfin α et β par ces valeurs dans la relation (1), nous obtenons

$$\frac{(x^2+y^2)^2(x^2-2Bxy-y^2)}{(x^2-2Bxy-y^2)^2} + F = 0$$

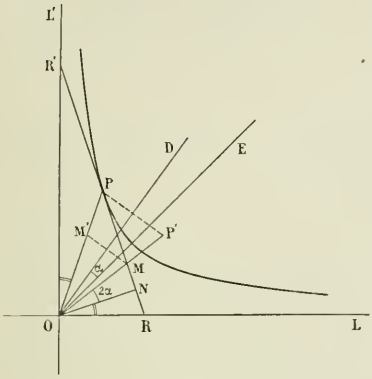
ou

$$(x^2+y^2)^2 + F(x^2-2Bxy-y^2) = 0;$$

c'est la lemniscate trouvée précédemment.

Il en résulte que l'enveloppe du cercle circonscrit au triangle OPM est la même courbe que le lieu du point M.

Solution géométrique. — Soit OD la droite fixe par rapport à laquelle OP et OM sont symétriques. Menons la bissectrice OE des deux asymptotes OL et OL′ qui rencontre l'hyperbole au sommet A, et désignons par α l'angle DOE.



Le point P est le milieu de RR′ ; par suite le triangle OPR′ est isocèle, et si l'on mène ON perpendiculaire sur RR′, l'angle NOR est égal à l'angle OR′P et par suite à l'angle POR′; donc ON est symétrique de OP par rapport à OE. Comme OM est symétrique de OP par rapport à OD, l'angle MON est égal à deux fois l'angle DOE c'est-à-dire à 2α.

Cela posé, on sait que l'aire du triangle ORR′ est constante ; or cette aire est égale à $PR \times ON$ ou $OP \times ON$, donc

$$OP \times ON = k.$$

D'autre part, dans le triangle OMN, on a $ON = OM \cos 2\alpha$; par suite

$$OP.OM \cos 2\alpha = k$$

ou

$$OP.OM = \frac{k}{\cos 2\alpha}.$$

Soit M′ le symétrique de M par rapport à OD, le point M′ est sur OP, et nous avons

$$OP.OM' = \frac{k}{\cos 2\alpha},$$

ce qui montre que le lieu de M′ est la figure inverse de l'hyperbole donnée (H), le pôle d'inversion étant le point O et la puissance d'inversion étant égale à $\frac{k}{\cos 2\alpha}$. On sait que cette courbe est une lemniscate (S′), ayant pour tangentes au point double les asymptotes de l'hyperbole donnée. Par suite, le lieu de M est une lemniscate (S), symétrique de (S′) par rapport à OD.

Transformons la figure par inversion, le pôle étant le point O et la puissance d'inversion étant égale à $\frac{k}{\cos 2\alpha}$. Le cercle circonscrit au triangle OPM se transforme en une droite passant par les points P′ et M′, inverses respectivement de P et de M. Le point P′ est symétrique de P par rapport à OD ; par suite, la droite M′P′ est tangente en P′ à l'hyperbole (H′) symétrique de l'hyperbole donnée (H) par rapport à OD.

Donc l'enveloppe de M′P′ est l'hyperbole (H′), et l'enveloppe du cercle circonscrit au triangle OPM est la figure transformée de (H′). Or la transformée de (H) est la lemniscate (S′), donc celle de (H′) est la lemniscate (S). Il en résulte que l'enveloppe du cercle considéré est la lemniscate (S), c'est-à-dire que cette enveloppe coïncide avec le lieu du point M.

QUEMÉNEUR, lycée de Rouen.

Bonnes solutions par MM. Bros, à Albi ; G. Cotty, lycée de Dijon ; Fpizac ; Grangier ; M. Laurence ; Parrod, à Vesoul.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1905).

I. — Algèbre et Analyse.

4488. — Décomposer le trinome $x^4 + px^2 + q$ en un produit de deux facteurs du second degré à coefficients réels. Cas où $\frac{p^2}{4} - q < 0$.

4489. — Des équations $\frac{x^2 - yz}{u} = \frac{y^2 - zx}{v} = \frac{z^2 - xy}{w}$, déduire des quantités proportionnelles à $u^2 - vw$, $v^2 - wu$, $w^2 - uv$.

4490. — Le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

est une fonction symétrique de a, b, c.

4491. — Étudier les séries dont les termes généraux sont

$$\frac{x^{2n}}{n!}, \quad \frac{\cos nx}{n^2}, \quad \left(\operatorname{tg}\frac{x}{n}\right)^2, \quad \frac{1}{n^n}, \quad \frac{1}{n^2(\mathrm{L}n)^2}, \quad \operatorname{tg}\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}, \quad \frac{n^2}{(n+1)!}.$$

4492. — Sommer les séries

$$1.2a + 2.3a^2 + 3.4a^3 + \cdots,$$

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots,$$

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \cdots,$$

$$\frac{1}{1.2.3\ldots p} + \frac{1}{2.3\ldots(p+1)} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+p-1)} + \cdots$$

4493. — Calculer à $\frac{1}{1000}$ près la somme des séries

$$1 + \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots$$

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{(2n)!} + \cdots$$

4494. — Soit $p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots$ la suite des nombres premiers; calculer à $\frac{1}{10000}$ près la somme de la série

$$\frac{1}{p_1^{p_1}} + \frac{1}{p_2^{p_2}} + \frac{1}{p_3^{p_3}} + \cdots$$

4495. — Etudier la série

$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx + \cdots$$

où l'on suppose $a_1 > a_2 > \cdots > a_n > \cdots$ et $\lim a_n = 0$.

4496. — On donne une suite de nombres $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$ tels que $u_1 = 1$, $u_2 = 1$ et $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$. Montrer que l'on a $u_n u_{n-2} - u^2_{n-1} = \pm 1$. En déduire que le rapport $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ a une limite pour n infini.

4497. — Calculer les dérivées des fonctions

$$x^{\mathrm{L}x}, \quad \operatorname{arc\,tg}\frac{a-x}{1+ax}, \quad \arcsin(a\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-a^2}), \quad \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}},$$

$$x^{\sin x}, \quad (\mathrm{L}x)^x, \quad \mathrm{LL}\,x, \quad \mathrm{LLL}x, \quad \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}, \quad \arcsin\sqrt{1-\mathrm{L}x},$$

$$\mathrm{L}(x+\sqrt{x^2-1}), \quad \operatorname{arc\,tg}\frac{2x}{1-x^2}, \quad \arccos(4x^3-3x), \quad \operatorname{arc\,tg}\frac{ax+b}{cx+d},$$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1+x}{1-x}, \quad \operatorname{arc\,tg}\frac{4x-4x^2}{1-6x^2+x^4}, \quad \arcsin(4x^3-3x), \quad \arcsin 2x\sqrt{1-x^2},$$

$$x^{\frac{1}{\log x}}, \quad \mathrm{L}(x+\sqrt{x^2-a^2}) + \operatorname{arc\,sec}\frac{x}{a}, \quad \operatorname{arc\,tg} e^x + \operatorname{arc\,tg} e^{-x},$$

$$\cos\arcsin x, \quad \cos x\left(1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right).$$

4498. — Dérivées d'ordre n des fonctions $\frac{1}{x^2+1}$, $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $e^x x^n$.

4499. — Dérivée d'ordre n de la fonction e^{ax^2}; en déduire les dérivées d'ordre n de $\cos x^2$ et de $\sin x^2$.

4500. — Variation des fonctions

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad e^{\frac{x^2-x-1}{2x-1}}, \quad e^{\frac{x^2-1}{x}},$$

$$\sin x + \sin 2x, \quad xe^{\frac{1}{x}} \quad \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}, \quad \frac{\sin x}{x} \quad x^{\arcsin \mathrm{L}x}, \quad \frac{1}{x+1}e^{\frac{1}{x}}.$$

4501. — Déterminer la fonction $x^3 + ax^2 + bx + c$ de manière qu'elle soit maximum pour $x = 1$ et minimum pour $x = 2$.

4502. — On donne une fonction $y = f(x)$ et on remplace x par e^t. Calculer les dérivées de y par rapport à x en fonction des dérivées de y par rapport à t.

4503. — Soient A_0, A_1 deux points d'une droite donnée; on construit le point A_2 milieu de A_0A_1, puis A_3 milieu de A_1A_2, A_4 milieu de A_2A_3,... ; montrer que A_n a une position limite.

4504. — On considère la suite

$$u_1 = \sqrt{2}, \quad u_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}, \quad \cdots, \quad u_n = \sqrt{2+u_{n-1}}, \quad \cdots$$

Démontrer que u_n a une limite quand n augmente indéfiniment.

4505. — Même question pour la suite

$$u_1 = \sqrt{a}, \qquad u_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}, \qquad \cdots, \qquad u_n = \sqrt{a + u_{n-1}},$$

a désignant un nombre positif quelconque.

4506. — Limites des fonctions suivantes pour n infini :

$$\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots 2n}, \qquad \left(\frac{ap^{\frac{1}{n}} + bq^{\frac{1}{n}}}{a+b}\right)^n, \qquad \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}};$$

$$\sqrt[m]{n^m + an^{m-1} + \cdots} - \sqrt[p]{n^p + bn^{p-1} + \cdots}.$$

4507. — Développer en séries les fonctions :

$$\mathrm{L}(1-x), \qquad \frac{x}{2}\cdot\frac{e^x+1}{e^x-1}, \qquad \operatorname{arc\,tg} x, \qquad \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}, \qquad \frac{1}{1-2x\cos\theta + x^2}, \qquad \cos p \operatorname{arc}\cos x,$$

$$(\operatorname{arc}\sin x)^2, \qquad \mathrm{L}\sqrt{1+x^2}.$$

4508. — Étudier la série

$$y = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots;$$

trouver une équation différentielle à laquelle elle satisfait. Intégrer cette équation, puis vérifier le résultat.

4509. — Même question pour la série

$$y = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

4510. — Montrer que si x est positif et plus petit que 1, on a $\dfrac{1+x}{1-x} > e^{2x}$.

4511. — On considère l'infiniment petit

$$\lambda(1-\cos x) + \mu \sin x + \nu \operatorname{tg} x + \rho \mathrm{L}(1+x);$$

déterminer λ, μ, ν, ρ de façon que l'ordre soit le plus élevé possible.

4512. — Calculer à $\dfrac{1}{1000}$ près $4 \operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{5}$.

4513. — Calculer $\sin 1^{\circ}$ avec sept décimales exactes.

4514. — Si u est positif, on a $\mathrm{L}(1+u) < u$. En déduire que si la série de terme général u_n est divergente, la série qui a pour terme général $\dfrac{u_n}{\Sigma u_{n-1}}$ est aussi divergente.

4515. — Le produit $P_n = (1+u_1)(1+u_2)\cdots(1+u_n)$ a une limite pour n infini si la série Σu_n est convergente.

4516. — Calculer $\dfrac{dy}{dx}$ sachant que y est lié à x par l'une des équations suivantes :

$$x^y - y^x = 0, \qquad x^2 + y^2 = e^{x+y}.$$

4517. — Entre x, y, z on a les deux relations $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $xyz = a^3$. Calculer $\dfrac{dx}{dz}$ et $\dfrac{dy}{dz}$.

4518. — Toute fonction dont la différentielle totale est nulle est une constante.

4519. — La différentielle totale d'une fonction est la partie principale de l'accroissement de cette fonction.

4520. — Soit $z = f(x, y)$ une fonction de deux variables indépendantes x et y. On pose $x + y = u$, $x - y = v$. Calculer les dérivées partielles de z par rapport à x et y en fonction des dérivées partielles de z par rapport à u et v. En déduire toutes les fonctions z qui vérifient l'équation $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

4521. — On donne la fonction $V = f(r)$, où $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Calculer l'expression $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}$.

Peut-on déterminer la fonction $f(r)$ de façon que cette expression soit nulle ?

4522. — On donne les deux fonctions $u = f(x, y)$, $v = \varphi(x, y)$. Condition pour qu'il existe entre u et v une relation indépendante de x et de y.

4523. — Condition pour que $P\,dx + Q\,dy$ soit la différentielle totale d'une fonction.

4524. — Déterminer les valeurs imaginaires de z telles que l'on ait l'une des relations : 1° $e^z = a + bi$, 2° $\cos z = a + bi$, 3° $\sin z = a + bi$, 4° $\operatorname{tg} z = a + bi$.

4525. — Étant donnés deux nombres imaginaires $z = x + yi$, $z' = x' + y'i$, représentés géométriquement par les points M et M', trouver l'interprétation géométrique de la différence $z - z'$ et du quotient $\dfrac{z}{z'}$.

4526. — Étant donnés quatre nombres imaginaires α, β, α', β', trouver un nombre imaginaire z tel que l'on ait

$$\frac{z-\alpha}{z-\beta} = \frac{z-\alpha'}{z-\beta'}.$$

Interprétation géométrique.

4527. — Discuter les équations

$$x^3 - 12x^2 + 48x - 37 = 0, \qquad x^3 - 6x - 1 = 0, \qquad 3x^3 + 2x^2 - 8x + 8 = 0, \qquad x^5 + x - 1 = 0, \qquad x^7 + x - 1 = 0,$$

$$x^m + mx + \lambda = 0, \qquad x^6 + 6x + 4 = 0, \qquad 4x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 = 0, \qquad x^{12} + x^6 + 1 = 0, \qquad x^3 - 8x - 24 = 0,$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x-5} = 0, \qquad x^4 + x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0,$$

$$1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = 0;$$

$$\cos x + \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x = 0, \qquad \mathrm{L}x = 2 + \sqrt{\frac{5-x}{x}}, \qquad e^x = \mathrm{tg}\, x.$$

4528. — Etant donné un polynome $f(x)$, démontrer que les sommes des puissances semblables des racines de ce polynome sont les coefficients du quotient de $f'(x)$ par $f(x)$.

4529. — Si a est une racine de l'équation $x^3 + px + q = 0$, former l'équation qui donne les deux autres. En déduire la condition de réalité des racines de l'équation du troisième degré.

4530. — Etant donné un polynome $f(x)$, calculer $\Sigma f(\alpha)$, α désignant une racine quelconque de l'équation $x^m - 1 = 0$.

4531. — Appliquer la méthode de Newton au calcul des racines positives des équations $x^2 - 5 = 0$, $x^5 + x - 1 = 0$, $x^7 + x - 1 = 0$.

4532. — La dérivée d'ordre m de la fonction $x^m e^x$ est de la forme $e^x P_m$, P_m étant un polynome de degré m. Démontrer que l'équation $P_m = 0$ a toutes ses racines réelles.

4533. — Conditions pour que l'équation $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ait deux racines doubles.

4534. — Soit une équation $f(x) = 0$ dont toutes les racines $a, b, c, \ldots, l$ sont distinctes. Calculer $\Sigma \frac{1}{x-a}$, $\Sigma \frac{1}{(x-a)(x-b)}$, $\Sigma \frac{1}{(x-a)^2}$. En déduire que si $f(x)$ a toutes ses racines réelles, l'équation $f(x)f''(x) - f'^2(x) = 0$ a toutes ses racines imaginaires.

Calculer $\Sigma \frac{b^2}{a^2}$ pour l'équation $x^3 - 2x^2 - 2 = 0$, $\Sigma a^3 b$ pour $x^3 + px + q = 0$, $\Sigma \frac{1}{1+a^2}$ pour $x^3 - 3x + 1 = 0$.

4535. — Vérifier que l'équation $x^5 - 209x + 56 = 0$ a deux racines dont le produit est égal à 1 et calculer ces deux racines.

4536. — Éliminer x entre les équations $A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m = 0$ et $x^p - 1 = 0$.

4537. — Résoudre le système $a = b^n$, $b = c^n$, $c = a^n$. Cas particulier $n = 2$.

4538. — Résoudre le système $x^y = y^x$, $x^p = y^q$.

4539. — Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles :

$$\frac{1}{x^4 - 1}, \quad \frac{1}{x^m - 1}, \quad \frac{1}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)}, \quad \frac{2x+1}{(x^3-1)^2}, \quad \frac{x+1}{(x-1)^4}.$$

4540. — Calculer les intégrales :

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2}, \quad \int \frac{dx}{x^3(x^2+1)}, \quad \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^3}, \quad \int \frac{x^2 dx}{1+x^4}, \quad \int \frac{dx}{1+x^3}, \quad \int \frac{dx}{x^2-x+9},$$

$$\int_0^1 \frac{(2x+1)dx}{(x+1)^2(x^4+1)}, \quad \int \frac{(2x-1)dx}{(x-1)^3(x^2+1)^2}, \quad \int \frac{dx}{x^4+x^2+1}, \quad \int \frac{(3+x)dx}{(5-x)^3}, \quad \int \frac{dx}{x^m-1},$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}, \quad \int \frac{x^2+px+q}{x^2+ax+b}dx, \quad \int \frac{x^2+px+q}{(x+4)^2}dx.$$

4541. — Calculer les intégrales :

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}, \quad \int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{9}{2}}}, \quad \int \frac{dx}{(1-x)^{\frac{15}{2}}}, \quad \int \frac{(x^2-1)dx}{x\sqrt{4x^2-9}}, \quad \int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx, \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+px+q}},$$

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x-1}}, \quad \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} \text{ (Saider d'une formule de récurrence)}, \quad \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2+6x+1}}{(1-x)^2}dx, \quad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(c-a)(b-x)}} \quad (a<b), \quad \int x^2\sqrt{1-2x^2}\,dx, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

$$\int x\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}dx \ (a<b), \quad \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-x^2}}, \quad \int_0^a \frac{dx}{a+\sqrt{a^2+x^2}}, \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+px+q}}, \quad \int \frac{dx}{1+x\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int \frac{dx}{(a+bx)\sqrt{1+x^2}}, \quad \int (x^3-x^2)^{\frac{2}{3}}dx.$$

4542. — Calculer les intégrales :

$$\int \frac{dx}{\sin x}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\, dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\, dx \text{ (formule de récurrence)}, \quad \int (1-\cos x)^2 dx,$$

$$\int \sin 4x \cos^2 x\, dx, \quad \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x\, dx}{\cos^3 x}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2+b^2-2ab\cos x}, \quad \int \frac{\sin x\, dx}{\cos^3 x}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^8 x},$$

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}dx, \quad \int \frac{\sin x\, dx}{\sin x + \cos x}, \quad \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\cos^2 x}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi},$$

$$\int \frac{\sin^2 x\, dx}{1+\cos 2x}, \quad \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x\, dx}{(2+\cos x)^2}, \quad \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x\, dx}{2+\cos x}, \quad \int \frac{\sin^2 x\, dx}{3+\cos x+\cos^2 x}, \quad \int \frac{dx}{\cos^3 x},$$

$$\int \cos x \cos 2x \cos 3x\, dx, \quad \int \mathrm{tg}^5 x\, dx, \quad \int \frac{dx}{\sin^m x}, \quad \int \frac{\cos x - \sin x - 1}{(1-\cos x)^2}dx.$$

4543. — Calculer les intégrales :

$$\int x^2 e^x\,dx,\qquad \int_{-\infty}^{0} x^3 e^x\,dx,\qquad \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2}\,dx,\qquad \int_0^1 x^p(\mathrm{L}x)^m\,dx,\qquad \int_0^{\infty} e^{-\sqrt[m]{x}}\,dx,$$

$$\int x^2 \arcsin x\,dx,\qquad \int x^p \operatorname{arc\,tg} x\,dx,\qquad \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,dx,\qquad \int \frac{dx}{\sin 2x\sqrt{\sin x}},\qquad \int \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{\sqrt{x}}\,dx,$$

$$\int \mathrm{L}x\,dx,\qquad \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{\sin x}}\,dx,\qquad \int_0^{2\pi} x^m \cos mx\,dx.$$

4544. — Déterminer un polynome $f(x)$ tel que la dérivée de $f(x)e^x$ soit égale à $x^m e^x$.

4545. — Étant donnée l'intégrale $I = \int_a^b f(x,\lambda)\,dx$, calculer la dérivée de I par rapport à λ.

4546. — Limite de

$$\frac{1}{n\alpha} + \frac{1}{n\alpha+\beta} + \cdots + \frac{1}{n\alpha+(n-1)\beta}$$

quand n augmente indéfiniment, α et β étant deux nombres positifs. Ne peut-on rattacher cette limite à une intégrale définie ?

4547. — Volume commun à deux cylindres de révolution égaux et dont les axes se rencontrent sous un angle α. Cas où $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

4548. — Etablir le volume d'un tétraèdre en fonction des longueurs de deux arêtes opposées, du sinus de leur angle et de leur plus courte distance. Pour cela, couper le tétraèdre par des plans parallèles aux deux arêtes considérées et infiniment voisins.

4549. — Aire et volume de la surface engendrée par la courbe $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ tournant autour de Ox et de Oy.

4550. — Aire de la surface engendrée par la courbe $y^2 - 2px = 0$ tournant autour de Oy.

4551. — Moment d'inertie d'un cylindre de révolution par rapport à une génératrice.

4552. — On divise une circonférence en n parties égales par les points $M_1, M_2, \ldots, M_n$ et on joint un point A, intérieur à la circonférence, à tous ces points. Calculer la valeur moyenne de $\overline{AM_i}^2$ quand n augmente indéfiniment.

4553. — On donne une demi-circonférence de diamètre AB ; on divise ce diamètre en n parties égales, et par les points de division on mène des perpendiculaires à ce diamètre, limitées à la demi-circonférence. Valeur moyenne de la longueur de ces perpendiculaires quand n augmente indéfiniment.

4554. — On donne un cercle et un point A sur le cercle. On divise le cercle à partir de A en n parties égales. Soit M l'un des points de division. Chercher la valeur moyenne de $\overline{AM}^n$ quand n augmente indéfiniment.

4555. — Soit l'intégrale $\int_0^{2\pi} \cos ax \cos bx\,dx$, où a et b sont des nombres entiers positifs. Montrer qu'elle est nulle si $a \neq b$, et qu'elle est égale à π si $a = b$. En conclure que l'identité

$$a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + \cdots + a_n\cos nx \equiv b_0 + b_1\cos x + b_2\cos 2x + \cdots + b_n\cos nx$$

n'est possible que si l'on a $a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ \ldots,\ a_n = b_n$.

4556. — Aire limitée par la courbe $xy = 1$, l'axe des x et les ordonnées d'abscisses 1 et n. En considérant les rectangles de base égale à 1, en déduire une limite supérieure et inférieure de $\mathrm{L}n$.

4557. — On donne une courbe $y = f(x)$ rapportée à deux axes rectangulaires et située tout entière au-dessus de Ox. Deux ordonnées Aa et Bb se déplacent de manière que leur distance reste constante. Trouver les positions de ces ordonnées qui correspondent à un maximum ou à un minimum de l'aire $AabB$.

4558. — La courbe $x^4 + y^4 - a^2y^2 = 0$ tournant autour de Oy engendre une surface de révolution dont on demande le volume et la surface totale.

4559. — Volume d'un paraboloïde de révolution compris entre le plan tangent au sommet et un plan perpendiculaire à l'axe.

4560. — Intégrer les équations différentielles

$$\frac{dy}{dx} - ay = x^4,\qquad \frac{dy}{dx} + \frac{ay^2}{1-x^2} = \frac{1+x}{(1-x)^3},\qquad \frac{dy}{dx} = ay - b\sin\omega x,$$

$$-\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{y}x = 1,\qquad \frac{dy}{dx} + y = e^x,\qquad \frac{dy}{dx} - \frac{ay}{1-x^2} = \frac{1+x}{(1-x)^2},$$

$$x\frac{dy}{dx} + y\cos x = \cos x(x + \sin x),\qquad \frac{dy}{dx} - y = e^t,\qquad \cos x\frac{dy}{dx} + y\sin x - 1 = 0,$$

$$\sqrt{1+x^2}\,\frac{dy}{dx} + (1+x^2)y + \frac{1}{x} = 0,\qquad \frac{dy}{dx}\cos x - y\sin x = \cos 2x.$$

4561. — Intégrer les équations différentielles

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = a,\qquad \frac{d^2x}{dt^2} = a^2x + bt^m,\qquad \frac{d^2x}{dt^2} = x + ae^{mt},\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = y + x,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a^2x + be^{at},\qquad \frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + 3x = \sin x,\qquad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + x = Ae^{-t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + y = e^{3x}, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + x = ae^t, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = 7e^t.$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = xe^x, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 3x = a\cos t, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = ae^{-x},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 5\frac{dx}{dt} - 6x = t^4, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} - 5y = e^{2x}, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + x = 4t^4,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - 3y = x^2 + 5.$$

II. — Trigonométrie.

4562. — Résoudre l'équation $\cos x = \sin a$.

4563. — Calculer $\sin\frac{a}{3}$ connaissant $\operatorname{tg} 2a$; $\cos\frac{a}{4}$ connaissant $\sin a$; $\cos\frac{a}{2}$ connaissant $\operatorname{tg}\frac{a}{3}$; $\sin 3a$ connaissant $\cos\frac{a}{7}$.

4564. — On donne $2\cos x = a + \frac{1}{a}$; calculer $\cos mx$.

4565. — On donne $2\operatorname{ch} x = a + \frac{1}{a}$; calculer $\operatorname{ch} mx$.

4566. — On donne $\cos a + \cos b + \cos c + \cos a\cos b\cos c = 0$; trouver une relation entre les tangentes des arcs moitiés.

4567. — Calculer $\sqrt[3]{1 + i\sqrt{3}}$, $\sqrt[4]{i}$, $\sqrt[4]{-i}$.

4568. — Résoudre les équations $x^{10} - 1 = 0$, $x^{12} + 1 = 0$.

4569. — Limite du produit $\cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\ldots\cos\frac{x}{2^n}$ quand n augmente indéfiniment.

4570. — Résoudre les équations

$$\frac{\cos^4\theta}{\cos^2 x} + \frac{\sin^4\theta}{\sin^2 x} = 1, \qquad \frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2, \qquad \sec 4x - \operatorname{cosec} 5x = \cos 4x - \sin 5x, \qquad \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x,$$

$$\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} = 1, \qquad \sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0, \qquad 2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2.$$

4571. — Résoudre les systèmes

$$\begin{cases} x + y = a, \\ \sin x + \cos y = b, \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin x = a\cos y, \\ \sin y = b\cos z, \\ \sin z = c\cos x. \end{cases}$$

4572. — Résoudre un triangle connaissant b, c et sachant que $a = h_a$.

4573. — Résoudre un triangle connaissant : 1° les trois médianes ; 2° les trois hauteurs ; 3° A, B, C, r ; 4° A, B, C, $2p$.

4574. — Dans un triangle on a $\sin C = \cos A + \cos B$; que peut-on dire du triangle ?

4575. — Formule fondamentale de la trigonométrie sphérique. Que devient cette formule quand le rayon de la sphère augmente indéfiniment ?

III. — Géométrie analytique à deux dimensions.

4576. — On donne quatre points A, B, C, D, sur l'axe des x, les abscisses de A et B étant racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, et celles de C et D racines de $a'x^2 + b'x + c' = 0$. Quelle relation doit-il exister entre a, b, c, a', b', c' pour que le rapport anharmonique (ABCD) soit égal à un nombre k? Cas particulier $k = -1$.

4577. — Lieu des points dont la somme des carrés des distances à n points fixes est constante.

4578. — On donne deux axes obliques Ox, Oy, un point A sur Ox, un point B sur Oy et un point M fixe sur AB. Par le point M on mène une sécante mobile qui coupe Ox en C, Oy en D ; on joint AD et BC qui se coupent en P. Lieu du point P.

4579. — Montrer que la relation homographique $Azz' + Bz + Cz' + D = 0$ peut se mettre d'une seule façon sous la forme $\frac{z' - \lambda}{z' - \mu} : \frac{z - \lambda}{z - \mu} = k$. Interprétation géométrique du résultat.

4580. — Construire les courbes :

$x(x^2 + y^2) - a(x^2 - y^2) = 0$ (condition pour que trois points soient en ligne droite), $x^4 + y^4 - a^2xy = 0$ (aire),

$y = x + \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$, $\left(y - \frac{1}{x^2}\right)(x - 2) = 3$, $2x^4 - x^3y - 3x + 1 = 0$,

$y = \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-2)}$, $(x - 2y)(x^2 - y^2) + 2x^2 - y^2 = 0$, $y = \frac{x^3}{x^2+1}$, $y = \sqrt{\frac{x(x-1)}{(x+1)(x+2)}}$,

$y = \pm\sqrt{x \pm \sqrt{x^2 - 1}}$, $y = \pm\sqrt{1 \pm \sqrt{x(x+1)}}$, $(100x^2y - 1)(100x - 1) = 5$,

$(x^2y - 3)(x - 4) = 100x^2$, $y = x\operatorname{cotg}\frac{x}{a}$, $y = \sqrt{x - \sqrt{x}}$ (aire), $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (aire de la boucle),

$$y = \frac{\sin x}{2+\cos x} \text{ (aire)}, \qquad y = \sqrt{x \pm \sqrt{x^2-3x+2}}, \qquad y = \frac{\sin x}{1+\cos x+\cos^2 x} \text{ (aire)},$$

$$y = \frac{1}{1+x+x^2} \text{ (aire, axe de symétrie, concavité)}, \qquad y = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x-1}, \qquad y = \mathrm{L}(\cos x + 2) \text{ (points d'inflexion)}.$$

$$y = \sin x - \sin 2x, \qquad \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1, \qquad x^4 - ax^2y + by^3 = 0, \qquad y = \frac{x^3+x^2}{x-1}, \qquad y = \frac{1}{x^3-6x^2+9x},$$

$$y = x^2 - 8x^2 - 10x + 11, \qquad y = x^4 - 3x^2 - 2x + 6 \text{ (points d'inflexion)}, \qquad y = \frac{x^3}{6a^2} + \frac{a^2}{2x} \text{ (arc)},$$

$$(x^2+y^2)^2 + 2ax(x^2+y^2) + x^2(a^2-b^2) = b^2y^2, \qquad xy^2 - 3x^3 + y^2 = 0, \qquad y^x - x^y = 0.$$

$x = \dfrac{2t}{t^2-1}$, $y = \dfrac{t+1}{2t(t-1)}$;	$x = \dfrac{2t}{1-t^2}$, $y = \dfrac{1+t^2}{1-t^2}$;	$x = \dfrac{t}{t^2-4}$, $y = \dfrac{t^2-2t}{t^2+t-2}$;	$x = \operatorname{tg} t$, $y = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$;
$x = \dfrac{1}{t+1}$, $y = \dfrac{\mathrm{L}t}{t-1}$;	$x = \sin\varphi \sin 2\varphi$, $y = \cos\varphi \cos 2\varphi$;	$x = \dfrac{1}{t^2-1}$, $y = \dfrac{t+1}{(t-1)(t-2)}$;	$x = \cos 3\varphi + \sin 3\varphi$, $y = \cos\varphi - \sin\varphi$.

4581. — Asymptotes de la courbe $x^2 + 8y^3 + x^2 + xy - x - 1 = 0$.

4582. — Construire les courbes définies par les équations :

$$\rho = \cos\omega + \frac{1}{\sin\omega} \text{ (point le plus haut)}, \qquad \rho = \cos\omega - \sin\omega,$$

$$\rho = a\cos 2\omega \text{ (aire d'une boucle)}, \qquad \rho = ae^{m\omega} \text{ (rayon de courbure)},$$

$$\rho = \cos\omega + \frac{1}{\cos 2\omega}, \qquad \rho = \operatorname{tg}\omega + \frac{1}{\operatorname{tg}\omega} \qquad \rho = \cos\omega + \frac{1}{\cos\omega}, \qquad \rho = \frac{\operatorname{tg}\omega + \operatorname{cotg}\omega}{1-\cos\omega},$$

$$\rho = \frac{\sqrt{1-\sin\omega}}{\cos\omega}, \qquad \rho = \cos m\omega \ (m = 1, 2, 3, \ldots), \qquad \rho = \frac{a\cos 2\omega}{\cos\omega}.$$

$$\rho = \frac{1}{\cos\omega} + \frac{1}{\sin\omega}, \qquad \rho = a\,\frac{e^\omega - 1}{e^\omega + 1} \text{ (rectification)}, \qquad \rho = \cos\omega + \operatorname{tg}\omega,$$

$$\rho = \frac{1+\cos\omega}{\omega} \text{ (aire limitée par la courbe, l'axe des } x \text{ et un rayon vecteur)},$$

$$\rho = \sin\omega + \frac{1}{\sin\omega} \text{ (aire limitée par la courbe et deux rayons vecteurs symétriques par rapport à } Oy\text{)},$$

$$\rho = \sin\omega - \operatorname{tg}\omega, \qquad \rho = \frac{\operatorname{tg} 2\omega}{1+\sin\omega},$$

$$\rho = a\cos 2\omega - b\sin\omega, \qquad \rho = \frac{\cos\omega}{1+\operatorname{tg}\omega} \text{ (aire de la boucle)},$$

$$\rho = \frac{\sin^2\omega}{\sin 2\omega + 1}, \qquad \rho = \frac{\cos 2\omega}{\cos^2\omega} \text{ (aire de la boucle)}, \qquad \rho = \frac{1}{\cos\omega} - \operatorname{tg}\omega,$$

$$\rho = \frac{\sin\omega}{1+\operatorname{tg}\omega}, \qquad \rho = \frac{\sin\omega}{1+\sin 2\omega}, \qquad \rho = \frac{1+\operatorname{tg}\omega}{\sin 2\omega}.$$

4583. — Construire les coniques définies par les équations :

$$y = x \pm \sqrt{x^2-3x+2} \text{ (centre, asymptotes, axes)}, \qquad y = x^2 - 3x + 2,$$

$$x^2 - 4xy + 2x - 4 = 0 \text{ (tangentes menées par l'origine)},$$

$$x^2 + 4xy + 2y^2 - 6x + 5 = 0 \text{ (équation réduite)}, \qquad y = 1 - x + x^2,$$

$$3x^2 + 2xy + 5y^2 - 10x + \lambda = 0 \text{ (centre, axes)}, \qquad y = x^2 - 4x + 3,$$

$$y = x \pm \sqrt{x^2 - 5x + 4}.$$

4584. — On donne un cercle de centre O et deux rayons rectangulaires OA et OB. Par un point C de l'arc AB on mène une perpendiculaire sur OB, et à partir du point C on prend sur cette perpendiculaire une longueur CM égale à l'arc AC. Lieu du point M.

4585. — La tangente et la normale en un point M d'une courbe rencontrent Ox en T et N. On considère le cercle circonscrit au triangle MNT : on mène à ce cercle la tangente au point M, et cette tangente rencontre Ox en un point P. Peut-on déterminer la courbe de manière que le point P soit fixe ?

4586. — Calculer $\int y\,dx$, y étant une fonction liée à x par l'une des formules $x^2 - 2y^2 + xy - x - 3y = 0$, $x^3 + 2y^3 - 3xy = 0$.

4587. — Trouver l'expression de l'arc infiniment petit de la courbe $x = a\cos\varphi + b\cos n\varphi$, $y = a\sin\varphi + b\sin n\varphi$. Dans quel cas peut-on intégrer ?

4588. — Trouver toutes les courbes ayant mêmes sous-normales qu'une courbe donnée $y = f(x)$.

4589. — Trajectoires orthogonales d'un faisceau de cercles tangents en un point fixe à une droite fixe.

4590. — On donne deux paraboles $y = ax^2 + bx + c$, $y = a'x^2 + b'x + c'$, et une droite $y = mx + p$. Une paral-

lèle à Oy rencontre ces trois lignes en M, M', P, et sur cette droite on prend un point P' tel que $\overline{PP'} = \overline{MM'}$. Lieu du point P'.

4591. — Rectifier la courbe

$$x = a \sin \varphi - \frac{1}{3}(a-b)\sin^3 \varphi,$$

$$y = a \cos \varphi + \frac{1}{3}(a-b)\cos^3 \varphi.$$

4592. — On donne un cercle, un rayon fixe OA et un rayon variable OB. Lieu du point de concours des hauteurs du triangle OAB.

4593. — Enveloppe d'une droite de longueur constante dont les extrémités décrivent deux axes rectangulaires. Longueur de la courbe obtenue.

4594. — Étant données deux courbes C et C' dans un même plan, à tout point M de la première on fait correspondre un point M' de la seconde tel que les tangentes en M et M' soient parallèles. Par un point fixe O du plan on mène un vecteur $\overline{ON}$ équipollent à $\overline{MM'}$. Montrer que le lieu du point N est une courbe telle que la tangente en N soit parallèle aux tangentes en M et M'. Relations entre les arcs de ces courbes.

4595. — Trouver l'équation générale des courbes du troisième degré qui ont pour asymptotes les trois droites $X \equiv ax + by + c = 0$, $Y \equiv a'x + b'y + c' = 0$, $Z \equiv a''x + b''y + c'' = 0$. Condition pour que ces asymptotes soient d'inflexion.

4596. — On considère la courbe $y^m = x^p$, m et p désignant des nombres entiers tels que $m > p$. Soit M un point de cette courbe, MA et MB les perpendiculaires abaissées de M sur Ox et Oy. Calculer l'aire limitée par la courbe et par les droites OA et AM. Rapport de cette aire à l'aire du rectangle OAMB. Déterminer la courbe pour que ce rapport soit constant.

4597. — On considère la courbe $x^3 + y^3 = 1$. Lieu des milieux des cordes parallèles à la direction $y = 2x$.

4598. — D'un point M d'une courbe on abaisse MP et MQ perpendiculaires sur Ox et Oy. Enveloppe de la droite PQ.

4599. — L'aire limitée par la courbe $y = Lx$ et les deux axes, et qui est située au-dessous de Ox est-elle finie ?

4600. — On donne un point O et une droite D. Par le point O on mène OA perpendiculaire sur D et une droite quelconque rencontrant D en M. Sur la bissectrice de l'angle AOM on porte une longueur OP égale à $\sqrt{OA \cdot OM}$. Lieu du point P.

4601. — Trouver une courbe telle que l'ordonnée du centre de courbure soit proportionnelle à l'ordonnée du point correspondant de la courbe.

4602. — Construire la courbe $(x^2 + y^2)^5 = a^2xy$. Est-elle unicursale ? En combien de points est-elle coupée par un cercle quelconque ? Condition pour que quatre points de la courbe soient sur un cercle. En déduire l'équation du cercle osculateur en un point. Lieu des centres des cercles osculateurs.

4603. — Enveloppe des cordes d'un cercle qui sont vues d'un point fixe sous un angle droit.

4604. — On donne sur une courbe un point fixe O et un point variable M, on mène la tangente en ce point et sur cette tangente on prend dans le sens MO une longueur MP = arc OM. Trouver les coordonnées du point P et montrer que lorsque M varie, le point P décrit une courbe normale à PM.

4605. — Démontrer que dans la chaînette la projection de l'ordonnée sur la normale est constante. — Réciproque.

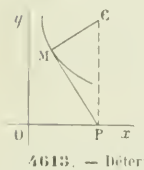
4606. — Trouver le rayon de courbure de l'enveloppe de la droite $x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0$, p étant une fonction donnée de φ. En déduire le rayon de courbure de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

4607. — Enveloppe de la droite $x \sin \varphi + y \cos \varphi - a \sin 2\varphi = 0$. Trouver l'arc et le rayon de courbure.

4608. — Trouver les courbes telles que la longueur de la normale soit fonction de la distance de l'origine au pied de la normale sur Ox. Prendre par exemple comme fonction 4 fois le carré de la distance.

4609. — Déterminer les tangentes menées du point $x = 1$, $y = 0$ à la courbe $y^2 = x^3 - x^2$.

4610. — La normale en un point M d'une courbe rencontre les axes Ox et Oy aux points N et N' respectivement.



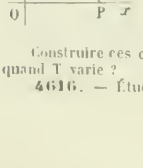
Déterminer la courbe de sorte que le rapport $\frac{MN}{MN'}$ soit constant.

4611. — Une corde AB d'une courbe quelconque se déplace de manière que l'aire du segment limité soit constante. Trouver le point où AB touche son enveloppe.

4612. — Déterminer une courbe telle que la portion MP de la tangente limitée au point de contact M et à l'axe des x ait une longueur constante.

Montrer que le centre de courbure au point M se projette sur Ox au point P. Réciproquement, trouver toutes les courbes jouissant de cette dernière propriété.

4613. — Déterminer une courbe telle que la normale en un point M quelconque rencontre Ox en un point P qui soit symétrique du centre de courbure C par rapport au point M.



Montrer que la courbe est une chaînette.

4614. — Construire la courbe $(x^2 + y^2)x - ay^2 = 0$: exprimer les coordonnées d'un point de la courbe en fonction rationnelle d'un paramètre t. Relation entre les t de trois points en ligne droite. Relation entre les t de quatre points situés sur un même cercle.

4615. — Courbes de Van der Waals, définies par l'équation

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT.$$

Construire ces courbes, v étant l'abscisse, p l'ordonnée, a, b, R, T étant des constantes. Comment varient ces courbes quand T varie ?

4616. — Étude de la cycloïde. Longueur d'un arc. Aire. Courbure. Développée.

4617. — On donne n droites, $x\cos\alpha_i + y\sin\alpha_i - p_i = 0$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Soient $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ les distances d'un point M à ces droites ; trouver le lieu du point M tel que l'on ait

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 + \cdots + \delta_n^2 = k^2.$$

Qu'arrive-t-il quand on fait varier k. Cas particulier où $n = 3$.

4618. — Calculer le rayon de courbure en un point de la chaînette. Trouver toutes les courbes dont le rayon de courbure est donné par $R = \frac{y^2}{a}$.

4619. — On donne un cercle de centre O et un point A dans son plan. Trouver un point M sur le cercle tel que si l'on abaisse MB perpendiculaire sur OA, MO soit bissectrice de l'angle AMB.

4620. — Lieu des sommets des angles droits circonscrits à une cycloïde.

4621. — La tangente et la normale en un point M d'une courbe rencontrent Ox respectivement aux points T et N. Déterminer la courbe de manière que le segment $\overline{NT}$ ait une valeur constante.

4622. — On donne une ellipse et un rectangle inscrit. Calculer l'aire de l'ellipse extérieure au rectangle.

4623. — On donne un cercle variable tangent à l'origine à l'axe des x, et on lui mène des tangentes par un point fixe. Lieu des points de contact. Cas où le point fixe est sur Oy.

4624. — Trouver une courbe telle que la distance du pied de l'ordonnée à la tangente soit constante. Lieu du pied de la perpendiculaire abaissée du pied de l'ordonnée sur la tangente.

4625. — Trouver une courbe telle que la distance du pied de l'ordonnée à la normale soit constante.

4626. — Étant donnée une hyperbole équilatère $xy = k^2$, calculer l'aire comprise entre la courbe et une corde perpendiculaire à l'axe transverse.

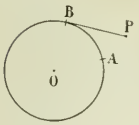
4627. — Enveloppe des courbes planes. Cas où l'équation des courbes est mise sous la forme $\lambda = f(x, y)$. Cas particulier : enveloppe des cercles $(x - \lambda)^2 + y^2 - R^2 = 0$. Peut-on écrire l'équation $\lambda = x \pm \sqrt{R^2 - y^2}$?

4628. — Centre de courbure d'une ellipse en l'un de ses sommets.

4629. — Enveloppe d'une droite qui forme avec deux droites fixes un triangle de surface constante.

4630. — Enveloppe de la droite $y = tx + at^2$. A chaque valeur de t correspond un point de contact. Trouver l'équation de la droite joignant les deux points correspondant aux valeurs t_1 et t_2.

4631. — Équation des courbes telles que la longueur de la tangente interceptée par les axes de coordonnées soit constante. La solution générale du problème est une droite à un paramètre. Enveloppe de cette droite.



4632. — Hypocycloïdes et épicycloïdes. Propriétés de la tangente et de la normale.

4633. — Construire la courbe $x^4 + y^4 - a^2y^2 = 0$. Étudier le point le plus haut, la courbure en ce point. Aire limitée par cette courbe.

4634. — Rayon de courbure en un point de la courbe $ay^2 = x^3$.

4635. — Trouver une courbe dont la courbure soit une fonction de l'ordonnée.

4636. — Trouver une courbe dont la sous-normale est constante.

4637. — On donne un cercle O et un point fixe A sur ce cercle. On mène la tangente en un point B quelconque et sur cette tangente on porte une longueur BP = arc AB. Lieu du point P. Tangente au point P du lieu. Développée de la courbe.

4638. — On considère la courbe $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ qui rencontre Oy en un point A, et d'un point quelconque M de la courbe on abaisse MP perpendiculaire sur Ox. Démontrer que aire OAMP = a. arc AM. Enveloppe des normales.

4639. — On donne un point O et on considère une courbe, et sur cette courbe un point fixe A et un point variable M. Déterminer la courbe de manière que l'arc AM soit proportionnel à l'aire du secteur OAM.

4640. — Trouver l'enveloppe de la droite

$$[x - f(t)]\varphi'(t) - [y - \varphi(t)]f'(t) = 0,$$

$f(t)$ et $\varphi(t)$ étant des fonctions continues de la variable t.

4641. — On considère une courbe rapportée à deux axes rectangulaires Ox et Oy ; d'un point M de cette courbe on abaisse MP perpendiculaire sur Ox, et on désigne par T le point où la tangente en M rencontre Oy. Déterminer la courbe de manière que PT soit perpendiculaire à OM.

4642. — Calculer le rapport anharmonique des tangentes aux sommets d'une ellipse.

4643. — Une parabole de grandeur constante tourne autour de son foyer. On lui mène une tangente parallèle à une direction fixe. Lieu du point de contact.

4644. — Trajectoires orthogonales des paraboles ayant pour axe Ox et passant par deux points A et B de Oy, symétriques par rapport au point O.

4645. — Lieu d'un point M tel que la perpendiculaire menée de ce point à sa polaire par rapport à une ellipse passe par un point fixe. Solution géométrique. Intersection de l'ellipse donnée et du lieu.

4646. — Lieu des points M tels que la différence de leurs distances à deux points fixes A et B soit constante. Démontrer que AM et BM sont des fonctions linéaires des coordonnées du point M.

4647. — Étudier la conique $y^2 = 2px + qx^2$; expressions de p et q en fonction des éléments de la conique. Rayon de courbure. Aire dans le cas où $q < 0$.

4648. — Une ellipse de grandeur constante tourne autour de son centre. Lieu des points de contact des tangentes parallèles à une direction donnée.

4649. — Étant donnée la conique $f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$, calculer son excentricité et écrire que la droite $y = mx$ est axe de cette conique.

4650. — Trouver les axes de la conique $2x^2 + 4xy + 5y^2 + 4x - 7 = 0$, en la coupant par un cercle concentrique.

4651. — Calculer le rapport des axes de la conique $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = h$, et montrer qu'il est indépendant de h.

4652. — On mène un diamètre BC dans une ellipse. Trouver le lieu du point de rencontre de la tangente en B et de la normale en C à cette ellipse.

4653. — Sur la tangente en un point M d'une ellipse on porte une longueur MP égale au diamètre qui aboutit au point M. Lieu du point P quand le point M décrit l'ellipse.

4654. — On considère une ellipse et un cercle concentrique limitant un quadrilatère curviligne. Trouver l'aire de ce quadrilatère.

4655. — Diamètres conjugués communs à deux coniques concentriques. Discuter.

4656. — On considère deux diamètres conjugués OA et OB d'une ellipse. Trouver l'équation du cercle passant par les points O, A, B. Lieu du centre de ce cercle quand les diamètres OA, OB varient en restant conjugués.

4657. — Équation générale des coniques homothétiques de la conique $Ax^2 + 2Bxy + 2Dx + 2Ey = 0$.

4658. — On considère les deux coniques $x^2 - 2xy + 4y - 1 = 0$ et $x - 2(3x + y - 1) = 4$. Les construire. Elles ont un point commun à l'infini et trois autres points à distance finie. Trouver l'équation du cercle passant par ces trois points.

4659. — Chercher la courbe polaire réciproque de la développée de la parabole par rapport à un cercle ayant son centre sur l'axe de la parabole.

4660. — Rayon de courbure en un point de l'hyperbole équilatère $xy = a^2$. L'exprimer en fonction de la distance du point au centre.

4661. — Trouver toutes les coniques qui coupent à angle droit l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ aux quatre points de rencontre.

4662. — On donne une conique et trois points situés dans son plan O, A, B. Par le point O on mène une sécante rencontrant la conique en M et M' : on joint AM, BM qui rencontrent la conique en N et N'. Dans quel cas les points N et N' sont-ils en involution ?

4663. — Par le foyer d'une conique, on mène n rayons vecteurs formant une étoile régulière. Calculer la valeur moyenne de ces rayons quand n augmente indéfiniment.

4664. — On donne une hyperbole rapportée à ses asymptotes $xy = 1$. On prend trois points de la courbe M_1, M_2, M_3 dont les abscisses sont racines d'une équation du troisième degré contenant linéairement un paramètre $f(x) + \lambda\varphi(x) = 0$. Trouver l'enveloppe des côtés du triangle $M_1M_2M_3$ et le lieu du centre de gravité.

4665. — La tangente en un point M d'une ellipse de centre O rencontre les axes de l'ellipse aux points A et B. Étudier comment varie la longueur AB et l'aire du triangle AOB.

4666. — Déterminer les points communs aux hyperboles $3xy + x^2 + y^2 = 79$, $x + y - 2xy = 38$. Construire ces courbes.

4667. — On donne une parabole de sommet S et un point A sur l'axe ; on considère une corde variable MM' perpendiculaire à l'axe. On joint MA, M'S qui se coupent au point P. Lieu du point P.

4668. — On fait rouler une parabole sur une parabole égale ; lieu du foyer. Mouvement de ce foyer quand le roulement est uniforme.

4669. — On donne une droite D et deux points O et O'. Un segment constant MM' se déplace sur D. Lieu du point d'intersection de OM et O'M'.

4670. — On donne une conique et deux points fixes A et B. On joint ces points à un point variable M de la conique ; AM et BM rencontrent la conique aux points N et N'. Ces deux points peuvent-ils être en involution ?

4671. — Intersection d'une droite avec les coniques d'un faisceau ponctuel. Cas où la droite est à l'infini : cas où il y a un cercle dans le faisceau ; cas où les points doubles à l'infini sont les points cycliques.

4672. — Trouver les points communs aux deux coniques $\frac{x + x^2}{y + y^2} = a$, $\frac{y + x^2}{x + y^2} = b$.

4673. — On donne une conique, une droite D et son pôle P. Par le point P on mène une sécante AB et on abaisse AA' et BB' perpendiculaires sur D. Démontrer que $\frac{1}{AA'} + \frac{1}{BB'}$ est constant.

4674. — On donne un losange ABCD ; une sécante mobile autour du point C rencontre AD en M et AB en N. Lieu du point de rencontre de ND et de MB. Ce lieu peut-il être un cercle ?

4675. — La normale en un point M d'une ellipse rencontre la courbe en un deuxième point N. Relation entre les anomalies excentriques des points M et N.

4676. — On considère une parabole $x^2 - 2py = 0$ et un cercle qui la coupe en quatre points. Trouver les abscisses des points de rencontre. On obtient une équation du quatrième degré. Réciproquement, étant donnée une équation du quatrième degré, peut-on la résoudre graphiquement par l'intersection d'une parabole et d'un cercle ?

4677. — On donne une hyperbole rapportée à ses axes, et d'un point M de la courbe on abaisse MP et MQ perpendiculaires sur les axes. Enveloppe de la droite PQ.

4678. — La normale en un point M d'une ellipse rencontre les axes en N et N'. Lieu du milieu de NN'.

4679. — Deux points M et M' décrivent une homographie sur une conique. Lieu du point de rencontre des tangentes en M et M'.

4680. — Étant données deux coniques dans un même plan, on considère un point M sur l'une et un point M' sur l'autre. Ces deux points se correspondent homographiquement. Trouver la condition pour que la droite MM' passe par un point fixe. Montrer que ce point ne peut être qu'un ombilic.

4681. — Lieu des milieux des normales à une ellipse.

4682. — Lieu des centres des coniques passant par deux points et tangentes à deux droites.

4683. — Étant données deux coniques C et C', une tangente à C rencontre C' en deux points de paramètres t et u. De quelle forme est la relation entre t et u ?

4684. — On donne une droite D et deux points O et O'. On joint ces deux points à un point M variable sur la droite D. Par O on mène une perpendiculaire à OM et par O' une perpendiculaire à O'M. Lieu du point de rencontre de ces deux perpendiculaires. Discuter.

4685. — Par le centre d'une ellipse on mène des rayons vecteurs faisant des angles égaux entre eux. Valeur moyenne des carrés de ces rayons quand l'angle tend vers zéro.

4686. — On donne une conique et un point O. Par ce point on mène une sécante qui rencontre la conique aux points

C et D. Trouver les lieux des points M, N, P tels que l'on ait $\overline{OM}^2 = \overline{OC}.\overline{OD}$, $\overline{ON} = \frac{\overline{OC} + \overline{OD}}{2}$, $\frac{2}{\overline{OP}} = \frac{1}{\overline{OC}} + \frac{1}{\overline{OD}}$.

Expliquer géométriquement les résultats obtenus.

4687. — Étant donnée l'hyperbole équilatère $xy - 1 = 0$, trouver la condition pour que quatre de ses points soient sur un cercle.

4688. — La tangente en un point M d'une parabole rencontre la directrice en un point P. Minimum de la longueur MP.

4689. — D'un point M d'une hyperbole on abaisse MP et MQ perpendiculaires sur les asymptotes, démontrer que le produit MP.MQ est constant. En déduire l'équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes.

4690. — Étant donnée une ellipse et un point C sur son grand axe, calculer en fonction de l'abscisse de ce point le rayon du cercle bitangent à l'ellipse ayant pour centre le point C.

4691. — Un cercle variable touche une ellipse fixe en un point fixe. Trouver le lieu du point de contact d'une tangente à ce cercle parallèle à un axe de l'ellipse.

4692. — En partant de la définition élémentaire de l'ellipse $(MF + MF' = 2a)$, établir l'existence et les propriétés des directrices.

4693. — Déterminer les paraboles d'un faisceau ponctuel de coniques.

4694. — On considère une ellipse et un cercle bitangent; par le centre du cercle on mène la perpendiculaire à l'axe de l'ellipse qui passe par le centre. Lieu des points d'intersection de cette droite et du cercle. En déduire la construction d'un cercle bitangent à l'ellipse donnée.

4695. — Condition pour que la droite $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ touche l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Interprétation géométrique de la condition trouvée. Comme application, chercher le lieu des centres des ellipses de grandeur donnée tangentes à deux droites.

4696. — Rapport anharmonique de quatre points d'une conique. Cas où cette conique est un cercle et où deux points sont les points cycliques.

4697. — Enveloppe des cercles ayant pour diamètres les cordes d'une parabole perpendiculaires à l'axe.

4698. — D'un point A on mène les tangentes AM, AM' à une ellipse, puis une sécante APQ. Calculer le rapport anharmonique des quatre points M, M', P, Q.

4699. — Démontrer que si deux coniques ont leurs axes parallèles, toute conique passant par leur intersection a ses axes parallèles à ceux des deux premières, et que par l'intersection passe un cercle.

4700. — On considère la conique $5x^2 - 2xy + y^2 + 2y - 4 = 0$, et on demande de calculer l'intégrale $\int xydx$. y étant une fonction de x définie par l'équation donnée.

4701. — Lieu des sommets des angles de grandeur constante circonscrits à une parabole.

4702. — Lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du sommet d'une parabole sur ses tangentes. Montrer que le lieu est une courbe unicursale. Conditions pour que quatre points de cette courbe soient sur un cercle.

Montrer que si un cercle quelconque passe par deux points fixes A et B de la courbe et la coupe en deux points variables C et D, la corde CD coupe la courbe en un point E qui est fixe. Déduire de là le cercle osculateur en un point de la courbe.

4703. — Par les pieds des normales issues d'un point P à une ellipse on peut faire passer deux paraboles. Trouver le point de rencontre des axes de ces paraboles, et le lieu de ce point quand le point P décrit une droite.

4704. — Condition pour que la droite $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ soit tangente à l'hyperbole équilatère $xy = k^2$.

4705. — Rapport anharmonique de quatre tangentes. Que devient la propriété quand deux des tangentes sont les tangentes issues d'un foyer?

4706. — On donne deux points A et B sur une conique. Trouver deux points C et D tels que le rapport anharmonique des quatre points A, B, C, D soit égal à -1.

4707. — Calculer l'aire comprise entre une parabole et sa développée.

4708. — Une tangente mobile à une parabole rencontre deux tangentes fixes aux points T et R et la tangente au sommet au point S. Montrer que le rapport $\frac{\overline{SR}}{\overline{ST}}$ est constant. Ce rapport peut-il être égal à -1?

(*A suivre.*)

CONCOURS DE 1905 (*Suite*)

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Mathématiques élémentaires (*).

On donne un cercle C de centre O et de rayon R, un point fixe K à l'intérieur de ce cercle. Un rayon lumineux FK, émanant d'un point F de la circonférence du cercle C, se réfléchit en K sur le diamètre OK et va rencontrer la circonférence de C en un point E. Soit M le milieu de la corde EF et soit AB la corde de C perpendiculaire au diamètre OK au point K.

(*) Des solutions étudiées de la question de Mathématiques élémentaires sont publiées dans le *Journal de Mathématiques élémentaires*

1° Trouver le lieu des centres des cercles inscrit et exinscrits au triangle MAB quand F décrit la circonférence du cercle C.

2° Etudier, dans les mêmes conditions, comment varie le cercle passant par les centres des trois cercles exinscrits au triangle MAB.

3° On prend un second point K′ fixe, intérieur à C et situé sur le diamètre OK. Un rayon lumineux F′K′, parallèle à FK, se réfléchit en K′ sur ce diamètre et rencontre en E′ la circonférence du cercle C. Trouver le lieu du point de rencontre de EF et de E′F′ lorsque F et F′ se déplacent sur la circonférence du cercle C. Etudier ce lieu en supposant que K et K′ se déplacent sur un diamètre fixe et de telle sorte que le milieu de KK′ reste fixe.

4° Soit M′ le milieu de E′F′. La droite MM′ rencontre le lieu de M en un nouveau point H et celui de M′ en un nouveau point H′. Etudier le cercle circonscrit au triangle HOH′ et la perpendiculaire au milieu de HH′.

5° Soit L le point qui partage HH′ dans un rapport donné λ. Démontrer que le lieu du point L est en général une ellipse. Examiner comment varient les cercles principaux de cette ellipse quand le rapport λ varie.

(30 juin, de 7 h. à 2 h.)

Mathématiques spéciales.

1443. — 1° On donne les deux droites D, D′ définies respectivement par les équations

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ z = h \end{array}\right\} \text{(D)}, \qquad \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ z = -h \end{array}\right\} \text{(D')},$$

les axes de coordonnées ox, oy, oz étant supposés rectangulaires. Trouver l'équation ponctuelle de la surface S lieu du sommet d'un paraboloïde variable qui passe par ces deux droites. Trouver l'équation tangentielle de la même surface S.

2° Calculer les coordonnées d'un point quelconque M de la surface S en fonction de l'abscisse α et de l'ordonnée β des deux points N, N′ où une droite, menée par M, rencontre respectivement D et D′. Soit P le point de coordonnées α, β dans le plan xoy. Lieu du point M quand P décrit une droite quelconque du plan xoy. Etude de l'intersection de la surface S avec une quadrique quelconque qui passe par D et D′. Lieu correspondant du point P. Cas où cette intersection se décompose.

3° Démontrer que la surface S est sa propre polaire réciproque par rapport à une infinité de quadriques Q, dont on cherchera l'équation générale ponctuelle. On envisagera plus particulièrement parmi elles les paraboloïdes Q_1. Trouver l'enveloppe des quadriques Q.

(1er juillet, de 7 h. à 2 h.)

Composition sur l'analyse et ses applications géométriques.

L'équation d'un plan, par rapport à trois axes de coordonnées rectangulaires ox, oy, oz, étant écrite sous la forme

$$ux + vy + wz = h,$$

les équations

$$u = \cos\varphi, \qquad v = \sin\varphi, \qquad w = \operatorname{cotg}\theta, \qquad h = f(\theta, \varphi),$$

où θ et φ désignent deux paramètres arbitraires et $f(\theta, \varphi)$ une fonction donnée de ces paramètres, définissent une surface S en coordonnées tangentielles.

1° Démontrer que si l'on considère sur la surface S les deux systèmes de courbes $\theta = \text{const.}$, $\varphi = \text{const.}$, la condition nécessaire et suffisante pour que ces deux systèmes soient conjugués est que $f(\theta, \varphi)$ soit de la forme

$$f(\theta, \varphi) = \alpha + \beta,$$

α étant fonction de θ seul et β fonction de φ seul.

Dans toute la suite de l'énoncé, on supposera que $f(\theta, \varphi)$ est de cette forme.

2° Montrer que les courbes $\theta = \text{const.}$, $\varphi = \text{const.}$ sont alors les lignes de courbure de la surface S et qu'elles sont en outre des courbes planes. Calculer, en fonction de θ et de φ, les deux rayons de courbure principaux en un point quelconque de la surface S.

3° De ces deux rayons, l'un R_1 est fonction de θ seulement ; l'autre R_2 dépend en général à la fois de θ et de φ. Quelle forme doit avoir $f(\theta, \varphi)$ pour que R_2 soit aussi indépendant de φ ? Montrer que, dans ce cas, la surface S est de révolution autour d'un axe parallèle à oz.

4° Établir que, plus particulièrement, on peut déterminer la fonction $f(\theta, \varphi)$ de manière à avoir

$$R_1 = l \operatorname{tg}\theta, \qquad R_2 = -l \operatorname{cotg}\theta,$$

R_1 et R_2 étant, suivant l'usage, affectés d'un signe et l désignant une longueur donnée, positive ou négative. Effectuer cette détermination.

5° Trouver, dans ce cas particulier, la relation entre θ et φ qui définit une ligne géodésique quelconque de la surface S et calculer la courbure et la torsion de cette ligne en un quelconque de ses points.

(3 juillet, de 7 h. à 2 h.)

Mécanique rationnelle.

Soient $ox_1y_1z_1$ un trièdre trirectangle fixe et $oxyz$ un trièdre trirectangle mobile de même sommet et de même orientation. Un corps solide S, attaché à ce second trièdre, est ainsi mobile autour du point fixe o.

Former les équations de son mouvement, sachant :

1° Que son ellipsoïde d'inertie relatif au point o est de révolution autour de oz ;

2° Que le solide S, supposé non pesant, est sollicité par une force F appliquée en un point G de oz tel que $oG = a$, dirigée suivant PG, P désignant un point de oz_1 tel que $oP = b$, et égale à une fonction donnée $f(GP)$ de la distance des deux points G et P ;

3° Qu'au début du mouvement, l'angle zoz_1 est droit et que la rotation instantanée du solide S se trouve dans le plan zoz_1, avec des projections sur oz et sur oz_1 égales respectivement à ω et à ω_1.

Application. — Le solide est une sphère homogène, de centre G, de rayon a et de masse M. On a de plus

$$b = a, \qquad \omega_1 = -\frac{7}{2}\omega, \qquad f(GP) = \frac{28}{5} Ma^4\omega^2 \frac{1}{\overline{GP}^3}.$$

Exprimer les angles d'Euler en fonction explicite du temps.

Déterminer et étudier successivement les trajectoires de l'extrémité de la rotation instantanée par rapport aux deux trièdres trirectangles oXY_1z_1 et $oXYz$, supposés orientés comme le trièdre $ox_1y_1z_1$, oX étant perpendiculaire au plan zoy_1.

(4 juillet, de 7 h. à 2 h.)

QUESTIONS PROPOSÉES

1444. — On donne deux axes rectangulaires Ox, Oy et un point A sur Oy. Trouver une courbe telle que si l'on mène la tangente en un point quelconque M de la courbe, cette tangente rencontre Ox en un point T équidistant des points M et A.

1445. — On considère une ellipse E située dans l'espace et dont la projection sur un plan P soit un cercle. On prend sur elle un point fixe A et un point mobile M.

1° La trace sur le plan P du plan perpendiculaire à AM en son milieu enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements H. Trouver géométriquement ses rebroussements.

2° Si le point A varie sur l'ellipse E, l'hypocycloïde H reste de grandeur constante et reste tangente à deux droites fixes P et Q ; la droite qui joint les points de contact des droites P et Q enveloppe une hypocycloïde à quatre rebroussements.

3° A deux points A et A′ de l'ellipse E correspondent deux hypocycloïdes H et H′ qui ont, en dehors des droites P et Q, une troisième tangente commune R qui est en même temps une corde commune.

4° Le problème précédent peut être ainsi généralisé : Soit une biquadratique admettant un plan P pour plan de symétrie et se projetant sur lui suivant un cercle. Le lieu des centres des sphères qui, passant par les extrémités d'une corde D de la courbe perpendiculaire au plan P, sont doublement tangentes à cette courbe est une hypocycloïde à trois rebroussements H ; si la corde D se déplace, la courbe H reste de grandeur constante ; enfin, les traces sur le plan P des plans normaux à la biquadratique enveloppent une hypocycloïde à quatre rebroussements.

(D'après Laguerre.)

1446. — On considère un système quelconque de forces, dont les éléments de la réduction à l'origine des coordonnées sont désignés comme d'habitude par X, Y, Z, L, M, N.

1° Montrer que si on effectue la réduction en un autre point quelconque M et que l'on mène le vecteur MM′ qui représente le moment résultant en ce point, on passe de M à M′ par une transformation homographique. Calculer les formules directes et les formules inverses de cette transformation quand les six éléments fondamentaux sont 1, 0, 1, 0, 0, h.

2° On suppose Oz vertical et ascendant, le point M′ pesant et tombant librement à partir du plan des xy.

le long d'une parallèle à Oz du plan des yz, (D) ; trouver le mouvement du point correspondant M. La trajectoire de ce point est une droite ; sachant que le point est pesant et a pour masse m, trouver la réaction que cette droite exerce sur le point M dans le mouvement imposé.

3° Dans les mêmes conditions, trouver le lieu de la droite de support du vecteur MM'. Ce lieu est un paraboloïde ; on demande le lieu de son axe, quand la droite (D) décrit le plan des yz.

E. H.

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE (Concours de 1904)

Mathématiques.

1365. — 1° *On considère une conique* C *d'équation* $Ax^2 + By^2 - 1 = 0$, *un point quelconque* P *du plan, de coordonnées* α *et* β. *On mène un diamètre variable. Soit* M *le point d'intersection de ce diamètre avec la perpendiculaire abaissée de* P *sur le diamètre conjugué. On demande le lieu décrit par* M, P *restant fixe.*

Ce lieu est une conique Γ. *Montrer qu'elle passe par les pieds des normales à* C *abaissées de* P.

2° *La conique* Γ *passe par trois points fixes quel que soit* P. *Montrer qu'elle passe par un quatrième point fixe, quand* P *décrit une droite* D. *Condition à laquelle doit satisfaire la droite* D *pour que le quatrième point fixe des coniques* Γ *correspondant aux points de cette droite soit situé sur* C. *Interpréter cette condition.*

3° *Lieux des sommets de* Γ, *quand* P *décrit une parabole ayant pour sommet le centre, et pour tangente au sommet l'un des axes de* C.

Construire ces lieux sur un exemple numérique qu'on choisira à volonté.

4° *Lieux des foyers de* Γ *quand* P *décrit la parabole de la question précédente.*

1. Soit $y = mx$ l'équation d'un diamètre variable de la conique C ; le coefficient angulaire du diamètre conjugué est $-\frac{A}{Bm}$; par suite, la perpendiculaire à ce diamètre issue du point $P(\alpha, \beta)$ a pour équation

$$y - \beta = \frac{Bm}{A}(x - \alpha).$$

On aura donc le lieu du point M en remplaçant dans cette équation m par $\frac{y}{x}$, ce qui donne successivement

$$y - \beta = \frac{By}{Ax}(x - \alpha)$$

ou (1)
$$\frac{x - \alpha}{Ax} = \frac{y - \beta}{By}$$

ou enfin

(1) $$(A - B)xy - A\beta x + B\alpha y = 0.$$

Cette équation représente une hyperbole équilatère (Γ) ayant ses asymptotes parallèles aux axes de coordonnées, passant par l'origine et par le point P. Sous la forme (1) on reconnaît l'équation de l'hyperbole d'Apollonius relative au point P et à la conique C.

On en conclut que la conique Γ passe par les pieds des normales issues du point P à la conique C.

2. La conique Γ passe par trois points fixes : l'origine et les points à l'infini dans la direction des axes de coordonnées.

Supposons que le point P décrive la droite

$$(D) \qquad ux + vy + w = 0 :$$

nous avons alors $u\alpha + v\beta + w = 0$; nous en tirons $\alpha = -\dfrac{v\beta + w}{u}$, et en portant cette valeur dans l'équation de la conique Γ, cette équation devient

$$y[u(A - B)x - Bw] - \beta[Aux + Bvy] = 0.$$

On en déduit qu'outre les trois points fixes mentionnés plus haut, la conique Γ passe encore par le point qui est défini par les équations

$$u(A - B)x - Bw = 0, \qquad Aux + Bvy = 0.$$

Les coordonnées de ce point sont

$$x = \frac{Bw}{(A - B)u}, \qquad y = -\frac{Aw}{(A - B)v}.$$

Ce point est toujours sur la droite D. Pour qu'il soit sur la conique C, il faut qu'on ait

$$\frac{AB^2w^2}{(A - B)^2u^2} + \frac{BA^2w^2}{(A - B)^2v^2} - 1 = 0$$

ou

$$\frac{\frac{1}{A}}{u^2} + \frac{\frac{1}{B}}{v^2} - \frac{\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)^2}{w^2} = 0.$$

C'est l'équation tangentielle de la développée de la conique C. On en conclut que pour que le quatrième point fixe soit situé sur la conique C, il faut que la droite D soit normale à cette conique.

3. La conique Γ

$$(2) \qquad f(x, y) \equiv (A - B)xy - A\beta x + B\alpha y = 0$$

a ses asymptotes parallèles aux axes de coordonnées ; par suite, ses axes sont les diamètres conjugués des directions qui ont pour coefficients angulaires ± 1. Les équations des axes sont donc

$$(3) \qquad f'_x + f'_y \equiv (A - B)(y + x) - A\beta + B\alpha = 0,$$

$$(3)' \qquad f'_x - f'_y \equiv (A - B)(y - x) - A\beta - B\alpha = 0.$$

D'autre part, si le point P décrit la parabole $y^2 - 2px = 0$, nous avons la relation

$$(4) \qquad \beta^2 - 2p\alpha = 0.$$

Le lieu des sommets se décompose en deux courbes : l'équation de la première s'obtiendra en éliminant α et β entre les équations (2), (3) et (4), et celle de la seconde en éliminant α et β entre (2), (3)' et (4).

Or, remarquons que le système des équations (2), (3)' et (4) se déduit du système formé par (2), (3) et (4) en changeant y en $-y$ et β en $-\beta$. Par suite, la deuxième courbe se déduira de la première en changeant y en $-y$; elle sera donc symétrique de la première par rapport à Ox.

Il nous suffit donc d'étudier la première partie du lieu ; nous éliminerons α et β entre les équations (2), (3) et (4).

Des deux premières, qui sont linéaires en α et β, nous tirons

$$\alpha = \frac{(A - B)x^2}{B(y - x)}, \qquad \beta = \frac{(A - B)y^2}{A(y - x)},$$

et, en portant ces valeurs dans la relation (4), nous avons

$$\frac{(A - B)^2y^4}{A^2(y - x)^2} - 2p\,\frac{(A - B)x^2}{B(y - x)} = 0$$

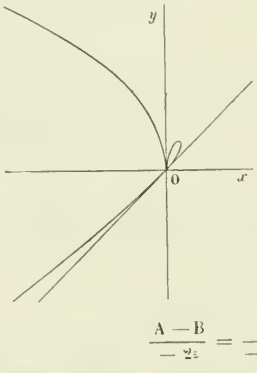
ou
$$y^4 - ax^2(y - x) = 0$$
en posant $a = \dfrac{2pA^2}{B(A - B)}$.

Cette équation représente une courbe du quatrième degré admettant un point triple à l'origine et des branches paraboliques dans la direction Ox.

Pour la construire, on pose $y = tx$; on a alors
$$x = \frac{a(t-1)}{t^4}, \qquad y = \frac{a(t-1)}{t^3},$$
$$\frac{dx}{dt} = -\frac{3t-4}{t^5}, \qquad \frac{dy}{dt} = -\frac{2t-3}{t^4},$$
et on en déduit les variations suivantes de x et de y (a étant supposé positif)

t	$-\infty$			0			1		$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
x	0	décroît	$-\infty$	$-\infty$	croît	0	croît	*max.*		décroît		décroît	0
y	0	croît	$+\infty$	$-\infty$	croît	0	croît			croît	*max.*	décroît	0

et la courbe suivante.



Le lieu des sommets se compose de cette courbe et de la symétrique par rapport à Ox.

4. Soient x_0, y_0 les coordonnées d'un foyer de la conique (Γ); la directrice correspondante est parallèle à l'une des bissectrices de l'angle xOy, et comme l'excentricité de la conique est égale à $\sqrt{2}$, son équation peut se mettre sous la forme
$$(5) \qquad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - (x + \varepsilon y + \lambda)^2 = 0,$$
ε étant égal à ± 1, ou $\varepsilon^2 = 1$.

Comme, d'autre part, l'équation de la conique Γ s'écrit
$$(A - B)xy - A\beta x + B\alpha y = 0,$$
les deux équations doivent avoir leurs coefficients proportionnels, ce qui nous donne
$$\frac{A - B}{-2\varepsilon} = \frac{-A\beta}{-2x_0 - 2\lambda} = \frac{+B\alpha}{-2y_0 - 2\lambda\varepsilon}, \qquad x_0^2 + y_0^2 - \lambda^2 = 0.$$

Nous en tirons
$$\alpha = \frac{(A - B)(y_0 + \lambda\varepsilon)}{B\varepsilon} = \frac{(A - B)(\varepsilon y_0 + \lambda)}{B},$$
$$\beta = -\frac{(A - B)(x_0 + \lambda)}{A\varepsilon},$$
et en remplaçant α et β par ces valeurs dans la relation $\beta^2 - 2p\alpha = 0$, nous obtenons
$$\frac{(A - B)^2(x_0 + \lambda)^2}{A^2} - 2p\frac{(A - B)(\varepsilon y_0 + \lambda)}{B} = 0$$
ou, en posant $a = \dfrac{2pA^2}{B(A - B)}$,
$$(x_0 + \lambda)^2 - a(\varepsilon y_0 + \lambda) = 0,$$
ou encore
$$x_0^2 + \lambda^2 - a\varepsilon y_0 = \lambda(a - 2x_0).$$

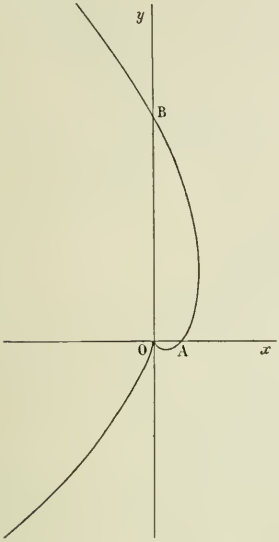
Élevons au carré, nous avons
$$(x_0^2 + \lambda^2 - a\varepsilon y_0)^2 = \lambda^2(a - 2x_0)^2,$$

et remplaçons λ^2 par $x_0^2 + y_0^2$, nous obtenons enfin

$$(2x_0^2 + y_0^2 - a\varepsilon y_0)^2 - (x_0^2 + y_0^2)(2x_0 - a)^2 = 0$$

ou, en supprimant l'indice zéro,

$$(2x^2 + y^2 - a\varepsilon y)^2 - (x^2 + y^2)(2x - a)^2 = 0.$$



Telle est l'équation du lieu. En donnant à ε les deux valeurs ± 1, on obtient les équations de deux courbes symétriques l'une de l'autre par rapport à Ox.

Prenons $\varepsilon = +1$, l'équation de la courbe peut s'écrire en simplifiant

$$y^4 - 2a(y^3 - 2xy^2 + 2x^2y - 2x^3) - a^2x^2 = 0\,;$$

elle représente une courbe du quatrième degré ayant un point de rebroussement à l'origine et des branches paraboliques dans la direction Ox.

Pour la construire, nous poserons $y = tx$; x est alors défini par l'équation

$$t^4x^2 - 2ax(t^3 - 2t^2 + 2t - 2) - a^2 = 0.$$

A toute valeur de t cette équation fait correspondre deux valeurs réelles de x, de signes contraires, et nous pouvons indiquer par le tableau suivant les valeurs remarquables de x.

t	$-\infty$		0		$+\infty$
x_1	0	$-$	$-\infty \mid -\infty$	$-$	0
x_2	0	$+$	$\frac{a}{4}$	$+$	0

La relation $y = tx$ ne suffit pas à déterminer les valeurs de y correspondant à $t = \pm\infty$ et $t = 0$. Pour les calculer, remplaçons dans l'équation précédente x par $\frac{y}{t}$, nous avons

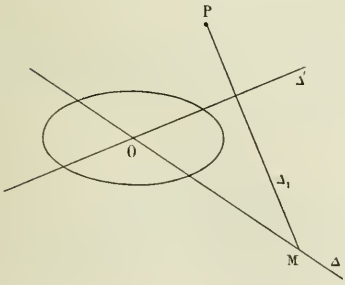
$$t^3y^2 - 2ay(t^3 - 2t^2 + 2t - 2) - a^2t = 0,$$

et nous voyons que pour $t = \pm\infty$ l'une des valeurs de y est nulle, l'autre est égale à $2a$, tandis que, pour $t = 0$, l'une des valeurs de y est infinie et l'autre est nulle.

Ceci nous suffit pour construire la courbe qui a la forme ci-contre.

Le lieu des foyers se compose de cette courbe et de sa symétrique par rapport à Ox.

Remarques géométriques. — Soient Δ et Δ' deux diamètres conjugués de la conique C, Δ_1 la perpendiculaire abaissée du point P sur Δ' et M le point de rencontre de Δ et Δ_1. Il est facile de voir que les droites Δ et Δ_1 décrivent des faisceaux homographiques, car à toute droite Δ correspond une seule droite Δ_1, et inversement ; de plus la relation entre les coefficients angulaires de ces droites est évidemment algébrique.



Donc le lieu du point M est une conique Γ passant par les points O et P. La tangente au point P est la droite du faisceau P homologue de OP, c'est donc la perpendiculaire menée de P au diamètre conjugué de OP. La tangente au point O est le rayon du faisceau O homologue du rayon PO, c'est-à-dire le diamètre conjugué de la perpendiculaire à OP.

Dans le cas général, ces deux tangentes ne coïncident pas avec OP, donc le lieu est une véritable conique.

Pour qu'elle se réduise à deux droites, il faut que OP soit perpendiculaire à son diamètre conjugué, c'est-à-dire que le point P soit sur un axe de la conique C. Nous excluerons ce cas particulier.

Pour que le point M soit à l'infini, il faut que Δ et Δ_1 soient parallèles et pour cela que Δ soit perpendiculaire à Δ'; dans ce cas, Δ et Δ' sont les axes de la conique C. Il en résulte que la conique Γ a des points à l'infini dans les directions des axes de la conique C. Par suite, cette conique est une hyperbole équilatère.

Cherchons les points où elle rencontre C. Soit A l'un des points de rencontre; PA est perpendiculaire à la tangente en A à la conique C; par suite le point A est l'un des pieds des normales issues du point P à la conique C. On en conclut que Γ est l'hyperbole d'Apollonius relative au point P et à la conique C.

Enfin, supposons que le point P décrive une droite D. La conique Γ passera par un point fixe N, intersection de la droite D et du diamètre conjugué (par rapport à C) de la direction perpendiculaire à D.

Le point N sera situé sur la conique C, si PN est normale en N à la conique, c'est-à-dire si la droite D est normale à la conique C.

X., à Agde.

Bonnes solutions par MM. Amblard, conducteur des ponts et chaussées, à Ruines (Cantal); Bros, à Albi; Camille Palazi, école secondaire des Anglais, Lyon — Point du jour.

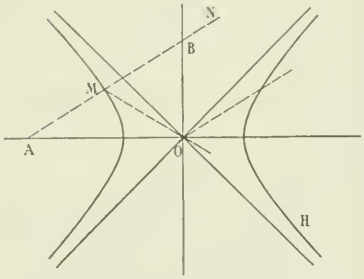
GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1369. — *On considère un point* M *variable sur une hyperbole équilatère* H *de centre* O, *et la parabole tangente à l'axe focal en* O *et ayant pour axe la normale à l'hyperbole au point* M.

Trouver et construire le lieu du foyer de cette parabole.

L'équation de l'hyperbole équilatère rapportée à son centre et à ses axes est

$$x^2 - y^2 - a^2 = 0.$$



La normale MN au point M (α, β) de cette courbe est

$$\frac{x-\alpha}{\alpha} + \frac{y-\beta}{\beta} = 0,$$

ou bien

$$(1) \qquad \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - 2 = 0.$$

Le foyer d'une parabole tangente en O à l'axe focal et admettant comme axe la droite MN est situé à l'intersection de la droite MN et de

$$(2) \qquad \frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta} = 0.$$

La droite (2) est menée par l'origine O dans la direction symétrique de (1) par rapport à l'axe des x.

Le lieu cherché s'obtient donc en éliminant α et β entre (1), (2) et $\alpha^2 - \beta^2 = a^2$.

On a de suite

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = 1.$$

Par conséquent le foyer coïncide avec le point (α, β) et a pour lieu l'hyperbole elle-même.

BROS, à Albi.

Bonnes solutions : MM. Parrod ; Amblard, conducteur des Ponts et Chaussées à Ruines ; A. Darmon, à Alger ; J. Bellon, à Lyon ; G. Foucry, à Boanne ; G. Cotty, à Dijon ; M. Constandaki : H. Janois.

Solution géométrique. — C'est une propriété connue de l'hyperbole équilatère que le point M est le milieu de la portion de normale AB, comprise entre les axes. On sait aussi que le foyer d'une parabole est le

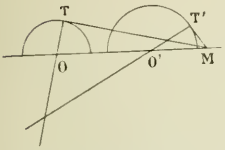
milieu du segment de l'axe compris entre la tangente et la normale en un point. Donc ici le foyer coïncide avec le point M.

E.-N. BARISIEN et CAUCHARD.

Autres solutions géométriques : MM. Parrod ; Amblard ; J. Bellon ; G. Cotty, à Dijon ; H. Janois, à Nantes

---

1373. — *On considère deux demi-cercles* O *et* O′ *tracés du même côté de la ligne des centres. D'un point variable* M *de la ligne des centres on mène la tangente à* O *dont le point de contact est* T *et la tangente à* O′ *dont le point de contact est* T′. *Lieu du point de rencontre des droites* OT *et* OT′. *Construire la courbe dans le cas où les cercles sont égaux et tangents entre eux.*



Prenons pour axe des x la ligne des centres OO′ et pour axe des y une perpendiculaire quelconque à cette droite ; désignons par a et a' les abscisses des points O et O′ et par R et R′ les rayons correspondants.

Les coordonnées du point T sont de la forme $a + R\cos\varphi$ et $R\sin\varphi$; celles du point T′, $a' + R'\cos\varphi'$ et $R'\sin\varphi'$, et les tangentes en ces points ont respectivement pour équations

$$(x-a)\cos\varphi + y\sin\varphi - R = 0,$$
$$(x-a')\cos\varphi' + y\sin\varphi' - R' = 0.$$

Écrivons que ces tangentes rencontrent l'axe Ox au même point ; nous avons

$$(1) \qquad a + \frac{R}{\cos\varphi} = a' + \frac{R'}{\cos\varphi'}.$$

D'autre part, l'équation de la droite OT est

$$(2) \qquad \frac{y}{x-a} = \operatorname{tg}\varphi\,;$$

celle de la droite O′T′ est

$$(3) \qquad \frac{y}{x-a'} = \operatorname{tg}\varphi'.$$

Nous aurons l'équation du lieu en éliminant φ et φ' entre les équations (1), (2) et (3).

Des équations (2) et (3), nous tirons

$$\cos\varphi = \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}, \qquad \cos\varphi' = \frac{x-a'}{\sqrt{(x-a')^2+y^2}},$$

et, en portant ces valeurs dans la relation (1), nous obtenons l'équation du lieu sous forme irrationnelle

$$a + \frac{R\sqrt{(x-a)^2+y^2}}{x-a} = a' + \frac{R'\sqrt{(x-a')^2+y^2}}{x-a'},$$

les radicaux étant précédés de signes quelconques.

Supposons maintenant que les cercles soient égaux et tangents ; nous prendrons pour axe des y la tangente commune. Nous aurons alors $R' = R$, $a = R$, $a' = -R$, et l'équation devient

$$R + \frac{R\sqrt{(x-R)^2+y^2}}{x-R} = -R + \frac{R\sqrt{(x+R)^2+y^2}}{x+R},$$

ou, en chassant les dénominateurs,

$$(x-R)\sqrt{(x+R)^2+y^2} - (x+R)\sqrt{(x-R)^2+y^2} = 2(x^2-R^2).$$

Élevons les deux membres au carré ; nous avons

$$(x-R)^2[(x+R)^2+y^2] + (x+R)^2[(x-R)^2+y^2] - 2(x^2-R^2)\sqrt{(x^2+y^2+R^2+2Rx)(x^2+y^2+R^2-2Rx)}$$
$$= 4(x^2-R^2)^2,$$

ou

$$y^2(x^2+R^2) - (x^2-R^2)^2 = (x^2-R^2)\sqrt{(y^2+x^2+R^2)^2-4R^2x^2},$$

ou, en élevant encore au carré,

$$[y^2(x^2+R^2)-(x^2-R^2)^2]^2=(x^2-R^2)^2[y^4+2y^2(x^2+R^2)+(x^2-R^2)^2].$$

En supprimant le facteur y^2 qui correspond au cas où le point M est le point de contact des deux cercles, il reste pour équation du lieu

$$R^2x^2y^2-(x^2+R^2)(x^2-R^2)^2=0.$$

Cette équation représente une courbe du sixième degré, symétrique par rapport aux deux axes. Pour la construire, nous résoudrons l'équation par rapport à y^2 ; nous avons

$$y^2=\frac{(x^2+R^2)(x^2-R^2)^2}{R^2x^2};$$

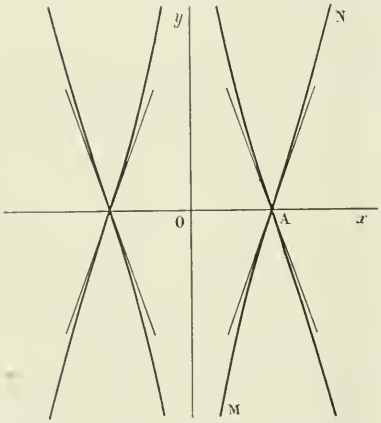
nous en tirons

$$y=\pm\frac{(x^2-R^2)\sqrt{x^2+R^2}}{Rx}.$$

Pour avoir toute la courbe, il suffira de considérer la fonction

$$y=\frac{(x^2-R^2)\sqrt{x^2+R^2}}{Rx},$$

et d'y faire varier x de 0 à $+\infty$. Ayant tracé la courbe correspondant à cette variation, on construira la symétrique de cette courbe par rapport aux deux axes.



La dérivée de y par rapport à x est

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x^4+R^2x^2+R^4}{Rx^2\sqrt{x^2+R^2}},$$

ce qui montre que la fonction y est croissante. Quand x croît de 0 à R, y croît de $-\infty$ à 0, puis quand x croît de R à $+\infty$, y croît de 0 à $+\infty$. On obtient ainsi la branche de courbe MAN; MA est asymptote à Oy et NA est une branche parabolique parallèle à Oy, car le rapport $\frac{y}{x}$ est infini pour x infini.

La forme de cette courbe montre qu'il y a un point d'inflexion. Pour le déterminer, calculons la dérivée seconde de y ; nous avons

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(2x^4+5R^2x^2+2R^4)(x^2-R^2)}{Rx^3(x^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Cette dérivée s'annule pour $x=R$; par suite, le point d'inflexion est le point A. La tangente en ce point a pour coefficient angulaire $2\sqrt{2}$. On achève ensuite aisément la courbe au moyen de la symétrie par rapport aux deux axes.

J. de THY, école des Anglais, Lyon-Point du Jour.

Bonne solution par M. Bros, à Albi.

QUESTIONS PROPOSÉES

1447. — On considère un foyer F d'une ellipse et deux points variables de l'ellipse, M et M', tels que MF et M'F soient parallèles à deux diamètres conjugués. Trouver l'enveloppe de la droite MM'.

E.-N. Barisien.

1448. — Étudier les variations de l'aire du parallélogramme formé par les centres de courbure des quatre extrémités de deux diamètres conjugués.

E.-N. Barisien.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

16e Année. N° 2 Novembre 1905.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

L'ÉNONCÉ EXACT DU THÉORÈME DE ROLLE

par M. **Ch. Michel**, professeur de mathématiques spéciales au lycée de Dijon.

L'énoncé du théorème de Rolle qu'on donne habituellement manque de précision et de généralité ; les conditions qu'on impose à la fonction $f(x)$ sont trop restrictives. Voici sous quelle forme il convient de le présenter :

Si une fonction $f(x)$ est déterminée et admet une dérivée pour toute valeur de x comprise entre deux nombres a et b finis ou infinis, si en outre cette fonction tend vers 0 quand x tend vers a et quand x tend vers b, il existe au moins une valeur de x comprise entre a et b pour laquelle la dérivée est nulle.

En voici la démonstration.

Puisque la fonction $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers a, et aussi quand x tend vers b, étant donné un nombre positif quelconque ε, il est possible de trouver deux nombres finis a_1 et b_1 tels que, pour toute valeur de x comprise entre a et a_1, pour toute valeur de x comprise entre b_1 et b, pour $x = a_1$ et pour $x = b_1$, on ait

$$|f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Les nombres a_1 et b_1 étant ainsi fixés, la fonction $f(x)$ admet une dérivée pour $x = a_1$, pour toute valeur de x comprise entre a_1 et b_1 et pour $x = b_1$. Par conséquent, la fonction $f(x)$ est continue pour toutes ces valeurs de x, et ainsi, l'ensemble des valeurs de $f(x)$ correspondantes admet une limite supérieure M et une limite inférieure m, chacune des valeurs M et m étant atteinte au moins pour une valeur de x.

Deux cas se présentent alors. Ou bien, quel que soit le nombre positif ε, les valeurs absolues de M et m sont inférieures ou au plus égales à ε. Alors, pour toute valeur de x comprise entre a et b, on a

$$|f(x)| \leqslant \varepsilon,$$

et, par suite, $f(x) = 0$. Donc la fonction $f(x)$ est nulle pour toute valeur de x comprise entre a et b ; sa dérivée est nulle elle-même pour toute valeur de x comprise entre a et b, et le théorème est démontré. — Ou bien, il existe au moins une valeur de ε pour laquelle l'une au moins des valeurs absolues de M et m est supérieure à ε. Supposons que ce soit la valeur absolue de M ; si c'était la valeur absolue de m, le raisonnement serait analogue. Il existe au moins une valeur c de x comprise entre a_1 et b_1, pour laquelle on a

$$f(x) = \mathrm{M}.$$

Le nombre c ne peut être ni a_1 ni b_1, car $f(a_1)$ et $f(b_1)$ ont des valeurs absolues inférieures ou au plus égales à ε, tandis que la valeur absolue de $f(c)$ est supérieure à ε. Donc, c est compris entre a_1 et b_1. Cela posé, pour toute valeur de x comprise entre a_1 et b_1, on a

$$f(x) - f(c) \leqslant 0.$$

Supposons que x soit plus petit que c ; alors, on a

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0.$$

Si on fait tendre x vers c par valeurs plus petites que c, le premier membre de la relation précé-

dente tend vers $f'(c)$; donc,

$$f'(c) \geqslant 0.$$

Supposons que x soit plus grand que c; alors, on a

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0.$$

Si on fait tendre x vers c par valeurs plus grandes que c, le premier membre de la relation précédente tend vers $f'(c)$; donc,

$$f'(c) \leqslant 0.$$

Finalement, $f'(c) = 0$. Le théorème est démontré.

Je terminerai par une application du théorème de Rolle ainsi modifié.

Soit la fonction e^{-x^2} qui est déterminée et admet une dérivée pour toute valeur de x. Elle tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$ et aussi quand x tend vers $+\infty$. Donc, sa dérivée s'annule au moins une fois pour une valeur finie de x. Effectivement, cette dérivée a pour expression $-2xe^{-x^2}$ et elle s'annule pour $x = 0$.

SUR UN THÉORÈME D'ANALYSE

par M. **J. Richard**, professeur au lycée de Dijon.

$F(x)$ étant une série ordonnée par rapport aux puissances croissantes de x, et convergente lorsque la valeur absolue de x est inférieure à l, on a la formule

$$F(x+h) = F(x) + \frac{h}{1} F'(x) + \frac{h^2}{1.2} F''(x) + \cdots,$$

le développement étant valable tant que la somme des valeurs absolues de x et de h est inférieure à l, et $F'(x)$, $F''(x)$,... désignant les séries obtenues en prenant les sommes des dérivées successives de chaque terme de $F(x)$.

Ce théorème d'analyse est très utile, car il permet de traiter les séries comme des polynomes. Il n'est pas courant cependant, et cela doit tenir à ce que pour le démontrer on fait usage d'ordinaire des séries à double entrée.

Je me propose de le démontrer sans cela.

Je désignerai par $G(x)$ la série obtenue en remplaçant dans $F(x)$ les coefficients par leurs valeurs absolues, par X la valeur absolue de x, par H celle de h, par k un nombre dont la valeur absolue est plus petite que H, par K la valeur absolue de k, par $F_p(x)$ et $G_p(x)$ les sommes des p premiers termes des séries $F(x)$ et $G(x)$, par $R_p(x)$ et $\rho_p(x)$ les restes correspondants, en sorte que

$$F(x) = F_p(x) + R_p(x),$$
$$G(x) = G_p(x) + \rho_p(x).$$

Si l'on voulait considérer les séries *imaginaires*, on remplacerait partout le mot *valeur absolue* par le mot *module*.

Le signe $|a|$ signifiera, selon l'usage, valeur absolue (ou module) de a.

La série $G(X+H)$ est supposée convergente si $X + H < l$. Prenons p assez grand pour que $\rho_p(X+H) < \varepsilon$, alors $R_p(x+h)$ contenant les mêmes termes que ρ_p *au signe près*, on aura

$$|R_p(x+h)| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |R_p(x)| < \varepsilon.$$

Si l'on développe chaque terme de $G(X+H)$, on voit que tous les termes de $G(X)$, $HG'(X)$, $\frac{H^2}{1.2} G''(x)$, etc., sont contenus dans le développement.

Ces séries sont donc convergentes, et de plus les restes obtenus en s'arrêtant au $p^{ième}$ terme sont tous plus petits que ε.

Il en est de même *a fortiori* pour les séries $F(x)$, $hF'(x)$, $\frac{h^2}{1.2}F''(x)$,..., qui sont formées des mêmes termes que les précédentes, *au signe près*.

Si donc on désigne, comme je l'ai déjà dit, par k un nombre dont la valeur absolue est inférieure à H et par K ladite valeur absolue, $F_p(x+k)$ différera d'abord de $F(x+k)$ d'une quantité inférieure en valeur absolue à ε.

D'autre part,

$$F_p(x) + \frac{k}{1}F'_p(x) + \frac{k^2}{1.2}F''_p(x) + \cdots$$

différera de

$$F(x) + \frac{k}{1}F'(x) + \frac{k^2}{1.2}F''(x) + \cdots$$

d'une quantité moindre que

$$\varepsilon + \frac{K}{H}\varepsilon + \frac{K^2}{H^2}\varepsilon + \cdots,$$

ou que

$$\varepsilon\frac{H}{H-K}, \quad \text{quantité aussi petite qu'on voudra.}$$

La formule

$$(1) \qquad F(x+k) = F(x) + \frac{k}{1}F'(x) + \frac{k^2}{1.2}F''(x) + \cdots$$

est donc telle que son premier membre diffère de moins de ε du premier membre de la formule

$$(2) \qquad F_p(x+k) = F_p(x) + \frac{k}{1}F'_p(x) + \frac{k^2}{1.2}F''_p(x) + \cdots,$$

tandis que son second membre diffère de moins de $\frac{\varepsilon H}{H-K}$ du second membre de la formule (2).

Or, $F_p(x)$ étant un polynome, la formule (2) est vraie. Les deux membres de la formule (1) différant aussi peu qu'on voudra des deux membres de la formule (2), la formule (1) est vraie aussi.

ALGÈBRE

1375. — *Montrer que, dans la méthode d'approximation de Newton, on peut remplacer la limite supérieure que l'on donne habituellement pour l'erreur commise sur la n^{me} valeur approchée,*

$$\frac{(b-a_n)^2M}{2|f'(a_n)|} \quad \textit{par} \quad \frac{(b-a_n)^2M}{2[f(b)-f(a_n)]^2}\cdot\frac{\overline{f(a_n)}^2}{|f'(a_n)|},$$

dans laquelle M *désigne aussi une limite supérieure de la valeur absolue de la dérivée seconde dans l'intervalle* (a, b). *Cette nouvelle expression a l'avantage de tendre vers* 0 *avec* $\frac{1}{n}$.

Soient a et b deux nombres comprenant une seule racine x_0 de l'équation $f(x) = 0$.

Nous supposons que, les conditions connues étant remplies, la méthode de Newton soit applicable au nombre a.

On sait que dans ces conditions l'erreur qui subsiste après l'application de la méthode est plus petite que

$$(1) \qquad \frac{(b-a)^2M}{2|f'(a)|},$$

M étant le maximum de la valeur absolue de $f''(x)$ quand x varie entre a et b.

Appliquons n fois de suite la méthode; soit a_n la valeur obtenue. La racine x_0 est comprise entre a_n et b.

Si nous appliquons à ces deux nombres a_n et b la méthode des parties proportionnelles, nous obtiendrons une valeur

$$(2) \qquad b_n = \frac{bf(a_n) - a_n f(b)}{f(a_n) - f(b)},$$

et la racine x_0 est comprise entre a_n et b_n.

Si donc nous appliquons encore une fois la méthode de Newton au nombre a_n, l'erreur qui subsistera sera plus petite que le nombre obtenu en remplaçant dans l'expression (1) a et b par a_n et b_n.

On trouve ainsi

$$\frac{(b-a_n)^2[f(a_n)]^2 M_n}{2[f(a_n) - f(b)]^2 |f'(a_n)|},$$

M_n étant le maximum de la valeur absolue de $f''(x)$, quand x varie entre a_n et b_n.

D'ailleurs, M_n est au plus égal à M. On peut donc remplacer cette limite par

$$\frac{(b-a_n)^2 M[f(a_n)]^2}{2[f(a_n) - f(b)]^2 |f'(a_n)|},$$

et cette quantité tend vers zéro quand n augmente indéfiniment, puisque a_n ayant pour limite la racine, $f(a_n)$ tend vers zéro.

Bonne solution par M. Parrod.

MÉCANIQUE

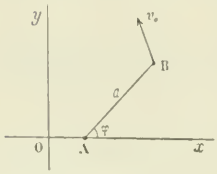
1372. — *On donne deux axes rectangulaires* Ox, Oy. *Une barre rectiligne* AB *de longueur a se meut dans le plan xOy ; le point* A *décrit* Ox *avec la vitesse constante* v_0 *et l'extrémité* B *est animée d'un mouvement uniforme de vitesse* v_0.

1° *Former l'équation de la trajectoire du point* B.

2° *Soit, à l'instant t,* I *le point de rencontre des normales en* A *et* B *aux trajectoires de ces points; écrire l'équation du lieu du point* I.

3° M *étant un point quelconque du plan, invariablement lié à la barre* AB, *démontrer que l'hodographe relative au mouvement de ce point est une circonférence.*

1° Prenons pour origine des coordonnées le point O de Ox où passe le mobile A à l'origine des temps et pour sens positif le sens du déplacement de ce point. Nous aurons $OA = v_0 t$. D'autre part, si nous appelons φ l'angle de AB avec Ox, et a la longueur AB, les coordonnées du point B auront pour expression



$$x = v_0 t + a\cos\varphi.$$
$$y = a\sin\varphi.$$

Les composantes de la vitesse de ce point seront

$$\frac{dx}{dt} = v_0 - a\sin\varphi\,\frac{d\varphi}{dt},$$
$$\frac{dy}{dt} = a\cos\varphi\,\frac{d\varphi}{dt};$$

par suite, la vitesse de B étant v_0, nous aurons, pour déterminer φ,

$$\left(v_0 - a\sin\varphi\,\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + a^2\cos^2\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = v_0^2.$$

Cette équation se décompose en deux : $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, qui donne $\varphi = c^{te}$ et qui correspond au cas où le mouvement de la barre est un mouvement de translation parallèle à Ox ; puis

$$a\frac{d\varphi}{dt} - 2v_0 \sin\varphi = 0,$$

qui donne

$$\frac{d\varphi}{\sin\varphi} = \frac{2v_0}{a}dt.$$

Cette équation s'intègre immédiatement ; en effet, le premier membre peut s'écrire

$$\frac{d\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}} = \frac{\frac{d\varphi}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}}{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}},$$

et l'on a finalement

$$\frac{d\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}} = \frac{2v_0}{a}dt,$$

puis,

$$\mathrm{L}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{2v_0}{a}t + c^{te}$$

Choisissons pour origine des temps l'instant où la barre est perpendiculaire à Ox : la constante sera nulle et nous aurons enfin

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = e^{\frac{2v_0 t}{a}} = e^{\alpha t},$$

en posant

$$\alpha = \frac{2v_0}{a}.$$

Dès lors,

$$\cos\varphi = \frac{1 - e^{2\alpha t}}{1 + e^{2\alpha t}} = -\operatorname{tgh}\alpha t$$

et

$$\sin\varphi = \frac{2e^{\alpha t}}{1 + e^{2\alpha t}} = \frac{1}{\operatorname{ch}\alpha t};$$

les coordonnées du point B en fonction du temps sont donc

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= v_0 t - a\operatorname{tgh}\alpha t,\\ y &= \frac{a}{\operatorname{ch}\alpha t}.\end{aligned}\right.$$

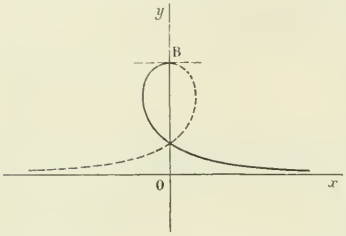
Ce sont là les équations paramétriques du lieu de B.

Pour construire ce lieu, nous remarquons que le changement de t en $-t$ change simplement le signe de x et n'altère pas y ; la courbe est donc symétrique par rapport à Oy, et pour en avoir une moitié, il suffit de faire varier t de 0 à $+\infty$. Nous voyons de suite que dans cet intervalle y décroît depuis a jusqu'à 0. La dérivée de x est

$$\frac{dx}{dt} = v_0 - \frac{a\alpha}{\operatorname{ch}^2\alpha t} = v_0\frac{\operatorname{ch}^2\alpha t - 2}{\operatorname{ch}^2\alpha t};$$

elle est négative jusqu'à la valeur t_0 de t pour laquelle $\operatorname{ch}\alpha t = \sqrt{2}$, et positive ensuite. Soit t_0 cette valeur ; x est nul pour $t = 0$, négatif et décroissant depuis $t = 0$ jusqu'à $t = t_0$; pour $t = t_0$, il passe par un minimum, puis croît constamment ensuite ; pour $t = +\infty$, il est égal à $+\infty$: il s'annule donc une nouvelle fois pour une certaine valeur t_1 plus grande que t_0.

En remarquant en outre qu'au départ, pour $t = 0$, la dérivée de y est nulle, on a tout ce qu'il faut pour donner la forme de la courbe.



Si on veut l'équation cartésienne de ce lieu, on tirera t de la seconde équation et on le portera dans la première. On aura ainsi successivement

$$\alpha t = \arg \operatorname{ch} \frac{a}{y}, \qquad t = \frac{1}{\alpha} \arg \operatorname{ch} \frac{a}{y},$$

puis

$$x = \frac{a}{2} \arg \operatorname{ch} \frac{a}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}.$$

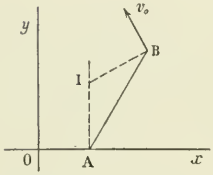
On trouve d'ailleurs aisément que

$$\arg \operatorname{ch} \frac{a}{y} = \mathrm{L}\left(\frac{a}{y} + \sqrt{\frac{a^2}{y^2} - 1}\right);$$

par conséquent, l'équation cartésienne est finalement

$$(2) \qquad x = \frac{a}{2} \mathrm{L}\left(\frac{a}{y} + \sqrt{\frac{a^2}{y^2} - 1}\right) - \sqrt{a^2 - y^2}.$$

2. Les coordonnées du point I s'obtiennent immédiatement en cherchant le point de rencontre des normales en A et en B, tel qu'il est indiqué dans l'énoncé. La normale en A a pour équation $X = v_0 t$; la normale en B,



$$(X - x)x' + (Y - y)y' = 0;$$

la première donne l'X du point I, la seconde donne l'Y. Si nous revenons aux valeurs initiales de x, y, x', y' et que nous remplacions X par $v_0 t$ dans la seconde équation, celle-ci devient

$$-a \cos \varphi \left(v_0 - a \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt}\right) + (Y - a \sin \varphi)\, a \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} = 0$$

et donne

$$Y = \frac{v_0}{\frac{d\varphi}{dt}};$$

mais

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2v_0}{a} \sin \varphi \qquad \text{et} \qquad \sin \varphi = \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha t};$$

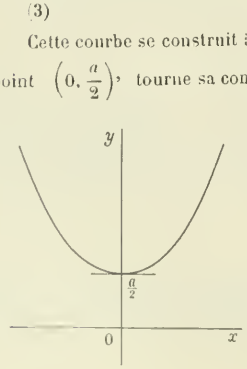
donc finalement

$$Y = \frac{a}{2} \operatorname{ch} \alpha t.$$

Le lieu du point I a donc pour équations paramétriques

$$(3) \qquad x = v_0 t, \qquad y = \frac{a}{2} \operatorname{ch} \alpha t.$$

Cette courbe se construit à vue : elle est symétrique par rapport à Oy, admet pour sommet le point $\left(0, \frac{a}{2}\right)$, tourne sa concavité vers les y positives et se compose de deux arcs infinis et paraboliques dans la direction Oy.



3. Si nous appelons a_1 et b_1 les coordonnées du point M par rapport à l'axe AB et à l'axe perpendiculaire mené par le point A, les coordonnées du point M dans le système Ox, Oy seront

$$x = v_0 t + a_1 \cos \varphi - b_1 \sin \varphi,$$
$$y = a_1 \sin \varphi + b_1 \cos \varphi;$$

par conséquent, les composantes de la vitesse auront pour expressions

$$x' = v_0 - (a_1 \sin \varphi + b_1 \cos \varphi) \frac{d\varphi}{dt},$$

$$y' = (a_1 \cos \varphi - b_1 \sin \varphi) \frac{d\varphi}{dt}.$$

Remplaçons dans les seconds membres $\frac{d\varphi}{dt}$ par $\frac{2v_0}{a}\sin\varphi$, puis $\sin\varphi\cos\varphi$ par $\frac{\sin 2\varphi}{2}$, $\cos^2\varphi$ et $\sin^2\varphi$ par $\frac{1+\cos 2\varphi}{2}$ et $\frac{1-\cos 2\varphi}{2}$; nous aurons successivement

$$x' = v_0 - \frac{2v_0}{a}(a_1\sin^2\varphi + b_1\sin\varphi\cos\varphi),$$

$$y' = \frac{2v_0}{a}(a_1\sin\varphi\cos\varphi - b_1\sin^2\varphi),$$

et

$$x' = v_0 - \frac{v_0}{a}[a_1(1-\cos 2\varphi) + b_1\sin 2\varphi],$$

$$y' = \frac{v_0}{a}[a_1\sin 2\varphi - b_1(1-\cos 2\varphi)];$$

finalement

$$x' - v_0 + \frac{v_0 a_1}{a} = \frac{v_0}{a}(a_1\cos 2\varphi - b_1\sin 2\varphi),$$

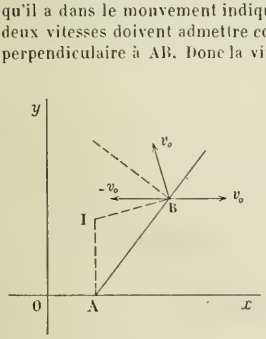
$$y' + \frac{b_1 v_0}{a} = \frac{v_0}{a}(a_1\sin 2\varphi + b_1\cos 2\varphi).$$

En élevant au carré et ajoutant, nous obtenons

$$(4)\qquad \left(x' - v_0 + \frac{a_1 v_0}{a}\right)^2 + \left(y' + \frac{b_1 v_0}{a}\right)^2 = \frac{v_0^2}{a^2}(a_1^2 + b_1^2),$$

ce qui montre bien que le point (x', y') décrit un cercle.

Remarques géométriques. — Le mouvement peut être envisagé comme résultant de deux mouvements : d'un mouvement d'entraînement de la barre, parallèle à Ox et avec la vitesse constante v_0 pour chaque point de cette barre ; puis d'un mouvement de rotation de la barre autour du point A. Pour obtenir la vitesse du point B dans ce mouvement de rotation, imaginons qu'on imprime à tout le système un mouvement de translation additif, parallèle à Ox et de vitesse égale à $-v_0$; le point A sera alors immobile et tout se réduira au mouvement de rotation autour de A. Le point B est alors animé de deux vitesses : la vitesse inconnue v_0 qu'il a dans le mouvement indiqué et la vitesse $-v_0$, parallèle à Ox, et que nous venons de lui imprimer. Ces deux vitesses doivent admettre comme résultante la vitesse de rotation autour de A, c'est-à-dire une vitesse perpendiculaire à AB. Donc la vitesse cherchée v_0 est symétrique de $-v_0$ par rapport à une perpendiculaire à AB, ou enfin, symétrique de la vitesse v_0, parallèle à Ox, par rapport à AB. Cette remarque très simple permet d'obtenir immédiatement les composantes de la vitesse du point B et, par suite, les coordonnées de B.



La perpendiculaire BI au point B à la vitesse de B, Bv_0, est symétrique de la perpendiculaire à Ox menée par le même point ; donc les angles à la base du triangle IAB sont égaux et ce triangle est isocèle. Ceci donne un moyen très simple de construire le point I et de calculer ses coordonnées.

La vitesse du point B dans le mouvement de rotation est la résultante de deux vitesses ; l'une, constante en grandeur et de direction variable Bv_0 ; l'autre, $-v_0$, parallèle à Ox. L'hodographe relative à la première est le cercle ayant pour centre le point O et pour rayon v_0. L'hodographe relative à la vitesse totale est donc ce cercle auquel on imprime la translation $-v_0$ parallèle à Ox. Soit C ce nouveau cercle. L'hodographe d'un point quelconque de AB situé à la distance r du point A est donc l'homothétique de C, par rapport à O, et dans le rapport $\frac{r}{a}$. Soit C_1 ce cercle. Si on prend un point M invariablement lié à AB et à la distance r du point A, sa vitesse sera la même que celle du point précédent, mais elle fera avec celle-ci un angle constant θ égal à l'angle de AM avec AB. L'hodographe de ce point dans le mouvement de rotation s'obtient donc en faisant tourner le cercle C_1 de l'angle θ autour de A. Soit C_2 le nouveau cercle ainsi obtenu. Il suffit maintenant de lui faire subir une

translation parallèle à Ox et d'amplitude v_0 pour avoir l'hodographe de M. On voit donc bien que cette hodographe est un cercle.

Bonnes solutions : MM. Amblard, conducteur des ponts et chaussées à Ruines ; Pardon ; M. Laurence ; G. Pélissier, lycée de Toulouse : Quémeneur, lycée de Rouen : M. Grangier, à Monbydier : G. Cotty, à Dijon.

PHYSIQUE

1283. — *Un voyageur pesant* 70^{kg} *et de chaleur spécifique égale à l'unité gravit une montagne en s'élevant de* 600^{m} *en une heure dans un air sec à* 0° *et à la pression moyenne de* 700^{mm}. *Il fait* 18 *inspirations par minute et rejette à chaque expiration* 1^{lit} *d'air. Cet air expiré est à la température du corps* (38° *en moyenne*), *et à moitié saturé de vapeur d'eau* (*densité :* $\frac{5}{8}$, *pression maxima à* 38° : 50^{mm}) ; *il renferme* 4 *pour* 100 *en volume de gaz carbonique* (*densité :* 1,53). *On admettra que la formation de ces deux corps a produit la même chaleur que si elle avait eu lieu par combustion d'hydrogène et de carbone libres. Chaleur de formation de l'eau :* 59^{cal} ; *du gaz carbonique :* 94^{cal}. *Enfin, pour le calcul de l'échange de chaleur résultant de la différence des températures de l'air inspiré et de l'air expiré, on négligera leur différence de masse et de composition. Chaleur spécifique de l'air :* 0,237.

De combien varierait, en une heure, la température du voyageur si ses vêtements le protégeaient contre tout échange de chaleur avec le milieu extérieur? On négligera toute production d'énergie étrangère aux phénomènes mentionnés.

Masse spécifique de l'air à 38° *et sous la pression d'un millimètre :* 0,0000015.

1. Le travail accompli par le voyageur est de 70×600 kilogrammètres, et le nombre de grandes calories équivalentes est $\frac{70 \times 600}{426} = 98{,}6$.

2. La vapeur d'eau produite en une heure représente 60 fois 18 litres à 38° et sous une pression égale à la moitié de la pression maxima. Sa masse en kilogrammes est égale à

$$60 \times 18 \times \frac{5}{8} \times \frac{1}{773} \times \frac{25}{760} \times \frac{1}{1 + \frac{38}{273}} = 60 \times 18 \times \frac{5}{8} \times 0{,}0000015 \times 25 = 0{,}02531$$

et représente un nombre de molécules-grammes égal à

$$\frac{25{,}31}{18} = 1{,}406.$$

La chaleur dégagée par la formation de cette eau est donc, en grandes calories,

$$1{,}406 \times 59 = 83.$$

3. Le gaz carbonique exhalé est à une pression égale aux $\frac{4}{100}$ de la pression totale de 700^{mm}. Sa masse est donc

$$60 \times 18 \times 1{,}53 \times \frac{4}{100} \times 700 \times 0{,}0000015 = 0^{kg}{,}0694$$

et représente un nombre de molécules-grammes égal à

$$\frac{69{,}4}{44} = 1{,}578.$$

La chaleur dégagée par la formation de ce gaz carbonique est donc

$$1{,}578 \times 94 = 148{,}3.$$

4. Enfin, l'air qui entre à 0° et sort à 38° emporte une quantité de chaleur

$$60 \times 18 \times 700 \times 0{,}0000015 \times 0{,}237 \times 38 = 10{,}2.$$

Les phénomènes chimiques ont donc produit $83 + 148,3 = 231,3$ calories.

Sur cette quantité de chaleur, 98,6 calories ont été transformées en travail et 10,2 ont échauffé l'air expiré. La différence $231,3 - 98,6 - 10,2 = 122,7$ a été employée à élever la température du corps du voyageur, dont la capacité caloritique est de 70^{kg}. L'élévation de température cherchée est donc

$$\frac{122,7}{70} = 1^{\circ},75.$$

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1905, *fin*)

IV. — Géométrie analytique à trois dimensions.

4709. — D'un point P (x_0, y_0, z_0) on abaisse une perpendiculaire PM sur la droite $\frac{x-a}{\alpha} = \frac{y-b}{\beta} = \frac{z-c}{\gamma}$. Calculer les projections du segment PM sur les trois axes de coordonnées.

4710. — Soient les deux droites $\frac{x-a}{\alpha} = \frac{y-b}{\beta} = \frac{z-c}{\gamma}$, $\frac{x-a'}{\alpha'} = \frac{y-b'}{\beta'} = \frac{z-c'}{\gamma'}$, α, β, γ et α', β', γ' étant les cosinus directeurs. Déterminer les équations de la perpendiculaire commune aux deux droites, leur plus courte distance et les points où la perpendiculaire commune rencontre les deux droites. Peut-on déterminer a, b, c, a', b', c' en sorte que la droite joignant les deux points (a, b, c) et (a', b', c') soit la perpendiculaire commune aux deux droites ?

4711. — Étant donné un nombre quelconque de droites dans l'espace, montrer que par une transformation convenable de coordonnées on peut toujours faire en sorte que $\Sigma ab = 0$, $\Sigma bc = 0$, ... (a, b, c), (a', b', c'), ... étant les cosinus directeurs des droites.

4712. — Lieu des points tels que la somme des carrés de leurs distances à des plans fixes soit constante.

4713. — Symétrique d'un point par rapport à un plan ou par rapport à une droite.

4714. — On donne trois droites passant par l'origine, OA, OB, OC et ayant respectivement pour cosinus directeurs (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ et $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$. Établir analytiquement la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique.

4715. — Trouver l'équation du plan tangent au point (x_0, y_0, z_0) à la surface $f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$. Montrer que ce plan passe par l'origine et qu'il est le même tout le long d'une génératrice.

4716. — On considère une hélice circulaire tracée sur un cylindre de révolution d'axe Oz. On demande la trace sur le plan des xy d'un cylindre passant par l'hélice et dont les génératrices ont une direction donnée.

4717. — Trouver les foyers de la conique définie par les équations $x + y + z + 1 = 0$, $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 1 = 0$.

4718. — Lieu du point M tel que la somme des carrés des distances de ce point à m droites fixes soit constante.

4719. — Trouver le plan osculateur en un point de la courbe

$$x = \frac{a^2 x_0}{a^2 + \rho}, \qquad y = \frac{b^2 y_0}{b^2 + \rho}, \qquad z = \frac{c^2 z_0}{c^2 + \rho},$$

ρ désignant un paramètre variable.

4720. — Tangente en un point de la courbe $x = az^m$, $y = bz^n$. Calculer la longueur d'un arc.

4721. — On considère la surface de révolution d'axe Oz et dont la méridienne dans le plan des xz a pour équation $x = a(t - \sin t)$, $z = a(1 - \cos t)$, $y = 0$. Trouver l'équation de la surface. Courbe de contact du cylindre circonscrit parallèlement à la direction qui a pour paramètres directeurs l, m, n. Projection de cette courbe sur le plan des xy.

4722. — Rayon de courbure de l'hélice circulaire. Quelle est l'indicatrice sphérique des tangentes ? Ne peut-elle être considérée comme une holographie ?

4723. — Trouver les coordonnées des centres de similitude des deux sphères

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 - R^2 = 0, \qquad (x-\alpha')^2 + (y-\beta')^2 + (z-\gamma')^2 - R'^2 = 0.$$

4724 — Lieu engendré par les normales menées des points d'une droite à une ellipse non située dans un même plan avec la droite. Cas où la droite passe par le centre de l'ellipse.

4725. — Trouver l'équation du cylindre ayant pour directrice le cercle $x^2 + y^2 - R^2 = 0$, $z = 0$ et dont les génératrices sont parallèles à la droite $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$. Section de ce cylindre par le plan $y = 0$. Écrire que cette section est semblable à une conique donnée.

4726. — Équation de la surface de révolution engendrée par la courbe $y = 0$, $z = \varphi(x)$ tournant autour de Oz. Démontrer que la normale en un point quelconque rencontre l'axe.

4727. — Équation générale des cônes de révolution ayant pour axe la droite $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$.

4728. — Lieu des sommets des cônes passant par une ellipse donnée et qui sont coupés par un plan suivant un cercle.

4729. — Volume engendré par une cycloïde tournant autour de sa base.

4730. — Trouver l'équation aux dérivées partielles des cônes ayant pour sommet l'origine. Interpréter géométriquement cette équation.

4731. — On considère la surface engendrée par la courbe $y = 0$, $x = \operatorname{tg} z$ tournant autour de Oz. Déterminer la courbe de contact du cylindre circonscrit à cette surface et parallèle à la direction $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$.

4732. — Soient p, q, r les longueurs des normales menées d'un point M à trois surfaces données. Si p, q, r vérifient une relation $f(p, q, r) = 0$, le point M décrit une surface S. Déterminer la normale au point M à la surface S et interpréter le résultat géométriquement.

4733. — On considère une hélice circulaire décrite sur un cylindre de révolution tangent suivant Oz au plan des yz et on fait tourner cette hélice autour de Oz. Trouver la surface engendrée, et la section de cette surface par le plan des zx.

4734. — Équation du conoïde engendré par des droites rencontrant une hélice circulaire et coupant son axe à angle droit. Section de la surface par un cylindre de révolution passant par l'axe de l'hélice.

4735. — Dans le plan des xy on donne la conique $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + D = 0$, et sur Oz on considère deux points M et M'. Par le point M on mène une droite Δ parallèle à Ox et par M une droite Δ' parallèle à Oy. Trouver le lieu d'une droite assujettie à rencontrer la conique et les droites Δ et Δ'. La surface obtenue peut-elle se décomposer ?

4736. — On donne trois droites

$$\Delta \begin{cases} y = a, \\ z = b, \end{cases} \qquad \Delta' \begin{cases} z = a', \\ x = b', \end{cases} \qquad \Delta'' \begin{cases} x = a'', \\ y = b''; \end{cases}$$

trouver le lieu engendré par une droite variable qui rencontre Δ, Δ', Δ''.

4737. — Lieu engendré par une droite parallèle au plan des xy, rencontrant Oz et tangente à une sphère ayant son centre sur Ox.

4738. — Soient M et M' deux points infiniment voisins d'une courbe gauche ; démontrer que la distance du point M' au plan osculateur en M est un infiniment petit du troisième ordre par rapport à MM'.

4739. — Équation du tore d'axe Oz engendré par une circonférence située dans le plan xOz. On coupe ce tore par un plan bitangent ; trouver l'équation de la section rapportée à deux axes du plan sécant.

4740. — Équations de l'hélice circulaire. Plan osculateur. Normale principale. Rayon de courbure.

4741. — On éclaire un tore par des rayons lumineux parallèles ; démontrer *analytiquement* que la projection de la courbe d'ombre sur un plan perpendiculaire à l'axe est une conchoïde d'ellipse.

4742. — On considère les deux quadriques

$$x^2 + y^2 + 4zx - 8x = 0, \qquad x^2 + y^2 - 2yz + by = 0.$$

Trouver la projection de leur intersection sur le plan des xy et construire la courbe obtenue.

4743. — Lieu d'une droite s'appuyant sur Oz, sur l'ellipse $x = \alpha$, $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$, et qui reste parallèle au plan des xy. Volume compris entre Oz et le plan de l'ellipse.

4744. — Équation du cône ayant pour sommet le point (x_0, y_0, z_0) et pour base l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, $z = 0$. Condition pour que ce cône soit de révolution.

4745. — On considère le cylindre $(2x - y)(2x^2 - y^2) + x^2 - y^2 = 0$ qui contient la génératrice Oz. Plan tangent le long de cette génératrice.

4746. — Étudier la surface $\frac{x^2}{a^2 - z^2} + \frac{y^2}{b^2 - z^2} = \frac{z^2}{c^2}$ $(a > b)$. Section par des plans parallèles au plan des xy. Volume compris entre les plans $z = 0$ et $z = b$.

Même question pour la surface $\frac{x^2}{a^2 - z^2} + \frac{y^2}{b^2 - z^2} = \frac{z}{c}$.

4747. — Que représentent les équations $x = \frac{2}{3} z^3$, $y = z^2$. Arc de cette courbe. Montrer que la tangente fait un angle constant avec une direction fixe.

4748. — Volume engendré par la conique $4x^2 + 2xy - y^2 - 2ay = 0$ tournant autour de Oy.

4749. — Soit M un point de la courbe $x = \frac{2}{3} z^3$, $y = z^2$. Le plan osculateur en ce point rencontre Oz en un point N. Lieu de la droite MN. Pourrait-on donner au point M sur la courbe un mouvement tel que l'accélération soit constamment placée sur la droite MN ?

4750. — Équation du cône de sommet (x_0, y_0, z_0) et circonscrit à la sphère $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$. Lieu du point (x_0, y_0, z_0) pour que la trace du cône sur le plan des xy soit une conique de surface donnée.

4751. — On donne la courbe définie par les équations

$$x = q' \cos\theta - q'' \sin\theta, \qquad y = q' \sin\theta + q'' \cos\theta, \qquad z = (q + q'') \operatorname{cotg} \alpha,$$

où q est une fonction de θ et α une constante. Nature de cette courbe. Longueur d'un arc. Projection sur le plan des xy. Tangente.

4752. — Lieu du sommet d'un cône ayant pour base une ellipse donnée et qui est coupé par un plan donné suivant une parabole.

4753. — Plan normal en un point d'une courbe gauche. Si ce plan passe par un point fixe, que peut-on dire de la courbe ?

4754. — Trouver les centres de la surface $a \cos x + b \cos y + c \cos z + d = 0$.

4755. — Une surface de révolution à axe vertical définie par une méridienne est limitée par deux plans horizontaux. Trouver la forme de la méridienne pour que la pression exercée dans ce solide sur chaque section horizontale soit proportionnelle à l'aire de la section.

4756. — On donne trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, et on considère deux ellipses : une dans le plan des xy ayant pour axes Ox et Oy, l'autre dans le plan des xz ayant pour axes Ox et Oz. Ces deux ellipses peuvent-elles admettre une infinité de normales communes ?

4757. — Lieu des points de l'espace tels que le rapport de leurs distances à un point fixe et à une droite fixe soit constant.

4758. — Une droite dont n points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ peuvent être assujettis à décrire n surfaces contient un autre point A dont on demande le lieu. Quel doit être le nombre n pour que le point A décrive une courbe. Si $n = 4$, montrer que les plans normaux aux trajectoires des divers points de la droite passent par une droite fixe.

4759. — Asymptotes de la courbe définie par les équations

$$x = \frac{1}{t^2 - 1}, \qquad y = \frac{1}{t(t+1)}, \qquad z = \frac{t^2}{t^2 - 1}.$$

4760. — Une droite se déplace dans l'espace de façon que tous ses points décrivent des courbes. Démontrer qu'à chaque instant tous les plans normaux aux diverses trajectoires passent par une même droite.

4761. — Étudier la surface $z = \dfrac{axy}{x^2 + y^2}$. Démontrer qu'un cylindre de révolution passant par Oz coupe cette surface suivant une conique. Trouver le plan de cette conique.

4762. — Par le point (x_0, y_0, z_0) mener des plans normaux à la courbe $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$, $z = \psi(t)$.

4763. — On considère une droite telle qu'un certain nombre de surfaces déterminent sur la droite des segments de longueurs constantes. Combien faut-il de surfaces pour que la droite soit déterminée ? Lieu d'un point de la droite lorsque le nombre des surfaces données est inférieur d'une ou de deux unités au nombre trouvé.

4764. — Trouver les lignes d'égale pente sur un cône de révolution à axe vertical.

4765. — Étudier les quadriques :

$x^2 + y^2 + 2yz + 4z^2 + 2z - 2y + 1 = 0$ (transporter l'origine au centre) : $x^2 + 4y^2 - 9z^2 + 4xy - 4x = 0$ (réduction) :

$2ayz + 2bzx + 2cxy = 1$; $x^2 + 6xy + 9y^2 + 5xz + 4x - \lambda = 0$; $x^2 - y^2 + 2zx - 5y + 2z = 0$;

$x^2 - 2yz = 0$; $x^2 + 2xy - 3y^2 - zx + yz + 3z - y = 0$ (lieu des projections de l'origine sur les génératrices) ;

$(y - z)^2 + (z - x)^2 + (x - y)^2 = 1$ (rayon de ce cylindre) ;

$x^2 + 2xy - 3y^2 - zx + yz + 3z - y = 0$ (cône circonscrit de sommet O) ; $z^2 + xz - yz + 3x - 2y + 1 = 0$;

$(y - z)^2 + (z - x)^2 + (x - y)^2 + (x + y + z)^2 = 1$; $x^2 + 2xy + 4yz - 2x = 0$ (génératrices qui passent par l'origine) :

$x^2 + y^2 + z^2 - 2yz = 1$ (éléments de la section droite) : $xy - z - 3 = 0$ (sommet) :

$x^2 + xz + yz - y^2 + 2x - 2y = 1$ (génératrices) ; $x^2 + 4y^2 + z^2 - 4yz - 2zx + 4xy + 2x + 4y - 2z + 1 + a = 0$;

$x^2 + 2xy - y^2 + z^2 - 2yz + 2x - 4y = \lambda$; $4x^2 + 3xy - 5y^2 + 8yz - 5x + 3 = 0$;

$6x^2 + \dfrac{3}{2}y^2 + \dfrac{2}{3}z^2 + 2yz + 4zx + 6xy = 1$; $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 12yz + 6zx - 4xy - 6x + 4y - 6z = 0$;

$yz + zx + xy - a^2 = 0$ (méridienne).

4766. — Équation d'un ellipsoïde de grandeur donnée et ayant pour centre le point (x_0, y_0, z_0).

4767. — Trouver les génératrices rectilignes de la quadrique $x^2 + 4y^2 - 6yz + 8z = 0$. Lieu des points de rencontre des génératrices rectangulaires.

4768. — Même question pour la surface $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$. Incidemment, qu'est-ce que la sphère de Monge ?

4769. — De la discussion des équations du centre, déduire les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation générale du deuxième degré à trois variables représente un cylindre.

4770. — Placer sur un ellipsoïde une ellipse de grandeur donnée.

4771. — Trouver l'équation du cône ayant pour sommet le point (x_0, y_0, z_0) et pour base la conique $z = 0$, $xy - k^2 = 0$. Trouver les axes de ce cône.

4772. — Trouver le volume d'un tonneau en l'assimilant à un ellipsoïde de révolution. On donne la hauteur h, les rayons des bases et le rayon de la section médiane.

4773. — Montrer que la surface $\dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} - 2z = 0$ est unicursale. Exprimer les coordonnées d'un point en fonction rationnelle de deux paramètres. Si un point décrit un section plane, quelle sera la relation qui reliera les paramètres ?

4774. — On considère dans le plan des xy un carré ABCO, le point A étant à l'origine, B sur Ox et C sur Oy. Sur les parallèles à Oz menées par les points A, B, C, D, on prend des points A', B', C', D' définis par leurs cotes. On demande l'équation du paraboloïde engendré par une droite rencontrant les droites AB', CD' et restant parallèle au plan des yz.

4775. — Lieu des sommets des sections faites dans un ellipsoïde par des plans passant par un diamètre de l'ellipsoïde.

4776. — On donne une quadrique $f(x, y, z) = 0$, et un plan $ux + vy + wz = 0$; trouver les points de la section où le plan est normal à la surface.

4777. — Existe-t-il une normale commune à deux quadriques ?

4778. — Lieu des droites tangentes à deux quadriques.

4779. — On considère le paraboloïde $xy - az = 0$. Équations des génératrices. On considère deux génératrices qui se rencontrent. Peuvent-elles être rectangulaires ? Lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point de l'espace sur la génératrice du paraboloïde.

4780. — Équation du cylindre circonscrit à l'ellipsoïde $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, et dont les génératrices sont parallèles à la droite $\dfrac{x}{l} = \dfrac{y}{m} = \dfrac{z}{n}$. Trace du cylindre sur le plan des xy. Axes de cette ellipse. Écrire que cette ellipse est semblable à une ellipse donnée.

4781. — Condition pour que le plan $lx + my + nz + p = 0$ soit tangent à l'ellipsoïde $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$.

Si l, m, n sont les cosinus directeurs du plan, que signifie la condition trouvée ? Comme application, trouver le lieu du centre d'un ellipsoïde de grandeur constante assujetti à toucher trois plans fixes.

4782. — Lieu des sommets de la quadrique $2ayz + 2bzx + 2cxy = 1$, sachant que a, b, c sont liés par les relations $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, $abc = k^2$.

4783. — Combien y a-t-il de normales à l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ situées dans un plan quelconque $ux + vy + wz + r = 0$?

4784. — Calculer le volume d'un ellipsoïde.

4785. — On considère la surface engendrée par la droite variable $\frac{x}{a} = \cos\varphi + \frac{z}{c}\sin\varphi$, $\frac{y}{b} = \sin\varphi - \frac{z}{c}\cos\varphi$, où φ est un paramètre. Cette surface admet-elle un autre système de génératrices ?

4786. — On considère l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$; lieu des pieds des normales issues des divers points de la droite $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$. Dans quel cas le lieu se réduit-il à deux coniques ?

4787. — Enveloppe des sphères ayant leurs centres sur un paraboloïde elliptique et passant par les foyers des sections principales.

4788. — On donne un paraboloïde hyperbolique équilatère, une ellipse dans un de ses plans directeurs et une tangente à cette ellipse. On considère une génératrice du paraboloïde perpendiculaire à cette tangente. Lieu de la perpendiculaire commune à ces deux droites.

4789. — On donne un ellipsoïde et un point extérieur. Trouver le lieu des pieds des normales issues de ce point aux sections de l'ellipsoïde par des plans passant par un de ses axes.

4790. — Calculer le volume compris entre la surface $z = xy$, le plan des xy, un plan parallèle et le plan $x + y + k = 0$.

4791. — Plans conjugués par rapport à un paraboloïde hyperbolique. Qu'arrive-t-il si l'un des plans est tangent, ou si l'un des plans est un plan directeur ?

4792. — Lieu des points d'un paraboloïde hyperbolique où les génératrices font un angle donné.

4793. — Les génératrices d'un hyperboloïde déterminent sur deux sections planes des points qui se correspondent homographiquement. Réciproque. Cas de deux sections circulaires.

4794. — On donne deux droites D et D'. Par la droite D on mène un plan quelconque P, puis par la droite D' un plan P' perpendiculaire au plan P. Lieu de la droite intersection des plans P et P'.

4795. — Un point M de la quadrique PQ = RS est déterminé par les équations

$$\begin{cases} P = \lambda R, \\ Q = \frac{1}{\lambda} S, \end{cases} \qquad \begin{cases} P = \mu S, \\ Q = \frac{1}{\mu} R. \end{cases}$$

Quelle relation doit-il y avoir entre λ et μ pour que M décrive une conique ?

4796. — La normale en un point M de l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ rencontre le plan des xy en P et le plan des xz en Q. Par le centre O on mène un vecteur équipollent à PQ, soit OR. Lieu du point R quand le point M décrit l'ellipsoïde.

4797. — Relation homographique entre deux points qui parcourent deux droites de l'espace. Quel est le lieu de la droite joignant deux points homologues ? Réciproque.

4798. — Lieu du milieu des cordes d'un ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ passant par le point (x_0, y_0, z_0).

4799. — Lieu des axes de la quadrique $\lambda yz + \mu zx + \nu xy = 1$ quand on a $\lambda + \mu + \nu = 0$.

4800. — Lieu des points de la surface $x^2 - 4y^2 - 2z = 0$ par où passent deux génératrices rectangulaires.

V. — Géométrie Descriptive.

4801. — On donne une droite D et deux points A et B : trouver l'angle des deux plans définis par la droite D et chacun des points A et B.

4802. — Perpendiculaire commune à une droite quelconque et à une droite du deuxième bissecteur.

4803. — On donne les projections de trois points : trouver les projections du cercle passant par ces trois points. Axes de la projection horizontale.

4804. — Même question en supposant les points définis par leurs projections horizontales et leurs cotes.

4805. — On donne deux plans parallèles P et Q définis par leurs traces horizontales et leurs angles avec le plan horizontal, un point m sur la trace du plan P et la ligne de plus grande pente mn de ce plan. Construire le parallélépipède admettant les plans P et Q pour plans de deux de ses faces, le plan horizontal pour plan d'une autre face, le point m pour sommet et la droite mn pour arête. On suppose connues les longueurs des arêtes. Visibilité.

4806. — Faire tourner deux droites quelconques autour d'un axe de façon que leurs projections horizontales deviennent parallèles.

4807. — Section d'un parallélépipède par un plan parallèle au deuxième bissecteur et passant par un point d'une arête.

4808. — Projection cotée d'un cube dont une diagonale est verticale. Section par un plan horizontal de cote donnée.

4809. — Construire la perpendiculaire commune à deux arêtes opposées d'un tétraèdre dont on donne les longueurs des six arêtes.

4810. — Dans un plan incliné à 45° sur le plan horizontal, on donne un hexagone régulier dont deux côtés opposés sont horizontaux et donnés par leurs projections. Faire la projection cotée de cet hexagone.

4811. — Représenter un tétraèdre régulier qui a deux arêtes opposées horizontales sachant que l'on donne la longueur de l'arête.

4812. — On donne un plan défini par un point (a, a') et une droite (D, D'). Reconnaître si un point donné (b, b') est au-dessus ou au-dessous du plan.

4813. — On donne un tétraèdre solide et l'on demande de construire avec la règle et le compas la distance du centre de gravité à l'une des bases.

4814. — Intersection d'une droite et d'une pyramide ayant pour base un quadrilatère dans le plan horizontal. Ponctuer la droite.

4815. — On donne une droite cotée et un point. Trouver l'échelle de pente du plan ainsi déterminé. Mener par le point la perpendiculaire au plan.

4816. — Perpendiculaire commune à deux droites (géométrie cotée).

4817. — Perpendiculaire commune à une droite et à la ligne de terre.

4818. — On donne trois points de cotes 0, 3 et 6. Par ces trois points passe un cercle qui a un second point de cote zéro. Construire ce point.

4819. — On donne deux points et un plan horizontal. Déterminer un triangle équilatéral ayant les deux points donnés pour sommets et dont le troisième sommet soit dans le plan horizontal.

4820. — Trouver les plans bissecteurs de deux plans définis par leurs échelles de pente.

4821. — On donne un triangle ABC. Couper un trièdre trirectangle par un plan qui donne une section égale à ce triangle.

4822. — Représenter par ses projections une parabole connaissant les projections du foyer et celles de la directrice.

4823. — On donne la ligne d'horizon et un segment du géométral en perspective sur le tableau. Trouver le milieu du segment.

4824. — Représenter en perspective une allée plantée d'arbres de hauteur donnée.

4825. — Perspective d'un cube.

4826. — On donne un cône défini par sa base qui est un cercle dans le plan horizontal et par son sommet (projection horizontale et cote). Mener à ce cône un plan tangent par un point défini aussi par sa projection horizontale et sa cote.

4827. — Un cône a pour base une ellipse dans le plan horizontal. Distance d'un point à ce cône.

4828. — On donne une parabole dans un plan horizontal et deux points. Construire les génératrices du cylindre ayant la parabole pour directrice et passant par les deux points.

4829. — Trouver les contours apparents d'un cône dont on donne le sommet et dont la base qui est un cercle situé dans un plan donné est définie par son rabattement. Section de ce cône par un plan de bout.

4830. — Intersection d'un plan donné par son échelle de pente et d'un cône ayant pour sommet un point S de cote 4 et pour base un cercle dans le plan horizontal. Nature de la section. Asymptotes.

4831. — On donne un cône de sommet (s, s') et ayant pour base une courbe dont on donne le plan et la projection horizontale qui est un cercle. Section du cône par un plan vertical. Point le plus haut.

4832. — Un losange, situé dans un plan horizontal, détermine les génératrices de contour apparent horizontal de deux cylindres de révolution. Trouver l'intersection ; point quelconque et tangente en ce point.

4833. — Intersection de deux cônes du deuxième degré, donnés par leurs bases dans un plan horizontal, la ligne des sommets ayant sa trace horizontale sur une tangente commune aux deux bases.

4834. — Intersection de deux cônes de révolution dont les axes sont dans un même plan horizontal. Tangentes aux points de rencontre des contours apparents.

4835. — Intersection de deux cônes du deuxième degré ayant une courbe plane commune. Montrer que ces deux cônes sont bitangents. Réciproque.

4836. — Intersection de deux cylindres de révolution dont l'un est vertical et l'autre horizontal.

4837. — Un cône a pour base un cercle dans un plan horizontal. Intersection de ce cône et du cylindre de révolution ayant pour axe une droite donnée et tangent au cône.

4838. — On donne un cylindre ayant pour base une hyperbole dans le plan horizontal. Un cône dont la base est un cercle dans le plan horizontal a une génératrice parallèle à celles du cylindre. Branches infinies de l'intersection.

4839. — On donne dans le plan horizontal deux cercles tangents intérieurement au point a. Le plus grand est la trace d'un cylindre vertical. En a se projette un point de cote donnée qui est le sommet d'un cône dont la base est le petit cercle. Intersection des deux surfaces. Coter un des points et graduer la tangente.

4840. — Deux cônes ont respectivement pour bases dans le plan horizontal deux cercles tangents à la ligne de terre au même point o. Leurs sommets sont sur la verticale du point o ; intersection.

4841. — Intersection de deux cônes de révolution dont les axes sont verticaux et dont les angles au sommet sont égaux.

4842. — On donne un cylindre ayant pour base une parabole dans le plan vertical et dont les génératrices sont horizontales, et un cône ayant pour base un cercle dans le plan vertical et ayant une génératrice parallèle aux génératrices du cylindre. Intersection du cône et du cylindre.

4843. — Un cône a pour base dans le plan horizontal une ellipse dont le grand axe ab est parallèle à la ligne de terre ; son sommet est dans le plan de front du grand axe. On mène les génératrices de contour apparent vertical sa, $s'a'$ et sb, $s'b'$. Par le centre de l'ellipse, on mène une parallèle à la génératrice sb, $s'b$; c'est la génératrice d'un cône de révolution dont l'axe est la droite sa, $s'a'$. Intersection des deux cônes.

4844. — On donne un tétraèdre $abcd$ dont la base abc est sur le plan horizontal. Une sphère de rayon quelconque a pour centre le point d ; trouver sa section par un plan de pente donnée passant par ac.

4845. — On donne une sphère et un point (m, m'). Connaissant la projection horizontale d'une tangente à la sphère menée par ce point, trouver la projection verticale.

4846. — Ombre portée d'une sphère sur le plan horizontal en prenant un point pour source lumineuse. Trouver un point de la courbe d'ombre et la tangente en ce point.

4847. — Ombre propre et ombre portée d'un hémisphère reposant par sa base sur le plan horizontal ; les rayons lumineux sont parallèles à une direction donnée.

4848. — On donne un tétraèdre solide, et on demande de construire avec la règle et le compas le rayon de la sphère circonscrite et celui de la sphère inscrite.

4849. — Trouver l'intersection d'un tétraèdre avec une sphère qui admet pour grand cercle le cercle circonscrit à l'une des faces.

4850. — On donne une sphère et un cylindre de révolution à axe vertical. Mener par un point des tangentes communes au cylindre et à la sphère.

4851. — On donne une droite et un point. Construire la sphère ayant le point pour centre et tangente à la droite.

4852. — Construire une sphère tangente aux plans de projection et ayant son centre sur une droite donnée. Intersection de la droite et de la sphère.

4853. — Construire une sphère de rayon donné ayant son centre sur une droite donnée et tangente à un plan donné.

4854. — Une surface de révolution est engendrée par un cercle de front tournant autour d'un axe de front non situé dans le même plan. Mener à cette surface un plan tangent parallèle à une droite et tel que son point de contact soit sur un parallèle donné.

4855. — On donne un axe de front autour duquel on fait tourner une courbe située dans un plan horizontal. Mener à la surface engendrée un plan tangent par un point donné, le point de contact étant dans le plan méridien perpendiculaire au plan de front.

4856. — Ombre propre et ombre portée sur les plans de projection d'un cône dont l'axe est vertical. Les rayons lumineux sont parallèles.

4857. — Section d'un tore à axe vertical par un plan de bout. Cas particulier où le plan est bitangent.

4858. — On donne un tore à axe de front. Mener à ce tore un plan tangent parallèle à la ligne de terre, le point de contact étant dans un méridien donné qui fait un angle de 45° avec le plan vertical de projection.

4859. — On donne un tore d'axe vertical, et un point lumineux défini par sa projection horizontale et sa cote. Trouver l'ombre du tore sur le plan de l'équateur.

4860. — On donne un cylindre de révolution défini par son axe et une génératrice. Plus courte distance de ce cylindre à une droite quelconque.

4861. — Étant donné un tétraèdre ABCD, on demande l'intersection de ce polyèdre avec le cylindre de révolution qui a pour axe la droite du plan ABC perpendiculaire à AB en son milieu et dont le rayon est donné.

4862. — Un cylindre a pour base une ellipse dans le plan horizontal. Un cylindre de révolution tangent au premier a pour axe une droite (D, D'). Trouver les contours apparents de ce cylindre.

4863. — On donne un tétraèdre SABC et une circonférence inscrite dans la base ABC. Cette circonférence est la base d'un cylindre droit dont on demande l'intersection avec les faces du tétraèdre.

4864. — Intersection d'un plan défini par ses traces avec un cylindre de révolution dont l'axe est parallèle à la ligne de terre.

4865. — On donne deux droites : l'une d'elles est l'axe d'un cylindre de révolution tangent à l'autre. Trouver les contours apparents de ce cylindre.

4866. — Étant donné un cylindre de révolution défini par son axe et son rayon, on demande de lui mener par un point un plan tangent. Intersection avec une droite.

4867. — Construire un cylindre de révolution tangent à une sphère et ayant pour axe une droite donnée.

4868. — On donne un plan par une frontale et une horizontale. Construire un cylindre de révolution de rayon donné tangent au plan suivant la frontale.

4869. — Couper un cône de révolution par un plan de manière que la section se projette horizontalement suivant un cercle.

4870. — On donne deux droites qui se coupent ; l'une d'elles est axe d'un cône de révolution ; l'autre est une génératrice : 1° On donne la projection horizontale m d'un point du cône : trouver la projection verticale m' ; 2° Mener à ce cône un plan tangent parallèle à une droite ; 3° Contours apparents de ce cône ; 4° Intersection avec une droite.

4871. — Mener par un point une droite faisant des angles donnés avec les plans de projection.

4872. — Section plane d'un cône de révolution à axe vertical.

4873. — Mener par un point une tangente commune à deux sphères.

4874. — Construire un cône de révolution tangent à une sphère connaissant l'axe et le sommet.

4875. — Construire l'axe d'un cône de révolution inscrit dans un trièdre.

4876. — Une surface gauche de révolution est définie par son axe vertical et une génératrice de front ; on donne en outre un point lumineux. Trouver un point de la courbe qui limite l'ombre propre. Tangente en ce point.

4877. — On considère l'hyperboloïde engendré par la rotation d'une ligne de front autour d'un axe vertical. Trouver la section de cette surface par un plan passant par la ligne de terre et un point.

4878. — On donne un hyperboloïde de révolution par son axe de front et une génératrice Δ ; on prend un point (a, a') sur cette génératrice. Mener à la surface un plan tangent vertical ayant son point de contact sur le parallèle décrit par (a, a').

4879. — Déterminer un point d'une surface gauche de révolution engendrée par une droite horizontale tournant autour d'un axe quelconque. Plan tangent.

4880. — On considère un paraboloïde ayant pour plan directeur le plan horizontal et admettant une génératrice G verticale et une génératrice G_1 définie par sa projection cotée. Sur la génératrice horizontale de cote 5, on prend un point m. Trouver le plan tangent en ce point. Sommet de ce paraboloïde. Section par un plan quelconque.

4881. — On donne un paraboloïde défini par deux droites et un plan directeur horizontal. On donne la projection horizontale d'un point ; trouver sa projection verticale.

4882. — Représenter en géométrie cotée un paraboloïde équilatère dont l'axe est vertical. Tracer plusieurs génératrices de chaque système. Construire les courbes de niveau.

4883. — On donne une verticale et une droite de bout qui sont deux génératrices d'un paraboloïde ayant pour plan directeur le second bissecteur. Trouver des génératrices des deux systèmes.

4884. — Un hyperboloïde est défini en géométrie cotée par deux génératrices horizontales et par une verticale. Construire une génératrice quelconque.

4885. — On donne un hyperboloïde à une nappe par trois génératrices dont une est verticale et une autre de bout. On

le suppose éclairé par un point lumineux. Déterminer le point de la courbe d'ombre propre qui se trouve sur une génératrice.

4886. — Intersection d'une sphère et d'un paraboloïde hyperbolique admettant deux génératrices de front et un plan directeur horizontal.

4887. — On donne une surface gauche de révolution à axe vertical défini par une génératrice de front. Construire une génératrice quelconque G de l'autre système. Sur cette génératrice on prend un point (s, s'), et on considère le cône de révolution engendré par G tournant autour de la ligne de bout du point (s, s'). Trouver l'intersection des deux surfaces.

4888. — Dans un plan horizontal on donne deux droites Ox et Oy et un cercle C. Trouver l'intersection des tores engendrés par la rotation du cercle successivement autour des deux droites.

4889. — Un ellipsoïde est tangent à deux plans horizontaux en deux ombilics. Construire les lignes de niveau de cet ellipsoïde.

4890. — Intersection d'un hémisphère reposant par sa base sur le plan horizontal et d'un cylindre ayant pour directrice un cercle du plan horizontal.

4891. — On donne une droite de front AB et un cercle horizontal dont le centre O est le milieu de AB. Montrer qu'il existe un ellipsoïde passant par le cercle, par les points A et B, les plans tangents en ces points étant horizontaux. Intersection de cet ellipsoïde avec un cône ayant pour base un cercle dans le plan tangent en A et pour sommet un point de la verticale du point O.

4892. — On donne un hyperboloïde de révolution à deux nappes à axe vertical. Trouver la projection horizontale d'un point de la surface, connaissant sa projection verticale. Plan tangent en ce point.

4893. — Intersection d'une sphère et d'un cône de révolution dont l'axe est dans le plan de front du centre. Nature de la projection verticale de l'intersection.

4894. — Trouver le contour apparent horizontal d'un ellipsoïde tangent au plan horizontal en un ombilic.

4895. — On donne dans un plan de front une ellipse et une parabole ayant un foyer commun. Trouver l'intersection des surfaces de révolution engendrées par ces courbes tournant autour de leur axe focal.

4896. — Ombre portée par une sphère sur un cône de révolution à axe vertical situé dans le plan de front du centre de la sphère. Les rayons lumineux passent par un point.

4897. — Mener à un ellipsoïde de révolution à axe vertical un plan tangent parallèle au deuxième bissecteur.

4898. — Intersection d'un cône ayant pour base un cercle dans le plan horizontal et d'un hémisphère reposant par sa base sur le plan horizontal.

4899. — Intersection de deux hyperboloïdes engendrés le premier par une frontale tournant autour d'un axe vertical, et le deuxième par une droite quelconque tournant autour d'un axe de front. Les deux axes se rencontrent.

4900. — On donne une verticale (z, z') et deux droites (D, D') et (Δ, Δ'). Intersection de l'hyperboloïde défini par ces trois droites avec l'hyperboloïde engendré par la rotation de (D, D') autour de la verticale (z, z').

4901. — Intersection d'un hyperboloïde à axe vertical et d'une sphère ayant son centre dans le plan de front de l'axe.

4902. — On donne un cône de révolution à axe vertical. Dans le plan de front de l'axe, on considère une droite (A, A') qui est l'axe d'une surface de révolution ayant pour directrice une courbe quelconque (C, C'). Trouver un point quelconque de l'intersection et la tangente.

4903. — On donne un cône de révolution à axe vertical, et un paraboloïde ayant pour génératrices l'axe du cône, une droite quelconque et pour plan directeur le plan horizontal. Chercher un point quelconque de l'intersection et la tangente. Points remarquables.

4904. — On donne un hyperboloïde de révolution à axe vertical et un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal et ayant pour génératrices l'axe de l'hyperboloïde et une droite quelconque. Intersection des deux surfaces.

4905. — Mener par une droite un plan tangent à un paraboloïde de révolution à axe vertical. Démontrer que les projections horizontales des sections planes du paraboloïde par des plans passant par une droite sont des cercles ayant même axe radical.

4906. — On donne une surface gauche de révolution à axe vertical et un cylindre de révolution dont l'axe est de front. Mener à ces deux surfaces une tangente commune parallèle à une direction donnée; cas où la direction donnée est de bout.

4907. — On donne une verticale et deux autres droites. Intersection de l'hyperboloïde à une nappe défini par ces trois droites et de l'hyperboloïde de révolution engendré par l'une des droites tournant autour de la verticale.

4908. — Intersection d'une droite et d'un ellipsoïde à trois axes inégaux.

4909. — Ombre d'une sphère sur un cône dont la base est un cercle dans le plan horizontal, les rayons lumineux étant de front et à 45°.

4910. — Intersection de deux paraboloïdes hyperboliques à plan directeur horizontal et ayant une génératrice commune.

4911. — On donne un tore à axe vertical et un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal et admettant pour génératrices l'axe du tore et une droite donnée. Déterminer l'intersection. Points sur un parallèle et sur un méridien.

4912. — Un paraboloïde est défini par un plan directeur horizontal H et deux génératrices de front qui rencontrent H en a et b. Intersection de ce paraboloïde et du cône de révolution engendré par la droite ab tournant autour d'une des génératrices.

4913. — Intersection de deux surfaces gauches de révolution ayant une génératrice commune, l'une ayant son axe vertical.

4914. — Intersection d'un tore à axe vertical avec un hyperboloïde défini par trois génératrices, qui sont l'axe du tore, une droite de bout et une parallèle à la ligne de terre.

4915. — On donne une droite D qui est l'axe d'un ellipsoïde de révolution allongé, défini par les sommets et les foyers de l'ellipse méridienne. Contour apparent de l'ellipsoïde.

VI. — Cinématique.

4916. — Un point M décrit une courbe plane de telle manière que l'aire balayée par le rayon vecteur OM soit proportionnelle au temps. Démontrer que l'aire du parallélogramme construit sur OM et sur le vecteur vitesse MV est constante.

4917. — L'hodographe du mouvement des planètes est un cercle. Réciproque.

4918. — Étudier le mouvement relatif de deux points pesants tombant suivant la même verticale.

4919. — Un point mobile se meut sur une droite avec une accélération proportionnelle à la puissance m^e de la vitesse. Calculer sa vitesse. Cas où $m = 1$.

4920. — Un point se meut d'un mouvement uniforme sur une hélice. Trouver l'hodographe.

4921. — Un mobile décrit une ellipse suivant la loi des aires par rapport au foyer F. Trouver l'hodographe.

4922. — Étudier le mouvement rectiligne dans lequel la vitesse est liée à l'abscisse par la formule $v^2 = k^2(x^2 + a^2)$.

4923. — Étudier le mouvement rectiligne défini par la formule $x = a \operatorname{ch}(\omega t - \alpha)$. Exprimer la vitesse et l'accélération en fonction de l'abscisse.

4924. — Un chasseur décrit l'axe Oy avec une vitesse constante v. Quand il est au point O, son chien part d'un point A de Ox avec une vitesse constante $2v$ toujours dirigée vers le chasseur. Construire la courbe décrite par le chien. A quel moment le chien rejoint-il le chasseur ?

4925. — Un point M de coordonnées 0, 3, 1 tourne autour de la droite $x = z + 1$, $y = z - 2$, faisant un tour en trois minutes. Quelles sont ses coordonnées au bout d'une minute ?

4926. — Mouvement uniforme d'un point sur une hélice. En déduire la position du plan osculateur et le rayon de courbure.

4927. — Étudier les mouvements dans lesquels l'hodographe relative à un point O est une droite ne passant pas par le point O.

4928. — Un cylindre de rayon égal à 3^m tourne autour de son axe en faisant un tour par minute. Un point, sur une hélice de pas donné tracée sur le cylindre, se déplace avec une vitesse de 10^m par seconde. Trouver la vitesse absolue du point. Nature du mouvement et de la trajectoire.

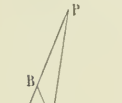
4929. — Étudier le mouvement défini par les équations $\rho = kt$, $\omega = \sqrt{t}$. Rayon de courbure et développée de la trajectoire.

4930. — On considère un mouvement à vitesse constante et tel que l'accélération fasse un angle constant avec la vitesse. Que peut-on dire de la trajectoire ? Étudier le mouvement où l'accélération est constante ainsi que sa projection sur la tangente.

4931. — Étudier le mouvement $\rho = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$, $\omega = \dfrac{2t}{1 + t^2}$. Vitesse.

4932. — Construire la courbe $x = \dfrac{\lambda}{1 - \lambda}$, $y = \dfrac{\lambda^2}{1 - \lambda^2}$. Déterminer λ en fonction du temps t de manière que le point décrive la courbe d'un mouvement uniformément accéléré.

4933. — On considère un triangle isocèle OBA (de sommet B) et on suppose que OB et BA sont deux tiges articulées en B. Le point O est fixe et A se déplace sur Ox. On prend sur AB un point M. Lieu du point M : montrer que c'est une ellipse. On prolonge OB d'une longueur BP = OB, on joint PM. Quelle est la position de cette droite par rapport à l'ellipse ? En supposant que A décrive Ox d'un mouvement uniforme, quel sera le mouvement du point M ? Accélération.



4934. — On donne un point O et une droite D. On joint le point O à un point M quelconque de la droite, et sur OM on prend un point N tel que la longueur MN soit constante. Calculer la vitesse de N en fonction de celle du point M.

4935. — On joint un point M d'une courbe C à deux points fixes O et O'. Quelle doit être la courbe C pour que les vitesses angulaires de OM et O'M soient inversement proportionnelles aux distances OM et O'M ?

4936. — Mouvement d'un point sur une hyperbole équilatère sachant que la projection du point sur une asymptote a un mouvement uniforme. Calculer l'accélération tangentielle et l'accélération normale.

4937. — O et O' étant deux points fixes, un point M se déplace de telle façon que, si on appelle ω et ω' les vitesses angulaires des rayons vecteurs OM et O'M, on ait constamment $\omega . OM + \omega' . O'M = 0$. En déduire une relation entre les angles des droites OM et O'M avec OO', et montrer que le point M décrit une conique.

4938. — Une droite D tourne autour d'un de ses points O avec une vitesse angulaire constante ω. Un point M se déplace sur cette droite d'un mouvement uniformément accéléré. Étudier le mouvement de ce point. Vitesse à un instant quelconque.

4939. — On donne dans un plan un système d'axes rectangulaires fixes xOy et un système d'axes mobiles $x'O'y'$ également rectangulaires. Trouver les composantes sur Ox et Oy de la vitesse d'un point M invariablement lié au système $x'O'y'$. Chercher le point qui a une vitesse nulle.

4940. — On donne un point fixe O dans un plan et un point mobile M qui se déplace de telle façon que la vitesse angulaire de OM soit constante et que l'accélération de M soit constamment perpendiculaire à OM. Étudier le mouvement du point M.

VII. — Dynamique.

4941. — Un point matériel est sollicité par trois axes rectangulaires avec des forces proportionnelles aux distances du point aux axes. Trouver les équations du mouvement.

4942. — Un point est soumis à la pesanteur et à une force qui est fonction de sa distance à une droite. Montrer qu'il y a une fonction de forces.

4943. — Un point M (x, y) se déplace dans un plan sous l'action de la force $X = -k^2 y$, $Y = k^2 x$. Le point, parti d'une certaine position, y revient. Travail accompli par la force pendant ce déplacement.

4944. — Un point est mobile sur un cercle et est soumis à un frottement proportionnel au carré de la vitesse angulaire. Trouver son mouvement.

4945. — Soit un cercle de diamètre AB. Un point M décrit le cercle de A en B en étant repoussé par le point B avec une force proportionnelle à la distance MB. Évaluer le travail total.

4946. — Un point décrit une ellipse de centre O sous l'action d'une force passant par le point O. Déterminer cette force.

4947. — Un point décrit la courbe $\rho^2 = a^2 \cos 2\omega$ sous l'action d'une force passant par le pôle. Trouver cette force.

4948. — Etudier le mouvement d'un point attiré par un centre fixe avec une force proportionnelle au cube de la distance. Trouver la trajectoire.

4949. — Un point se meut sur un cercle. Il est soumis à une force de composantes $X = mx^2 + py$, $Y = -mx$. Calculer le travail de cette force quand le point exécute une rotation complète.

4950. — Trouver les mouvements dans lesquels l'hodographe est un cercle. Cas où la force est centrale.

4951. — Un point décrit un cercle qui a pour centre l'origine, sous l'action d'une force dont les projections sont $X = ay^3 + b \sin x$, $Y = c \cos y$. Travail accompli après un tour.

4952. — Un point M décrit un cercle sous l'influence d'une force passant par un point O de ce cercle et fonction de la distance $r = OM$. Calculer cette fonction.

4953. — Un point M décrit la courbe $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ sous l'action d'une force parallèle à Ox et fonction de l'y du point M. Trouver cette fonction.

4954. — Mouvement d'un point M attiré par un centre fixe proportionnellement à la distance. Condition pour que, d'un point M_0, on puisse atteindre un point M_1, et lieu de l'extrémité V_0 du vecteur M_0V_0 représentant la vitesse initiale avec laquelle il faut lancer le mobile.

4955. — Un point M assujetti à décrire une parabole est attiré par un point A de l'axe proportionnellement à la distance. Le point A est lui-même animé d'un mouvement uniforme. Trouver le mouvement du point M.

4956. — Étudier le mouvement d'un point pesant assujetti à décrire une cycloïde.

4957. — On a, sur les côtés d'un angle donné, deux points matériels qui se repoussent proportionnellement à la distance. Déterminer le mouvement.

4958. — Un point matériel M est sollicité par des forces normales à des surfaces données et proportionnelles aux longueurs de ces normales. Calculer le travail élémentaire.

4959. — Mouvement d'un point dans un plan sachant qu'il est attiré par une droite de ce plan proportionnellement à la distance.

4960. — On donne un cercle et deux points M_0 et M_1 de ce cercle. On lance en M_0 un point pesant avec une vitesse initiale v_0. Trouver la condition pour qu'il puisse atteindre le point M_1.

4961. — Un point se meut sur une droite en étant attiré par un centre fixe extérieur à la droite, la force d'attraction étant proportionnelle à la distance. Comment peut-on représenter simplement le mouvement ?

4962. — Un point décrit la courbe $\rho = a \cos^2 \omega$ sous l'action d'une force émanant du pôle. Etudier le mouvement.

4963. — Étant donnée la courbe $\frac{1}{\rho} = \frac{1 + e \cos \omega}{p}$ parcourue par un mobile suivant la loi des aires, trouver la nature de la force qui le sollicite.

4964. — Un point parcourt la courbe $(x^2 + y^2)(x - y) - 2xy = 0$ d'un mouvement uniforme de vitesse donnée : trouver la force qui le sollicite.

4965. — Un point M décrit une droite de A en B : il est attiré par un point O, la force d'attraction étant proportionnelle à l'angle de OM et AB. Calculer l'expression du travail accompli par la force.

4966. — Un point décrit un cercle sous l'action de la force $X = ay$, $Y = bx$. Travail total quand le point décrit le cercle.

4967. — Un point pesant décrit une courbe dans un plan vertical sans vitesse initiale à partir d'un point O. Calculer le temps employé pour parcourir un arc donné OM.

4968. — Un point est attiré par une droite proportionnellement à l'inverse du cube de la distance à la droite. La vitesse initiale est parallèle à la droite. Etudier le mouvement.

4969. — Mouvement d'un point pesant tombant verticalement, sachant que l'air offre une résistance proportionnelle à une puissance de la vitesse $f = kv^n$. Cas particulier où $n = 1$ ou 2.

4970. — Deux centres attirent un point M suivant des forces inversement proportionnelles à la distance. Etudier le mouvement.

4971. — Dans le mouvement des planètes, quelle doit être la vitesse initiale pour que l'orbite soit un cercle ?

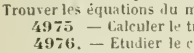
4972. — Un point pesant décrit sans vitesse initiale un segment d'une courbe située dans un plan vertical. Temps employé pour le parcours.

4973. — Le travail élémentaire d'une force, dans un mouvement de rotation autour d'un axe, est égal au produit du déplacement par le moment de la force par rapport à l'axe.

4974. — Un point matériel est sollicité par une force dirigée dans le sens de la vitesse et proportionnelle à la vitesse. Trouver les équations du mouvement et la trajectoire.

4975. — Calculer le travail accompli par une force centrale.

4976. — Etudier le champ de forces défini par les équations $X = yz$, $Y = zx$, $Z = xy$. Lignes de force et surfaces de niveau.



4977. — On donne deux centres d'attraction A et B et sur la droite AB deux points M et P. M est attiré vers A par une force proportionnelle à la distance et subit une résistance proportionnelle à la vitesse ; P est attiré vers B dans les mêmes conditions. Les deux mobiles se rencontrent-ils, et quelles sont alors leurs positions ?

4978. — Mouvement d'un point lancé verticalement avec une vitesse de 25^m à la seconde. Calculer la hauteur maxima atteinte par le point mobile. Se servir de la règle à calcul.

4979. — On considère le champ de forces dû à un aimant. Un point du champ est attiré par chaque pôle en raison inverse du carré de la distance. Y a-t-il un potentiel ?

4980. — On donne deux axes rectangulaires Ox, Oy. Un point M se déplace sur Oy d'un point A à un point B ; il est attiré proportionnellement à la distance par un point fixe C de Ox. Quel est le travail de cette force quand le point va de A en B.

4981. — On donne deux axes rectangulaires Ox, Oy et un point B sur Oy; on lance du point B parallèlement à Ox un point M de masse unité avec une vitesse de 30^m à la minute. Ce point est attiré par le point O proportionnellement à la distance. Chercher à quelle distance de O le point M va rencontrer Ox, sachant que $OB = 10^m$ et que, le point M étant à l'unité de distance du point O, l'attraction est de 5^{kg}.

4982. — Le coefficient de frottement, au départ, de l'acier sur l'acier étant f, trouver la plus grande inclinaison qu'on peut donner à une voie de chemin de fer pour qu'un train puisse y stationner sans glisser.

4983. — Démontrer qu'il existe une fonction des forces lorsqu'un point est soumis à une force perpendiculaire à un axe fixe et fonction de la distance du point à cet axe.

4984. — Un point M décrit une demi-circonférence de diamètre AB sous l'action d'une force passant par un point fixe C et proportionnelle à la distance. Calculer le travail total.

4985. — On donne deux droites dans l'espace et un point sur chacune de ces droites. Ces points s'attirent proportionnellement à leur distance; trouver les mouvements de ces points sur les droites.

4986. — Un point matériel est assujetti à décrire une parabole $y^2 - 2px = 0$ d'un mouvement uniforme. Trouver la force qui le sollicite.

4987. — Un corps pesant tombe et éprouve une résistance proportionnelle à une puissance de la vitesse. Étudier le mouvement. Cas où la puissance est égale à 2.

4988. — Un point M se déplace sur la cycloïde $x = R(\varphi - \pi - \sin\varphi)$, $y = R(\cos\varphi - 1)$ sous l'action d'une force passant par l'origine. Déterminer cette force en fonction de φ.

4989. — Avec quelle vitesse faut-il lancer un projectile sous un angle de 30° avec l'horizon pour qu'il atteigne un point situé à 30^{km} et à 2^m au-dessous de l'horizon ?

4990. — Un corps pesant tombe avec une résistance proportionnelle à une puissance de la vitesse. Étudier le mouvement.

4991. — Soit A le point le plus bas d'un cercle situé dans un plan vertical. On lance en A sur le cercle un point matériel pesant avec une vitesse v_0, et on suppose que le point ne peut quitter le cercle vers l'extérieur. Quelle doit être la vitesse v_0 pour que le point tourne dans le cercle sans tomber ? De quelle hauteur doit-on laisser tomber le point sur une courbe se raccordant au cercle au point A ?

4992. — Un point P est attiré par un centre d'attraction mobile M qui décrit un cercle d'un mouvement uniforme. Étudier le mouvement de P sachant que la force est proportionnelle à la distance.

4993. — Un cylindre de 10^{cm} de hauteur, de 5^{cm} de rayon tourne avec une vitesse de 10 tours à la seconde autour de son axe. Sa densité est égale à 7. Calculer la force vive du cylindre.

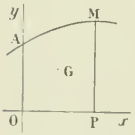
4994. — On considère une courbe $y = f(x)$ rapportée à deux axes rectangulaires. C'est la trajectoire d'un point soumis à l'action d'une force perpendiculaire à Ox et fonction de la distance du point à Ox. Déterminer la nature de cette fonction.

4995. — On donne trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz et on considère un point M soumis à l'action d'une force perpendiculaire au plan MOz et proportionnelle à la distance du point M à Oz. Étudier le mouvement du point M.

VIII. — Statique.

4996. — Centre de gravité d'un segment de parabole.

4997. — Centre de gravité d'un quadrilatère.



4998. — Trouver le centre de gravité G de l'aire limitée par une courbe AM, $y = f(x)$, par les axes Ox, Oy et une ordonnée MP.

Déterminer la courbe de manière que l'abscisse X du point G soit liée à l'abscisse x du point P par la relation $X = kx$. Cas particuliers où $k = \frac{2}{3}$, $k = \frac{3}{4}$.

4999. — Soient Ox, Oy deux axes de coordonnées rectangulaires; une tige homogène AB de densité linéaire ρ est placée sur Oy et attire suivant la loi de Newton un point M de Ox. Trouver la résultante des forces.

5000. — Réduire un système de forces à deux : 1° dont l'une passe par un point donné ; 2° dont une ligne d'action est donnée ; 3° dont les lignes d'action sont rectangulaires. Si les conditions 1° et 3° sont réunies, la force qui passe par le point décrit un cône.

5001. — Conditions pour que m points soient sur un solide invariable et pour que ce solide soit au repos.

5002. — Trouver un point M dans le plan d'un triangle, tel que trois forces appliquées en ce point, perpendiculaires aux côtés et mesurées par les distances de M à ces côtés, soient en équilibre.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

5003. — Un point matériel pesant M est assujetti à rester sur un paraboloïde d'axe vertical ; il est sollicité par une force constante passant par un point fixe. Trouver les positions d'équilibre du point M.

5004. — On donne deux points fixes A et B auxquels est attaché un fil. Un anneau infiniment petit supporte un poids P et glisse le long du fil. Trouver la position d'équilibre.

5005. — On divise un carré en neuf carrés égaux et aux centres de ceux-ci on applique des poids proportionnels aux nombres indiqués ci-contre. Trouver le centre de gravité de l'ensemble des poids.

5006. — Un point M, situé à l'intérieur d'un tétraèdre ABCD, est soumis à l'action de quatre forces représentées en grandeur et en direction par les vecteurs MA, MB, MC, MD, puis à l'action de quatre autres forces représentées en grandeur et en direction par les distances du point M aux faces du tétraèdre. Le point M peut-il prendre une position d'équilibre sous l'action de ces huit forces ?

5007. — Trouver les équations d'équilibre d'un solide en coordonnées obliques, en effectuant une transformation de coordonnées.

5008. — Centre de gravité de l'aire d'une demi-ellipse.

5009. — Position d'équilibre d'un hémisphère pesant placé sur un plan horizontal, sachant qu'un point du cercle de base est pesant.

5010. — Un cerceau peut rouler sans glisser sur un plan horizontal. Une canne PQ homogène repose par une de ses

extrémités P sur le plan horizontal et s'appuie sur le cerceau en M. Il y a frottement en P et M. Peut-il y avoir équilibre ?

5011. — Six forces égales sont appliquées suivant les côtés d'un hexagone régulier ABCDEF. Peut-on trouver trois forces égales qui fassent équilibre à ce système et qui soient appliquées suivant les côtés du triangle équilatéral ACE ?

5012. — Équilibre d'un point pesant mobile sur un cercle vertical avec frottement.

5013. — Centre de gravité d'un arc d'hélice. Lieu de ce point quand l'une des extrémités de l'arc varie.

5014. — Centre de gravité d'un hémisphère.

5015. — Réduire un système de forces à deux dont l'une passe par un point fixe et ait une intensité donnée.

5016. — On donne six droites dans l'espace. Peut-on trouver six forces en équilibre, telles que leurs lignes d'action soient ces six droites ? Condition de possibilité. Lorsqu'on donne cinq des droites et un point de la sixième, quel est le lieu de cette droite ?

5017. — On donne quatre forces concourantes en un point O, et on désigne par G le centre de gravité du tétraèdre qui a pour sommets les extrémités des forces. Montrer que la résultante est dirigée suivant OG et égale à 4 OG.

5018. — Équilibre d'une barre pesante reposant par ses extrémités sur deux plans inclinés.

5019. — Démontrer qu'une force unique peut se décomposer suivant les arêtes d'un tétraèdre d'une seule manière.

5020. — On donne des droites concourantes $D_1, D_2, \ldots, D_n$ et un point P. Par ce point on mène des perpendiculaires sur ces droites, et on suppose que ces perpendiculaires représentent des forces agissant sur P. Condition pour que le point P soit en équilibre sous l'action de ces forces.

5021. — Centre de gravité de l'arc et de l'aire d'une cycloïde.

5022. — On suppose qu'en chaque point d'un champ la force soit définie par les équations

$$X = x^2 - yz, \qquad Y = y^2 - zx, \qquad Z = z^2 - xy.$$

Calculer le potentiel.

5023. — Équilibre d'une barre reposant à l'intérieur d'un hémisphère creux et s'appuyant sur le bord de l'hémisphère.

5024. — Un point situé à l'intérieur d'un tétraèdre est sollicité par des forces normales aux faces du tétraèdre et égales aux distances du point à ces faces. Trouver les positions d'équilibre.

5025. — Un point M est attiré par quatre forces normales aux quatre faces d'un tétraèdre et égales aux surfaces de ces quatre faces. Conditions d'équilibre.

5026. — Positions d'équilibre d'un point attiré par plusieurs centres fixes proportionnellement à la distance.

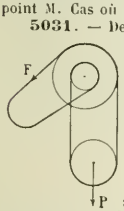
5027. — Est-il possible de réduire un système de forces à deux forces rectangulaires et dont la plus courte distance soit donnée ?

5028. — Un fil inextensible est suspendu en deux points fixes A et B. On attache deux poids P et Q respectivement en deux points C et D du fil. Position d'équilibre du système.

5029. — On considère une courbe rapportée à deux axes rectangulaires Ox et Oy et rencontrant Oy en un point A. On considère sur la courbe un point variable M et on demande de déterminer la courbe : 1° de façon que l'abscisse x_1 du centre de gravité de l'arc AM soit une fonction donnée de l'abscisse x du point M. Cas particulier, $x_1 = \frac{x}{3}$; 2° de façon que le centre de gravité de l'arc AM soit fixe.

5030. — On donne trois points sur un cercle A, B, C. Un point M assujetti à rester sur le cercle est attiré proportionnellement à la distance par les points A, B, C, le coefficient de proportionnalité étant le même. Positions d'équilibre du point M. Cas où le point M est en équilibre dans toutes ses positions sur le cercle.

5031. — Deux cercles concentriques représentent l'ensemble de deux poulies solidaires. Une chaîne est enroulée selon la disposition ci-contre, et son adhérence sur les poulies est supposée parfaite. Au moyen de ce système on soulève un poids P. Condition d'équilibre. On néglige toute espèce de frottement.



5032. — On donne sur une droite m points matériels $M_1, M_2, \ldots, M_m$, de masses données $p_1, p_2, \ldots, p_m$, qui attirent un point M de la même droite et de masse p proportionnellement aux masses et inversement à la distance. Positions d'équilibre. Stabilité.

5033. — Déterminer une courbe passant par l'origine O, telle que si l'on mène, en un point M quelconque, la tangente qui rencontre Ox en T, le centre de gravité de l'arc OM soit sur la parallèle à Oy menée par T.

5034. — Une échelle dont on néglige le poids est appliquée contre un mur vertical sur lequel il n'y a pas de frottement. On donne le coefficient de frottement f sur le sol. Une personne se trouve sur un échelon donné. Équilibre.

CONCOURS DE 1905 (*Suite*)

LICENCE ÈS SCIENCES (*Paris.*)

Certificat de Mathématiques préparatoires à l'étude des sciences physiques.

Épreuve théorique.

I. — **1449.** Intégrer l'équation différentielle

$$(1 - x^2)\frac{dy}{dx} + xy = 1.$$

Construire la courbe intégrale qui passe par le point de coordonnées $x = 0$, $y = 1$.

II. — **1450** Intégrer l'équation différentielle

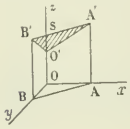
$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = \sin ax.$$

dans laquelle a désigne une constante donnée.

III. — **1451.** L'expression

$$\frac{(x+2y)dx+ydy}{(x+y)^2}$$

est-elle la différentielle totale d'une fonction U des deux variables indépendantes x et y ? Dans le cas de l'affirmative, déterminer cette fonction U.



IV. — **1452.** On considère la surface S qui, par rapport à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, a pour équation

$$z = x^2 + y + 1\ ;$$

on prend sur Ox une longueur $OA = 1$, sur Oy une longueur $OB = \frac{1}{2}$; on joint AB et on construit le prisme droit ayant pour base le triangle OAB. Calculer le volume limité par le triangle OAB, les faces latérales du prisme et la surface S.

(26 juillet de 8 h. à midi.)

Épreuve pratique.

I. — Calculer à $\frac{1}{100}$ près l'intégrale définie

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{5+4\cos x}.$$

II. — **1453.** Un point m dont la masse est 1gr est soumis à l'action de deux forces, à savoir :

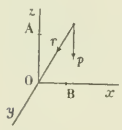
1° Un poids p ;

2° Une force dirigée vers un centre fixe O ayant une intensité constante et égale à celle du poids :

(α) Montrer que la résultante des deux forces dérive d'une fonction de forces U qu'on supposera nulle au point O ;

(β) Déterminer et représenter les surfaces de niveau ;

(γ) Calculer, dans le système C.G.S., le travail total effectué par la résultante des deux forces quand le point m passe de la position A située à 1m au-dessus de O sur la verticale de ce point, au point B situé à 50cm de O sur une horizontale issue de ce point ;



(δ) Le mobile m est lancé du point A dans une direction quelconque avec une vitesse initiale de 4cm à la seconde et soumis à l'action des deux forces. Appliquer au mouvement le théorème de la force vive et calculer la vitesse du point dans une quelconque de ces positions ; on ne cherchera pas la trajectoire du point.

Nota. — On appellera r la distance du mobile au point O et z sa hauteur au-dessus du plan horizontal passant par O. On prendra $g = 980$.

(26 juillet, de 2 h. à 4 h.)

QUESTIONS PROPOSÉES

1454. — La tangente et la normale en un point M d'une courbe rencontrent Ox en des points T et N tels que le segment $\overline{TN}$ ait une valeur constante $2a$. Trouver l'équation de la courbe et la construire.

1455. — *Théorèmes :* 1° P, P' et Q, Q' étant les projections des foyers d'une ellipse, F et F', sur une droite quelconque et sur la parallèle à cette droite menée par son pôle, on a

$$FP.F'Q' + F'P'.FQ = 2b^2.$$

2° P, P' et Q, Q' étant les projections des extrémités F, F' d'un diamètre d'une des focales d'un ellipsoïde sur un plan parallèle à la tangente à la focale en F et sur le plan parallèle au précédent mené par son pôle, on a

$$FP.F'Q' + F'P'.FQ = 2K^2,$$

K étant le demi-axe de l'ellipsoïde perpendiculaire au plan de la focale.

VASNIER.

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1378. — *On considère deux axes rectangulaires* Ox, Oy *et un cercle tangent à ces deux droites et ayant pour centre le point* (a, a) *de la première bissectrice.*

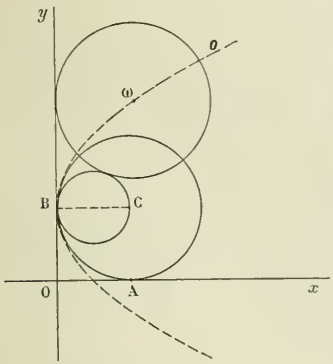
1° *Trouver l'équation d'un cercle tangent à* Oy *et orthogonal au précédent, et le lieu du centre de ce cercle. Par chaque point du plan, il passe deux de ces cercles ; trouver dans quelle région du plan doit être ce point pour que les deux cercles soient réels.*

2° *On associe ces cercles de façon que leurs points de contact avec* Oy *décrivent une involution ayant le point* O *pour point central et le point de contact du cercle fixe pour point double. Lieu des points de rencontre de ces cercles.*

3° *Lieu du point de rencontre des polaires de l'origine par rapport à deux cercles orthogonaux du système.*

1. Soit un cercle ayant pour centre le point ω (α, β) et tangent à Oy ; son équation est

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-\alpha^2=0.$$



Pour que ce cercle soit orthogonal au cercle donné,

$$\text{(C)} \qquad (x-a)^2+(y-a)^2=a^2,$$

il faut que la puissance du point ω par rapport au cercle C soit égale à α^2 ; on doit donc avoir

$$(\alpha-a)^2+(\beta-a)^2-a^2=\alpha^2$$

ou bien

$$(1) \qquad (\beta-a)^2-2a\alpha=0.$$

Cette relation montre que le lieu du point ω est une parabole ayant pour axe la droite $y-a=0$ et pour tangente au sommet l'axe Oy ; le paramètre de cette parabole étant égal à a, elle admet pour foyer le point $\left(\frac{a}{2}, a\right)$.

En tenant compte de la relation (1), l'équation du cercle ω s'écrit

$$a(x^2+y^2)-x(\beta-a)^2-2a\beta y+a\beta^2=0$$

ou bien

$$(2) \qquad \beta^2(a-x)+2a\beta(x-y)+a(x^2+y^2-ax)=0.$$

L'équation précédente prouve qu'à tout point (x, y) du plan correspondent pour β deux valeurs ; par conséquent, on peut dire que par tout point (x, y) du plan il passe deux cercles ω.

Pour que ces cercles soient réels, il faut que β soit réel et, par suite, que le discriminant de l'équation (2), considérée comme un trinome du second degré en β, soit positif ou nul.

On doit donc avoir

$$a(x-y)^2-(a-x)(x^2+y^2-ax)\geqslant 0$$

ou bien

$$x\left[\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+(y-a)^2-\frac{a^2}{4}\right]\geqslant 0.$$

Le point (x, y) doit donc être situé à droite de Oy et à l'extérieur du cercle

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+(y-a)^2-\frac{a^2}{4}=0.$$

L'enveloppe des cercles ω est formée de l'axe Oy et du cercle précédent qui a pour centre le point $\left(\frac{a}{2}, a\right)$ et qui est tangent à Oy au point B.

2. Soit (ω')
$$(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2=\alpha'^2$$
ou bien
$$\beta'^2(a-x)+2\beta' a(x-y)+a(x^2+y^2-ax)=0,$$
un cercle associé à (ω).

Pour tout point du lieu, β et β' sont racines de l'équation (2).

Or, par hypothèse, $\beta\beta'=a^2$;

le produit des racines de l'équation (2) est donc égal à a^2, c'est-à-dire que
$$a\frac{(x^2+y^2-ax)}{a-x}=a^2$$
ou bien
$$x^2+y^2-a^2=0.$$

Tel est le lieu des points d'intersection des cercles ω et ω'. C'est un cercle ayant l'origine pour centre et passant aux points A et B.

3. Deux cercles ω et ω' sont orthogonaux lorsque
$$(\alpha-\alpha')^2+(\beta-\beta')^2=\alpha^2+\alpha'^2$$
ou bien
$$(\beta-\beta')^2-2\alpha\alpha'=0.$$

En tenant compte de l'équation (1), cette relation s'écrit
$$2a^2(\beta-\beta')^2=(\beta-a)^2(\beta'-a)^2$$
ou bien

(3) $$2a^2[(\beta+\beta')^2-4\beta\beta']-\beta\beta'-a(\beta+\beta')+a^2=0.$$

La polaire de l'origine par rapport au cercle ω est
$$x(\beta-a)^2+2a\beta y-2a\beta^2=0$$
ou

(4) $$\beta^2(x-2a)-2\beta a(x-y)+a^2x=0.$$

Pour tout point du lieu cherché, β et β' sont racines de l'équation (4). Ce lieu s'obtiendra donc en éliminant β et β' entre la relation (3) et les deux relations
$$\beta+\beta'=\frac{2a(x-y)}{x-2a},\qquad \beta\beta'=\frac{a^2x}{x-2a}.$$

On trouve ainsi
$$2[(x-y)^2-x(x-2a)]-(y-a)^2=0$$
ou bien
$$(y-a)(y-4x+3a)+2a^2=0.$$

C'est l'équation d'une hyperbole admettant comme asymptotes les droites
$$y-a=0,\qquad y-4x+3a=0.$$

BROS, à Albi.

Solution géométrique des deux premières parties. — 1. L'inversion de centre C et ayant pour puissance a^2 transforme le cercle (C) en lui-même et les cercles (ω) en eux-mêmes; elle transforme Oy en le cercle décrit sur BC comme diamètre. L'enveloppe des cercles (ω) se compose donc de Oy et de ce cercle. Le lieu des centres est alors évident ainsi que la région du plan recouverte par les cercles (ω).

2. L'inversion de centre O et ayant pour puissance a^2 transforme les deux cercles associés l'un dans l'autre. Donc le lieu de leurs points de rencontre est le cercle de rayon a ayant pour centre le point O.

PARROD.

Bonne solution : M. Grangier, à Monbydier.

Assez bonnes solutions : MM. J. Yernaux, à Mons ; René Bain ; F. Sockeel, école du Point du jour, à Lyon ; P. Gaussot, lycée de Bar-le-Duc ; G. Cotty, lycée de Dijon ; G. Foucay, à Roanne ; A. Dediû, à Bucarest.

1379. — *Soient* A *et* B *deux points quelconques d'une conique* (C) ; *les deux foyers de* (C) *sont sur une conique ayant pour foyers les points* A *et* B, *et les tangentes à cette conique aux foyers de* (C) *passent par le pôle de* AB *par rapport à* (C).

Solution analytique. — Pour fixer les idées, supposons que la conique (C) soit un ellipse rapportée à son centre et à ses axes ; son équation tangentielle est alors

$$(C) \qquad a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 = 0.$$

L'équation des points d'intersection de la droite AB (u_0, v_0, w_0) et de (C) est

$$(a^2u^2 + b^2v^2 - w^2)(a^2u_0^2 + b^2v_0^2 - w_0^2) - (a^2uu_0 + b^2vv_0 - ww_0)^2 = 0.$$

Une conique (Γ) admettant pour foyers les points A et B a pour équation

$$(\Gamma) \qquad (a^2u^2 + b^2v^2 - w^2)(a^2u_0^2 + b^2v_0^2 - w_0^2) - (a^2uu_0 + b^2vv_0 - ww_0)^2 + \lambda(u^2 + v^2) = 0.$$

Le pôle P de la droite AB par rapport à (C) est

$$(P) \qquad a^2uu_0 + b^2vv_0 - ww_0 = 0.$$

Nous allons déterminer λ de façon que le pôle π de Ox par rapport à (Γ) coïncide avec le point P; nous montrerons ensuite que la conique (Γ) passe par les foyers F et F′ de (C).

Le pôle π de Ox par rapport à Γ a pour équation

$$b^2v(a^2u_0^2 + b^2v_0^2 - w_0^2) - b^2v_0(a^2uu_0 + b^2vv_0 - ww_0) + \lambda v = 0$$

ou bien

$$(\pi) \qquad a^2b^2u_0v_0 . u + (w_0^2b^2 - \lambda - a^2b^2u_0^2)v - b^2v_0w_0w = 0.$$

Les points P et π coïncident lorsque

$$(1) \qquad b^2(a^2u_0^2 + b^2v_0^2 - w_0^2) + \lambda = 0.$$

Cela posé, l'équation des points d'intersection de (Γ) et de Ox est

$$[(a^2u^2 + b^2v^2 - w^2)(a^2u_0^2 + b^2v_0^2 - w_0^2) + \lambda(u^2 + v^2) - (a^2uu_0 + b^2vv_0 - ww_0)^2]$$
$$\times [b^2(a^2u_0^2 + b^2v_0^2 - w_0^2) + \lambda - b^4v_0^2] - [b^2v(a^2u_0^2 + b^2v_0^2 - w_0^2) + \lambda v - b^2v_0(a^2uu_0 + b^2vv_0 - ww_0)]^2 = 0.$$

En tenant compte de la relation (1), cette équation se réduit à

$$v^2u^2 - v^2 = 0.$$

La conique Γ passe donc par F et F′.

La réciproque de la proposition est immédiate.

BROS, à Albi.

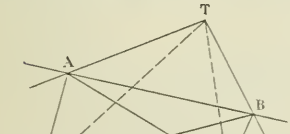
Solution géométrique. — Supposons pour fixer les idées que la conique (C) soit une ellipse, et soient A et B deux points de cette ellipse, F et F′ ses foyers. Nous aurons

$$AF + AF' = BF + BF'$$

et

$$AF - BF = BF' - AF',$$

ce qui montre que les points F et F′ appartiennent à deux branches distinctes d'une hyperbole ayant pour foyers les points A et B. D'autre part, soit T le pôle de AB ; la droite FT est bissectrice de l'angle AFB et la droite F′T, bissectrice de l'angle AF′B ; donc ces deux droites sont les tangentes à l'hyperbole aux points F et F′.



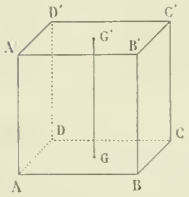
AMBLARD, conducteur des Ponts et Chaussées à Ruines (Cantal).

Bonnes solutions : MM. G. Cotty, lycée de Dijon ; Grangier, à Monbydier ; A. Dediu, à Bucarest ; E. Vagneux.

MÉCANIQUE

1382. — *On considère un parallélépipède rectangle* ABCDA'B'C'D' *et les douze forces* AA', BB', CC' DD', AB, BC, CD, DA et A'D', B'C', C'B', B'A'. *Réduire ce système.*

Par raison de symétrie, les quatre forces égales, parallèles et de même sens AA', BB', CC' et DD' se composent en une force unique égale à 4 AA', appliquée le long de la droite GG', G et G' étant les centres des faces ABCD et A'B'C'D'.



Les quatre forces AB, BC, CD et DA ont une résultante nulle, car la projection d'un contour fermé sur un axe quelconque est nulle; elles se réduisent donc à un couple égal à — 2 aire ABCD.

Les forces appliquées le long du contour A'B'C'D' se réduisent aussi à un couple égal à + 2 aire A'B'C'D' ou bien + 2 aire ABCD.

Les deux couples se détruisent donc. Le système de forces se réduit à une résultante unique.

BROS, à Albi.

QUESTIONS PROPOSÉES

1456. — On donne deux axes de coordonnées rectangulaires et les deux cercles ayant pour équations

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0, \qquad (x - a)^2 + y^2 - R'^2 = 0.$$

1° Former l'équation générale des cercles Γ tangents au premier et orthogonaux au second.

2° Lieu des centres des cercles Γ.

3° Enveloppe des polaires d'un point fixe P par rapport à ces cercles. On trouve une conique S. Étudier le genre de cette conique selon la position du point P dans le plan.

4° Lieu des points P pour lesquels la conique S est une hyperbole équilatère.

5° Déterminer les points P pour lesquels la conique S est un cercle.

CH. MICHEL.

1457. — D'un point M pris dans le plan d'une ellipse on abaisse sur les diamètres conjugués égaux les perpendiculaires MP, MQ; la médiane MR du triangle MPQ est perpendiculaire à la polaire du point M. Cas où le point M est sur l'ellipse.

G. FONTENÉ.

1458. — 1° Une droite roule sans glisser sur un cercle avec une vitesse angulaire égale à 1. Trouver les équations du mouvement d'un point de la droite invariablement lié à cette droite.

2° Former les composantes de la vitesse; placer la tangente et la normale à la trajectoire en un point. Montrer que le mouvement est uniformément accéléré.

3° Calculer l'accélération, la composante tangentielle et la composante normale ainsi que le rayon de courbure. Lieu de l'extrémité du vecteur accélération.

4° La masse du point mobile étant égale à 1, donner l'expression du travail pendant le temps t et donner le travail accompli pendant la première heure.

Nota. Le rayon du cercle est 1; au temps $t = 0$ le mobile coïncide avec le point de contact de la droite et du cercle. Les unités employées sont les unités C.G.S.

E. H.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

16e Année. N° 3. Décembre 1905.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

NOTE RELATIVE AUX VOLUMES DES FOUDRES OVALES

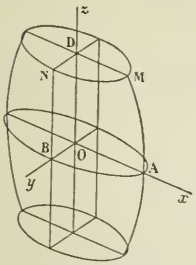
par **M. G. Maupin**, professeur au collège de Saintes.

I. — Il y a quelques années, le propriétaire d'un foudre ovale rempli d'eau-de-vie vint me demander s'il était possible de calculer exactement le volume de ce foudre. Lui, en savait la contenance par une mesure directe, et il se trouvait en litige avec la régie qui, ayant appliqué une formule quelconque, lui comptait un hectolitre en trop.

II. — Le foudre avait une forme singulière, les fonds étaient ovales, les douves avaient des courbures différentes et deux d'entre elles étaient absolument rectilignes. Après examen, j'ai pensé qu'on pouvait supposer elliptiques les douves de plus forte courbure, et que la surface devait alors être considérée comme engendrée par une ellipse de grand axe constant, se déplaçant parallèlement à elle-même en s'appuyant sur lesdites douves elliptiques.

III. — Reportons-nous à la figure et posons

$$OD = c, \qquad DM = \alpha, \qquad OA = a, \qquad OB = DN = b.$$



Nous trouvons sans difficulté

$$V = \int_{-c}^{+c} \frac{\pi b}{c} \sqrt{a^2c^2 + z^2(\alpha^2 - a^2)}\, dz,$$

et, par suite,

$$(1) \qquad V = \pi bc\left[\alpha + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - \alpha^2}} \arccos \frac{\alpha}{a}\right].$$

IV. — Dans l'application, on avait, en centimètres,

$$c = 74, \qquad \alpha = 50, \qquad a = 54, \qquad b = 65,$$

ce qui donne, en employant une table de logarithmes à sept décimales,

$$V = 1\,593 \text{ litres}.$$

Le propriétaire trouvait 1 594 litres.

V. — J'ai vu ensuite plusieurs autres foudres ovales et j'ai remarqué que b était, suivant les cas, non pas toujours supérieur à a, mais aussi égal ou inférieur. D'après les connaisseurs, les foudres ovales présentaient deux avantages : 1° une rangée placée le long du mur d'une cave, les douves rectilignes se touchant, avait une grande stabilité ; 2° ils tenaient plus de liquide que les foudres ronds.

VI. — La première assertion est certaine ; la seconde mérite d'être vérifiée. Elle signifie que si, au fond d'une cave, on peut placer en ligne m foudres ovales de dimensions (a, b) à la bonde et de volume V, ou n foudres ronds de dimensions (a, a) à la bonde et de volume V', on doit avoir

$$(2) \qquad mV - nV' > 0.$$

En effet, un foudre rond ayant pour hauteur $2c$, pour rayon au fond α, pour rayon à la bonde a, a pour volume

$$(3) \qquad V' = \frac{2}{3}\pi c\,(2a^2 + \alpha^2),$$

si on suppose encore la méridienne elliptique.

En tenant compte de la condition

$$(4) \qquad mb = na,$$

et en posant

$$(5) \qquad u = \text{arc cos } \frac{\alpha}{a},$$

l'inégalité (2) devient

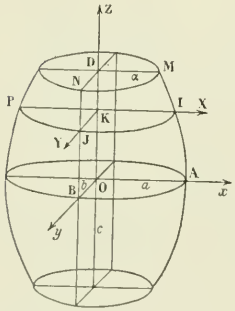
$$(6) \qquad \frac{3 \sin u \cos u + 3u - 4 \sin u - 2 \sin u \cos^2 u}{\sin u} > 0.$$

Or le numérateur de cette fraction est une fonction de u constamment croissante, nulle pour $u = 0$.

Toutefois, remarquons que *pratiquement*, en supposant de même épaisseur tous les foudres V et V', ceci n'est démontré que si $b \geqslant a$, sinon la somme des épaisseurs des parois serait plus grande pour les V que pour les V', et il serait impossible de conclure.

VII. — Enfin j'ajoute que ces foudres sont d'ordinaire employés isolément, soit qu'on en garde un à titre de travail curieux et soigné, soit qu'on en fasse faire un sur mesure pour remplir l'espace $2b$ laissé vide dans un chai par une rangée de foudres ronds et pour caler l'ensemble. D'après quelques données trop rares, je crois pouvoir dire que les foudres ovales coûtent 40 % de plus que les foudres ronds, et tiennent à peine 6 % de plus qu'eux.

Détail du calcul, qui n'est pas mis dans la note :



$OD = c$, $\qquad$ OK variable $= z$,

$DM = \alpha$, $\qquad \alpha < a$.

$OA = a$,

$OB = DN = b$;

La surface est engendrée par une ellipse dont un des axes est constant, et qui s'appuie sur l'ellipse MA.

Equation de KIJ dans son plan :

$$\frac{X^2c^2}{a^2c^2+z^2(\alpha^2-a^2)} + \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Surface de l'ellipse KIJ : $\pi \frac{b}{c} \sqrt{a^2c^2 + z^2(\alpha^2 - a^2)}$.

Volume du cylindre infiniment petit de base KIJ (base, ellipse *entière* KIJ, hauteur dz) :

$$dV = \pi \frac{b}{c} \sqrt{a^2c^2 + z^2(\alpha^2 - a^2)}\, dz;$$

puis

$$V = \int_{-c}^{+c} \pi \frac{b}{c} \sqrt{a^2c^2 + z^2(\alpha^2 - a^2)}\, dz$$

et, en posant

$$z \frac{\sqrt{a^2 - \alpha^2}}{ac} = \sin \varphi,$$

$$V = \pi \frac{a^2cb}{\sqrt{a^2 - \alpha^2}} \left[\text{arc sin } \frac{\sqrt{a^2 - \alpha^2}}{a} + \alpha \frac{\sqrt{a^2 - \alpha^2}}{a^2} \right],$$

$$V = \pi bc \left[\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - \alpha^2}} \text{ arc sin } \frac{\sqrt{a^2 - \alpha^2}}{a} + \alpha \right] = \pi bc \left[\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - \alpha^2}} \text{ arc cos } \frac{\alpha}{a} + \alpha \right].$$

Application :

$$b = 65^{\text{cm}}, \qquad c = 74, \qquad a = 54, \qquad \alpha = 50.$$

$$V = \pi \times 65 \times 74 \left[\frac{54^2}{\sqrt{416}} \times 0{,}3873167 + 50 \right],$$
$$V = \pi \times 65 \times 74 \times 105{,}374 \quad \text{en centimètres cubes}$$
$$V = 1593^{l},13.$$

Voici en outre la dérivée de λ :

$$\lambda = 3 \sin u \cos u + 3u - 4 \sin u - 2 \sin u \cos^2 u,$$
$$\lambda' = 3 \cos^2 u - 3 \sin^2 u + 3 - 4 \cos u - 2 \cos^3 u + 4 \sin^2 u \cos u,$$
$$\lambda' = 6 \cos^2 u - 4 \cos u - 2 \cos^3 u + 4(1 - \cos^2 u) \cos u,$$
$$\lambda' = 6 \cos^2 u - 4 \cos u - 2 \cos^3 u + 4 \cos u - 4 \cos^3 u,$$
$$\lambda' = 6 \cos^2 u - 6 \cos^3 u > 0.$$

SUR LA DERIVÉE n^e DE e^{-x^2}

par M. **J. Richard**, professeur au lycée de Dijon.

La *Revue de Mathématiques spéciales* a publié la solution d'un exercice relatif à la dérivée n^e de e^{-x^2}. Cet exercice peut se résoudre par la méthode suivante, que M. Hermite exposait dans son cours pour les polynomes de Legendre.

La dérivée n^e de e^{-x^2} est de la forme $P_n e^{-x^2}$, P_n étant un polynome de degré n. Je passe la démonstration facile de cette proposition.

Je vais démontrer que l'équation $P_n = 0$ a toutes ses racines réelles.

1° L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} P_n e^{-x^2} g(x) dx$, où $g(x)$ est un polynome, a un sens. Ceci est facile à démontrer. Je passe également sur ce point.

2° Si $g(x)$ est un polynome de degré inférieur à n, cette intégrale est nulle.

En effet, prenons la formule suivante :

$$\int U_n V dx = U_{n-1} V - U_{n-2} V_1 + U_{n-3} V_2 - \cdots + (-1)^{n-1} U V_{n-1} + (-1)^n \int U V_n dx,$$

dans laquelle U_p désigne la dérivée p^e de U. Cette formule se démontre simplement en prenant les dérivées des deux membres et constatant qu'elles sont égales. Alors les deux membres ne diffèrent que par une constante. Comme les intégrales ne sont déterminées qu'à une constante près, les limites de l'intégration n'étant pas fixées, on peut supposer que les deux membres sont égaux.

Or, dans cette formule, faisons $V = g(x)$, $U = e^{-x^2}$.

Le premier membre sera

$$\int P_n e^{-x^2} g(x) dx ;$$

dans le second membre les premiers termes contiennent e^{-x^2} en facteur, le dernier est nul si $g(x)$ *est de degré moindre que* n, car $V_n = 0$.

Donc, dans ces conditions, nous aurons

$$\int P_n e^{-x^2} g(x) dx = e^{-x^2} \Phi(x),$$

$\Phi(x)$ étant un polynome entier.

Pour $x = -\infty$ et $x = +\infty$, le second membre est nul, donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_n e^{-x^2} g(x) dx = 0.$$

3° L'équation $P_n = 0$ a toutes ses racines réelles et distinctes.

En effet, si $g(x) = 1$, l'identité précédente montre que P_n ne peut pas garder toujours le même signe, donc P_n doit s'annuler ; soit α une racine, on aura $P_n = (x - \alpha)\psi(x)$, $\psi(x)$ étant de degré $n - 1$.

Dans l'identité, faisons $g(x) = (x - \alpha)$; on aura, puisque $P_n = (x - \alpha)\psi(x)$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}(x - \alpha)^2\psi(x)dx = 0,$$

ce qui montre que $\psi(x)$ ne peut garder un signe constant, alors il doit s'annuler. Soit β une racine, on aura

$$P_n = (x - \alpha)(x - \beta)Q(x) ;$$

dans l'identité faisons $g(x) = (x - \alpha)(x - \beta)$ et remplaçons P_n par $(x - \alpha)(x - \beta)Q(x)$; on aura

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}(x - \alpha)^2(x - \beta)^2Q(x) = 0,$$

donc $Q(x)$ doit s'annuler. En continuant ce raisonnement, on démontre l'existence de n racines réelles pour P_n.

Une racine ne peut être double, car si l'on avait

$$P_n = (x - \alpha)^2Q(x),$$

on pourrait faire, dans l'identité, $g(x) = Q(x)$, et alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}(x - \alpha)^2[Q(x)]^2dx = 0,$$

ce qui est absurde, la quantité sous le signe $\int$ étant toujours positive. On verrait de même que si P_n avait une racine imaginaire $p + qi$, on aurait

$$P_n = [(x - p)^2 + q^2]H(x),$$

et, en prenant $g(x) = H(x)$, on aurait

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}[(x - p)^2 + q^2][H(x)]^2dx = 0,$$

ce qui est impossible pour la même raison que ci-dessus.

La proposition est donc surabondamment démontrée.

La proposition donnée dans la *Revue* (N° 1368) n'est pas identique à celle-ci. Elle s'y ramène en posant $x + \frac{1}{2} = z$, puisqu'il s'agit du polynome Q_n, tel que y étant égal à e^{-z^2-z} on ait $y_n = e^{-z^2-z}Q_n$; or $e^{-z^2-z} = e^{\frac{1}{4}} \times e^{-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}$.

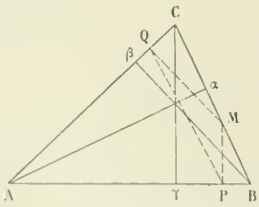
GÉOMÉTRIE

1376. — *On considère un triangle* ABC *et un point* M *variable sur* BC. *On joint ses projections sur* AB *et sur* AC *par une droite qui enveloppe une parabole* H_A. *Il existe de même les deux paraboles* H_B *et* H_C.

1° *Construire les divers éléments de ces paraboles.*

2° *Construire les tangentes communes à ces paraboles prises deux à deux et prouver géométriquement qu'elles n'ont aucun point d'intersection réel.*

Soient P et Q les projections du point M sur les côtés AB et AC ; quand le point M se déplace sur BC, les points P et Q décrivent sur AB et AC des divisions homographiques. Donc la droite PQ enveloppe une conique tangente aux droites AC et AB. De plus, cette conique est une parabole, car lorsque le point P est à l'infini sur AB, le point Q est aussi à l'infini sur AC, et la droite PQ coïncide avec la droite de l'infini.



En plaçant le point M successivement aux points B et C, on voit que la parabole H_A est tangente aux deux hauteurs $B\beta$ et $C\gamma$; par suite, cette parabole est bien déterminée par les quatre tangentes AB, AC, $B\beta$, $C\gamma$. Comme les deux tangentes menées par le point β sont perpen-

diculaires, la directrice de la parabole passe par le point β ; elle passe aussi par le point γ. Donc la directrice est la droite $\beta\gamma$.

D'autre part, le foyer est le point commun aux deux cercles $AC\gamma$ et $AB\beta$: c'est le point α.

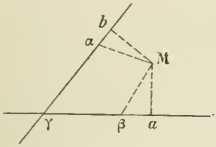
D'une manière analogue, la parabole Π_B est tangente aux droites BA, BC, $A\alpha$, $C\gamma$; elle a pour directrice la droite $\alpha\gamma$ et pour foyer le point β.

On voit déjà que les droites $A\beta$ et $C\gamma$ sont deux tangentes communes aux paraboles Π_A et Π_B. La troisième des tangentes communes à ces deux paraboles est la perpendiculaire élevée en $\alpha\beta$ en son milieu.

Cherchons maintenant si ces paraboles ont des points communs réels. Soit M l'un d'eux ; joignons $M\alpha$, $M\beta$, et abaissons Ma et Mb respectivement perpendiculaires sur les directrices $\beta\gamma$ et $\alpha\gamma$ des paraboles Π_A et Π_B.

On doit avoir en même temps

$$M\alpha = Ma \qquad \text{et} \qquad M\beta = Mb.$$



Or, en général, dans les triangles rectangles $Mb\alpha$ et $Ma\beta$, on a

$$Mb < M\alpha \qquad \text{et} \qquad Ma < M\beta.$$

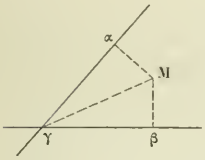
Remplaçons dans ces inégalités Mb par $M\beta$ et Ma par $M\alpha$; nous avons en même temps

$$M\beta < M\alpha \qquad \text{et} \qquad M\alpha < M\beta,$$

ce qui est manifestement impossible.

Donc les deux paraboles n'ont en général pas de point commun réel.

La démonstration est en défaut si l'on a à la fois $Mb = M\alpha$ et $Ma = M\beta$, c'est-à-dire si $M\alpha$ et $M\beta$ sont respectivement perpendiculaires à $\gamma\alpha$ et $\gamma\beta$. Dans ce cas, le point M sera commun aux deux paraboles, si l'on a $M\alpha = M\beta$.



Cette égalité ne peut avoir lieu que si $\alpha\gamma = \gamma\beta$, c'est-à-dire si le triangle $\alpha\beta\gamma$ est isocèle ou, ce qui revient au même, si le triangle donné est lui-même isocèle.

Si l'on a $\alpha\gamma = \gamma\beta$, les deux paraboles Π_A et Π_B ont un point commun M obtenu en menant par α et β des perpendiculaires à $\gamma\alpha$ et $\gamma\beta$. De plus, les paraboles sont tangentes en ce point à la droite $M\gamma$.

PARROD, à Vesoul.

Bonnes solutions par MM. Bros, à Albi ; G. Cotty, lycée de Dijon ; M. Grangier, à Monbydier.

MÉCANIQUE

1377. — *Un point matériel* M *est attiré par un centre fixe* O *proportionnellement à la distance et lancé en un point* A, *avec une vitesse donnée* v_0, *dans une direction quelconque d'un plan* P *passant par le point* A.

1° *Trouver la trajectoire décrite par le point* M *et le lieu de cette trajectoire quand la direction de* v_0 *varie dans le plan* P.

2° *Pour chaque plan* P *passant par le point* A, *le lieu est un ellipsoïde. Montrer que l'un d'eux est de révolution autour de* OA *et trouver son intersection avec celui qui correspond à un plan quelconque* P. *Expliquer le résultat.*

3° *Trouver le lieu des ombilics de cet ellipsoïde quand la direction du plan* P *varie.*

1. Je prends pour axe des x la droite OA et, pour axes des y et des z, deux autres droites perpendiculaires entre elles et perpendiculaires à OA. Je désigne OA par a, par u, v, w les paramètres de la normale au plan P et par α, β, γ les composantes de la vitesse v_0. J'ai alors successivement

$$u(x-a) + vy + wz = 0,$$

pour équation du plan P, et, entre α, β, γ, les relations

$$u\alpha + v\beta + w\gamma = 0,$$
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = v_0^2.$$

Soient alors $k.MO$ la force attractive qui sollicite le point M et x, y, z les coordonnées de ce point ; les équations du mouvement sont immédiates ; ce sont

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x,$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky. \quad \text{ou} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y,$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = -kz, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = -\omega^2 z,$$

en désignant par ω^2 le nombre positif $\frac{k}{m}$. Leurs intégrales sont connues ; ce sont

$$x = A\cos\omega t + A'\sin\omega t,$$
$$y = B\cos\omega t + B'\sin\omega t,$$
$$z = C\cos\omega t + C'\sin\omega t,$$

et, si on tient compte des circonstances initiales du mouvement, c'est-à-dire si l'on exprime qu'à l'époque $t = 0$, $x = a$, $y = 0$, $z = 0$, $v_x = \alpha$, $v_y = \beta$, $v_z = \gamma$,

$$x = a\cos\omega t + \frac{\alpha}{\omega}\sin\omega t,$$
$$y = \frac{\beta}{\omega}\sin\omega t,$$
$$z = \frac{\gamma}{\omega}\sin\omega t.$$

Dès lors, nous aurons le lieu du point (x, y, z) en éliminant α, β, γ et t entre ces trois équations et les relations initiales. Nous avons d'abord α, β, γ en fonction du temps et de x, y, z. Alors les deux relations rappelées deviennent

$$ux + vy + wz - ua\cos\omega t = 0,$$
$$(x - a\cos\omega t)^2 + y^2 + z^2 = \frac{v_0^2}{\omega^2}\sin^2\omega t;$$

et il n'y a plus qu'à éliminer $\cos\omega t$ entre ces deux équations, ce qui donne

$$(1) \qquad (vy + wz)^2 + u^2(y^2 + z^2) + \frac{v_0^2}{a^2\omega^2}P^2 - \frac{u^2 v_0^2}{\omega^2} = 0.$$

C'est l'équation du lieu ; Py désigne la fonction linéaire

$$ux + vy + wz.$$

2. Il est visible que c'est là l'équation d'un ellipsoïde ayant l'origine pour centre. Mais ceci était évident géométriquement : en effet, il est établi dans le cours de mécanique que la trajectoire du point M pour l'une des vitesses v_0 est une ellipse ayant pour diamètres conjugués OA et le vecteur OB parallèle à v_0 et ayant pour longueur $\frac{v_0}{\omega}$; le lieu du point B est donc un cercle ayant pour centre le point O et pour rayon $\frac{v_0}{\omega}$ dans le plan P_1, parallèle au plan P et mené par le point O ; le lieu total du point M est engendré par une ellipse dont l'un des diamètres est fixe, OA, et dont l'extrémité du diamètre conjugué décrit le cercle signalé ; nous savons que ce lieu est un ellipsoïde ayant pour plan cyclique le plan P_1 et pour diamètre conjugué de ce plan la droite OA.

Si le plan P_1 est perpendiculaire à OA, l'ellipsoïde correspondant est de révolution : nous aurons

son équation en faisant $u = 1$, $v = 0$, $w = 0$; ceci nous donne

$$(2) \qquad y^2 + z^2 + \frac{v_0^2}{a^2\omega^2} x^2 = \frac{v_0^2}{\omega^2},$$

et l'équation montre aussi, avec clarté, que cet ellipsoïde est de révolution. La géométrie nous dit qu'il n'y en a pas d'autre; le calcul ordinaire le ferait voir tout aussi aisément.

Si nous retranchons maintenant de l'équation (1), l'équation (2) multipliée au préalable par u^2, nous obtenons

$$(vy + wz)^2 + \frac{v_0^2}{a^2\omega^2}(P^2 - u^2x^2) = 0;$$

cette équation se décompose en deux autres: $vy + wz = 0$, qui représente un plan passant par l'axe des x, et

$$vy + wz + \frac{v_0^2}{a^2\omega^2}(2ux + vy + wz) = 0,$$

qui représente un autre plan passant par le point O.

Ce résultat était évident *a priori*, car si on envisage le plan P qui correspond à un ellipsoïde quelconque, et le plan P′ qui correspond à l'ellipsoïde de révolution, ces deux plans se coupent suivant une droite Δ, et si l'on place la vitesse v_0 sur cette droite, le point M décrit une ellipse commune aux deux ellipsoïdes ; ainsi s'explique l'origine de la première section plane, celle qui est située dans un plan passant par Ox. L'autre plan contient le lieu des intersections des ellipses qui correspondent à deux vitesses v_0 situées dans un même plan avec Ox.

3. Le point A étant toujours un ombilic de la surface, le lieu des ombilics de l'ellipsoïde (1) est évident : c'est la sphère ayant l'origine comme centre et pour rayon a.

Il est intéressant de retrouver ce résultat par le calcul ; c'est par là que nous allons terminer. Si nous nous appuyons sur ce que le plan P est un plan cyclique, nous voyons de suite que les deux plans cycliques sont fournis par l'équation suivante :

$$(vy + wz)^2 + u^2(y^2 + z^2) + \frac{v_0^2}{a^2\omega^2} P^2 - u^2(x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

Cette équation se décompose en effet en

$$ux + vy + wz = 0$$

et

$$vy + wz - ux + \frac{v_0^2}{a^2\omega^2} P = 0.$$

Les ombilics relatifs au premier plan cyclique sont fixes. Posons

$$\theta = \frac{\dfrac{v_0^2}{a^2\omega^2} - 1}{\dfrac{v_0^2}{a^2\omega^2} + 1},$$

le second plan cyclique s'écrira

$$Q \equiv \theta ux + vy + wz = 0,$$

et nous aurons le lieu des ombilics correspondants en prenant le diamètre conjugué de ce plan et éliminant u, v, w entre ses équations et celle de l'ellipsoïde. Or, en tenant compte de ce que

$$\frac{v_0^2}{a^2\omega^2} = \frac{1 + \theta}{1 - \theta},$$

l'équation de l'ellipsoïde devient

$$(1 - \theta)[(vy + wz)^2 + u^2(y^2 + z^2)] + (1 + \theta)P^2 - a^2u^2(1 + \theta) = 0,$$

ou

$$(1 - \theta)[(vy + wz)^2 - u^2x^2 + u^2(x^2 + y^2 + z^2)] + (1 + \theta)P^2 - a^2u^2(1 + \theta) = 0,$$

ou enfin

$$2PQ + (1-\theta)u^2(x^2+y^2+z^2) - (1+\theta)a^2u^2 = 0.$$

Rappelons maintenant que les équations du diamètre conjugué du plan Q sont

$$\frac{f'x}{\theta u} = \frac{f'y}{v} = \frac{f'z}{w};$$

nous aurons ici

$$\frac{uQ + \theta uP + (1-\theta)u^2x}{\theta u} = \frac{vP + vQ + (1-\theta)u^2y}{v} = \frac{wP + wQ + (1-\theta)u^2z}{w},$$

ou bien, après avoir retranché $P+Q$ de chaque rapport et simplifié,

$$\frac{x + \frac{Q}{u}}{\theta u} = \frac{y}{v} = \frac{z}{w}.$$

Pour éliminer u, v, w, nous pouvons prendre $v = y$, $w = z$ et porter dans les équations du diamètre et dans celle de l'ellipsoïde ; nous aurons deux équations ne contenant plus que u :

$$\theta u^2 - (\theta+1)xu - y^2 - z^2 = 0,$$

et

$$2(ux+y^2+z^2)(\theta ux+y^2+z^2) + (1-\theta)u^2(x^2+y^2+z^2) - (1+\theta)a^2u^2 = 0.$$

La seconde de ces équations peut s'écrire ainsi

$$2\theta u^2x^2 + 2(y^2+z^2)[(\theta+1)ux+y^2+z^2] + (1-\theta)u^2(x^2+y^2+z^2) - (1+\theta)a^2u^2 = 0;$$

or la quantité entre crochets est égale à θu^2, en vertu de la première équation; il n'y a plus qu'à effectuer cette substitution pour parvenir au résultat final

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0.$$

Bonnes solutions : MM. Parrod; M. Laurence ; Bros, à Albi. (Ces trois solutions ne diffèrent de la précédente qu'en ce que le calcul relatif au lieu des ombilics n'y figure pas) ; G. Foucry, à Roanne ; M. Grangier, à Monbydier ; (dans les deux dernières copies figure le calcul relatif au lieu des ombilics; celle de M. Grangier est particulièrement bonne).

1384. — 1° *Former l'équation de la trajectoire d'un point mobile* M, *qui possède une accélération constante parallèle à la direction* $y = mx$, *qui passe à l'origine avec une vitesse dirigée suivant la droite* $y = x$ *et qui passe enfin par un point donné* B(0, b) *de l'axe des* y.

2° *Dans l'hypothèse* $m = 2$, *déterminer l'axe, la tangente au sommet et le paramètre de cette trajectoire.*

3° m *étant quelconque, on appelle* v_0 *et* g *les projections sur* Ox *de la vitesse à l'origine et de l'accélération du point* M. *Déterminer ces deux quantités de façon que la vitesse au point* A, *autre que l'origine, où le mobile rencontre* Ox, *soit représentée par un vecteur* AT *limité en* T *à l'axe des* y.

4° *Trouver le lieu de l'extrémité du vecteur équipollent à* AT *mené par l'origine, quand* m *varie.*

1. Soient v_0 et g les projections sur Ox de la vitesse à l'origine et de l'accélération du point M ; leurs projections sur Oy sont v_0 et mg, et les équations du mouvement peuvent s'écrire

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = mg.$$

On en tire, en intégrant,

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = gt + v_0, \qquad \frac{dy}{dt} = mgt + v_0,$$

puis

$$(2) \qquad x = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t, \qquad y = \frac{1}{2}mgt^2 + v_0t,$$

en supposant le temps compté à partir de l'instant où le mobile est à l'origine.

Pour avoir l'équation de la trajectoire, il faut éliminer m entre les équations (2); l'élimination se

fait très simplement en formant les combinaisons

$$y - x = \frac{1}{2} g t^2 (m - 1),$$

$$y - mx = - v_0 t (m - 1),$$

puis en élevant la deuxième au carré et en divisant membre à membre. Nous trouvons ainsi

$$(y - mx)^2 - \frac{2 v_0^2 (m - 1)}{g} (y - x) = 0.$$

Ecrivons enfin que cette courbe passe par le point $(0, b)$; nous avons

$$\frac{2 v_0^2 (m - 1)}{g} = b,$$

et par suite, l'équation de la trajectoire est

$$(y - mx)^2 - b(y - x) = 0.$$

Elle représente une parabole dont l'axe est parallèle à la droite $y - mx = 0$.

2. Pour $m = 2$, cette équation devient

$$(y - 2x)^2 - b(y - x) = 0.$$

Un diamètre quelconque a pour équation $y - 2x + \lambda = 0$, et pour obtenir la tangente à l'extrémité, nous écrivons l'équation de la courbe sous la forme

$$(y - 2x + \lambda)^2 - 2\lambda(y - 2x) - \lambda^2 - b(y - x) = 0,$$

ou

$$(y - 2x + \lambda)^2 + x(b + 4\lambda) - y(b + 2\lambda) - \lambda^2 = 0.$$

Exprimons que le diamètre $y - 2x + \lambda = 0$ est perpendiculaire à la tangente

$$(b + 4\lambda)x - (b + 2\lambda)y - \lambda^2 = 0,$$

nous avons $\lambda = -\frac{3b}{10}$, et l'équation précédente prend la forme

$$\left(y - 2x - \frac{3b}{10}\right)^2 - \frac{b}{5}\left(x + 2y + \frac{9b}{20}\right) = 0.$$

L'axe a pour équation $y - 2x - \frac{3b}{10}$ et la tangente au sommet $x + 2y + \frac{9b}{10}$.

Prenons la première droite pour axe des X, la deuxième pour axe des Y ; les formules de transformation sont

$$y - 2x - \frac{3b}{10} = Y\sqrt{5}, \qquad x + 2y + \frac{9b}{20} = X\sqrt{5},$$

et l'équation de la courbe s'écrit

$$5Y^2 - \frac{bX\sqrt{5}}{5} = 0, \qquad \text{ou} \qquad Y^2 - \frac{bX}{5\sqrt{5}} = 0,$$

ce qui montre que le paramètre est égal à $\frac{b}{10\sqrt{5}}$.

3. L'abscisse du point A est $-\frac{b}{m^2}$, alors la projection du vecteur AT sur Ox est $\frac{b}{m^2}$. Le mobile est en A à l'instant $t = -\frac{2v_0}{mg}$, et à cet instant la projection de la vitesse sur Ox est $-\frac{2v_0}{m} + v_0$.

On a donc

$$v_0 m(m - 2) = b;$$

on en déduit

$$v_0 = \frac{b}{m(m - 2)}.$$

puis la valeur de g est donnée par la formule (3)

$$g = \frac{2b(m-1)}{m^2(m-2)^2}.$$

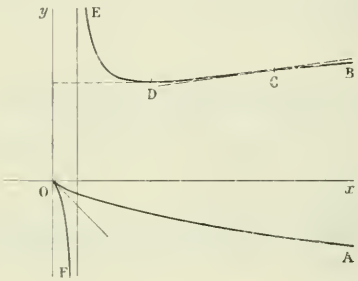
4. Pour $t = \frac{2v_0}{mg}$, $\frac{dy}{dt}$ est égal à $-v_0$; cette quantité est donc la projection de AT sur Oy; par suite, les coordonnées de l'extrémité du vecteur équipollent à AT dont l'origine est O sont

$$(4) \qquad x = \frac{b}{m^2}, \qquad y = \frac{-b}{m(m-2)}.$$

Eliminons m; nous obtenons l'équation du lieu

$$4xy^2 - b(x+y)^2 = 0.$$

Cette équation représente une cubique ayant un point de rebroussement à l'origine, la tangente en ce point étant la droite $x + y = 0$. Elle admet une asymptote $x = \frac{b}{4}$, et des branches paraboliques dans la direction Ox.



Pour la construire, nous nous servirons des équations (4).

En prenant les dérivées de x et de y par rapport à m, nous avons

$$x' = -\frac{2b}{m^3}, \qquad y' = \frac{2b(m-1)}{m^2(m-2)^2},$$

et le coefficient angulaire de la tangente en chaque point est

$$M = \frac{y'}{x'} = -\frac{m(m-1)}{(m-2)^2},$$

et sa dérivée par rapport à m, $\qquad M' = \frac{3m-2}{(m-2)^3}$.

Les variations de x, y, M sont résumées dans le tableau suivant :

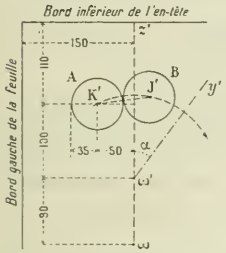
m	x'	y'	M'	x	y	M	RÉSULTATS
$-\infty$				0	0	-1	Rebroussement, tangente $y + x = 0$.
	+	—	+	cr.	déc.	cr	branche OA.
0				$\frac{+\infty}{+\infty}$	$\frac{-\infty}{+\infty}$	0	
	—	—	+	déc.	déc.	cr.	branche BC.
$\frac{2}{3}$				$\frac{9b}{4}$	$\frac{9b}{8}$	$\frac{1}{8}$	point d'inflexion C.
	—	—	—	déc.	déc.	déc.	branche CD.
1				b	b	0	tangente parallèle à Ox, D.
	—	+	—	déc.	cr.	déc.	branche DE.
2				$\frac{b}{4}$	$\frac{+\infty}{-\infty}$	$\frac{-\infty}{-\infty}$	asymptote $x = \frac{b}{4}$.
	—	+	+	déc.	cr.	cr.	branche FO.
$-\infty$				0	0	-1	rebroussement.

PARROD, à Vesoul.

Bonnes solutions par MM. Bros, à Albi ; Duimbert, à Grenoble ; Grangier, à Monbydier ; M. Laurence ; P. Magron, lycée de Nancy.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

1408. — *Dans un plan de front, on donne un axe vertical $\omega' z'$, et une circonférence* A *de centre* K′ *et dont le rayon est égal à 35 millimètres. On fait tourner l'ensemble de l'axe et de la circonférence autour d'un point ω' de l'axe, d'un angle α tel que, dans sa nouvelle position, la circonférence, désignée maintenant par* B, *soit tangente à* A. *L'axe prend une nouvelle position $\omega' y'$.*



Cela posé, on considère deux tores : le premier a pour axe $\omega' z'$ et pour méridienne la circonférence A ; *le second a pour axe $\omega' y'$ et pour méridienne la circonférence* B.

On demande de représenter par ses deux projections le solide commun aux deux tores, les parties vues en traits pleins, les parties cachées en points ronds.

Le croquis ci-contre, coté en millimètres, définit les données de l'épure. — ω est la projection horizontale de l'axe vertical.

On représentera les lignes de construction en traits rouges pleins.

(*Ecole Polytechnique, concours de 1905.*)

Mise en place et contours apparents. — On obtient la position du cercle B en décrivant l'arc de rayon $\omega' a'$ et prenant son intersection b' avec un arc de centre a' et dont le rayon est égal au diamètre du cercle A′. L'angle de la rotation étant ainsi défini, on obtient la position de l'axe $\omega' i'$ sans difficulté.

Le contour apparent vertical de chaque tore se compose des deux cercles méridiens de front et de leurs tangentes communes perpendiculaires à chaque axe et qui sont les projections verticales des deux parallèles décrits par les extrémités du diamètre parallèle à l'axe.

Le contour apparent horizontal du tore à axe vertical se compose des deux parallèles décrits par les extrémités du diamètre horizontal du cercle méridien. Celui du tore à axe oblique s'obtient en portant sur chacune des normales à l'ellipse, projection du cercle que décrit le centre du cercle méridien, à partir du pied de cette normale et dans les deux sens, une longueur égale au rayon du cercle méridien, ou, ce qui revient au même, en prenant l'enveloppe des contours apparents de la sphère génératrice du tore. On obtient ainsi une courbe extérieure, de forme ovale et une courbe intérieure qui, dans le cas actuel, présente deux points doubles et quatre rebroussements très voisins deux à deux de chaque point double.

On peut le reconnaître en mesurant les deux demi-axes de l'ellipse en question, qui sont ici $a = 50^{mm}$, $b = 40^{mm}$, d'où l'on déduit l'abscisse du point de rebroussement de la développée sur le grand axe :

$$\frac{c^2}{a} = 18^{mm},$$

d'où, le rayon de courbure au sommet de l'ellipse :

$$50 - 18 = 32.$$

Ce rayon étant moindre que le rayon du cercle méridien, la courbe intérieure présente bien quatre rebroussements. En un mot, ce contour apparent est formé de deux développantes de la développée de l'ellipse, trajectoire du centre : l'une externe, l'autre interne à cette ellipse.

Intersection des deux surfaces. — Les deux tores sont symétriques l'un de l'autre par rapport au plan de bout qui passe par la corde commune aux deux cercles méridiens A′ et B′, puisque cette corde est un axe de symétrie pour les deux sections méridiennes de front. Donc ce plan de bout coupera les deux tores suivant la même courbe qui est ainsi une partie de l'intersection. On en aura autant de points qu'on voudra en coupant le tore à axe vertical et ce plan de bout par des plans horizontaux dont chacun donnera un parallèle et une droite de bout qui se couperont en deux points appartenant à la section.

Cette courbe se projetant verticalement suivant la droite $c'd'$, on a de suite les points où sa projection horizontale touche le contour apparent du tore A en rappelant le point (e', e) où cette droite traverse le plan de l'équateur. On a aussi déterminé les points où la tangente est de bout, en rappelant les points c' et d' situés sur le parallèle le plus haut et le plus bas, en c et d. La projection horizontale de la courbe, comme celle de toute l'intersection des deux tores, est symétrique par rapport à la projection du plan de front des axes, qui est un plan de symétrie pour les deux surfaces.

Sans rien préjuger sur l'autre partie de l'intersection des deux tores, on peut appliquer la méthode des sphères auxiliaires ayant pour centre le point d'intersection des axes (ω, ω'). On obtient ainsi par points la projection verticale, par l'intersection des parallèles communs à la sphère et aux deux tores, et qui se projettent suivant des droites ; les sphères-limites $\omega' f'$ et $\omega' g'$ donnent les points φ' et γ' où cette courbe traverse la droite déjà obtenue comme partie de la projection verticale de l'intersection. Les sphères passant par le parallèle le plus haut et le parallèle le plus bas du tore A donnent des points l' et p' où la courbe touche le contour apparent vertical du tore A, deux autres points étant aux points de contact des cercles méridiens des deux tores.

On a aussi construit les points où la courbe traverse le plan de l'équateur du tore A et qui donnent les points où la projection horizontale touche le contour apparent de ce tore : tel est le point (m', m).

Tangentes. — On obtient la tangente en un point m' de la projection verticale en menant par ce point la perpendiculaire au plan des normales aux deux surfaces ; à cet effet, on a déterminé la ligne de front de ce plan en cherchant les points où les normales à chaque tore le long du parallèle du point M rencontrent l'axe : ainsi, la normale $b'\mu'$ donne s' sur l'axe du tore B, tandis que pour le tore A la normale étant horizontale puisque M est dans le plan de l'équateur, on obtient le point o'. Il suffit donc de mener par m' la perpendiculaire sur $o's'$ pour avoir la tangente cherchée.

En projection horizontale, on a construit la tangente au point l par la même méthode, en menant la perpendiculaire ln au plan des normales, qui est ici le plan vertical ln.

On obtient ainsi en projection verticale une courbe qui a la forme d'une ellipse, et en projection horizontale une courbe ayant deux points doubles sur la ligne des centres des tores, et symétrique par rapport à cette ligne, comme nous l'avons dit.

Des considérations géométriques conduisent d'ailleurs à reconnaître que la projection verticale de la courbe cherchée est effectivement une ellipse dont le petit axe est dans le plan de symétrie de bout $c'd'$, et le centre dans le plan de l'équateur de chaque tore, la projection horizontale se composant de deux ellipses ayant le même grand axe que la projection verticale.

Solide commun. — Le contour apparent du solide commun se compose des portions de contour apparent de chacun des tores, intérieures à l'autre tore, portions reliées par les arcs de la ligne d'intersection allant d'un point de contact sur l'un de ces contours apparents au point de contact sur l'autre. On devra donc supprimer toute partie du contour apparent de l'une des surfaces, qui serait extérieure à l'autre. Telles sont toutes les lignes tracées en trait mixte.

Parties vues et parties cachées. — Tout d'abord, il est manifeste qu'un point vu à la fois sur les deux surfaces est vu sur le solide commun. Nous partirons donc d'un tel point, par exemple, en projection horizontale, du point γ où l'ellipse traverse la section plane de bout, et qui est à la fois au-dessus de l'équateur et en avant du plan de front des axes, puis nous suivrons la courbe jusqu'à ce qu'elle touche un des contours apparents, en e par exemple. Elle cesserait d'être vue à partir de ce point si la ligne de contour apparent du tore A subsistait de part et d'autre du point de contact, mais elle forme en réalité à partir de ce point une partie du contour apparent du solide commun, jusqu'au point où elle touche le contour apparent du second tore, à partir duquel elle devient cachée par cette surface. En suivant la même règle, tout en cheminant sur la courbe de section, on détermine les arcs vus, tracés en plein, et les arcs cachés, tracés en pointillé rond.

On remarquera pour chaque tore, en projection horizontale, une portion du contour apparent intérieur limitant le solide commun et vue, tandis que l'autre, ru pour le tore A, et vzw pour le tore B, est enlevée comme extérieure au solide commun.

Note. — Voici comment on peut établir analytiquement les résultats énoncés plus haut à l'égard de la nature de l'intersection des deux tores.

Prenons le plan des axes pour plan des zx, l'axe donné pour axe des z et le point ω pour origine. Le cercle méridien a pour équation

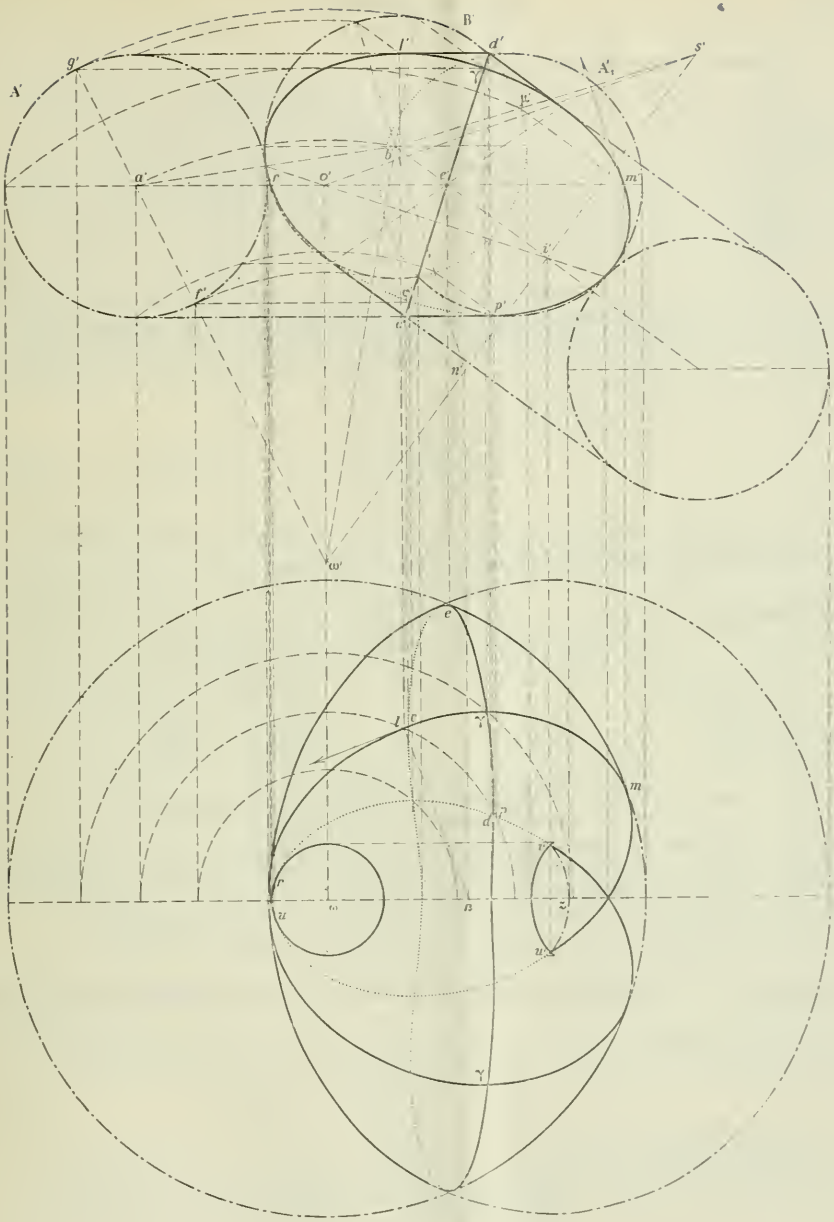
$$(x-a)^2 + (z-b)^2 - R^2 = 0,$$

ou

$$x^2 + z^2 - 2ax - 2bz + c^2 = 0, \qquad \text{en posant } c^2 = a^2 + b^2 - R^2.$$

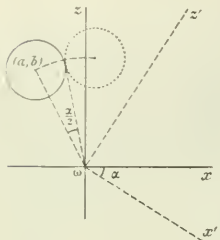
L'équation du tore engendré par ce cercle en tournant autour de vz s'en déduit en remplaçant x par $\sqrt{x^2+y^2}$, d'où

$$\text{(T)} \qquad (x^2+y^2+z^2-2bz+c^2)^2 - 4a^2(x^2+y^2) = 0.$$



Echelle : 2/3

On fait tourner l'axe ωz de l'angle α tel que



$$R = \sqrt{a^2 + b^2} \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Le second tore a pour équation par rapport au système $y\omega x'z'$

$$(x'^2 + y^2 + z'^2 - 2bz' + c^2)^2 - 4a^2(x'^2 + y^2) = 0.$$

Pour le rapporter aux premiers axes, nous poserons

$$x' = x \cos \alpha - z \sin \alpha,$$
$$z' = x \sin \alpha + z \cos \alpha,$$

d'où

$$(T') \quad [x^2 + y^2 + z^2 - 2b(x \sin \alpha + z \cos \alpha) + c^2]^2 - 4a^2[(x \cos \alpha - z \sin \alpha)^2 + y^2] = 0.$$

Cherchons les solutions communes à T et T'. Si on retranche membre à membre, on a deux différences de carrés qu'on peut transformer en produit

$$[2(x^2 + y^2 + z^2 + c^2) - 2b\{x \sin \alpha + z(\cos \alpha + 1)\}][2b(x \sin \alpha + z(\cos \alpha - 1)] - 4a^2[x(1 - \cos \alpha) + z \sin \alpha][x(1 + \cos \alpha) - z \sin \alpha] = 0,$$

qu'on peut écrire, en introduisant l'arc $\frac{\alpha}{2}$,

$$\left[x^2 + y^2 + z^2 + c^2 - 2b \cos \frac{\alpha}{2}\left(x \sin \frac{\alpha}{2} + z \cos \frac{\alpha}{2}\right)\right] 2b \sin \frac{\alpha}{2}\left[x \cos \frac{\alpha}{2} - z \sin \frac{\alpha}{2}\right] - 4a^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}\left[x \sin \frac{\alpha}{2} + z \cos \frac{\alpha}{2}\right]\left[x \cos \frac{\alpha}{2} - z \sin \frac{\alpha}{2}\right] = 0,$$

ou enfin

$$\left(x \cos \frac{\alpha}{2} - z \sin \frac{\alpha}{2}\right)\left[x^2 + y^2 + z^2 + c^2 - 2(a^2 + b^2) \cos \frac{\alpha}{2}\left(x \sin \frac{\alpha}{2} + z \cos \frac{\alpha}{2}\right)\right] = 0.$$

Cette équation peut remplacer l'équation (T'). Elle se décompose en

$$(P) \qquad x \cos \frac{\alpha}{2} - z \sin \frac{\alpha}{2} = 0,$$

plan passant par ωy, et la sphère

$$(S) \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2(a^2 + b^2) \cos \frac{\alpha}{2}\left(x \sin \frac{\alpha}{2} + z \cos \frac{\alpha}{2}\right) = 0.$$

Donc l'intersection des deux tores se compose de la section du tore T par le plan P, puis de la section du tore T par la sphère (S).

Rappelons que $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{R}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - R^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

L'équation (S) s'écrit

$$(S) \qquad b(x^2 + y^2 + z^2 + c^2) - 2c(Rx + cz) = 0.$$

Portons dans T l'expression de $x^2 + y^2 + z^2 + c^2$ tirée de cette équation; elle devient

$$(C) \qquad [(c^2 - b^2)z + Rcx]^2 - a^2b^2(x^2 + y^2) = 0,$$

cône du second degré qui passe par la section de T par S. Nous allons montrer que C et S sont bitangentes, et par suite se coupent suivant deux coniques, ici des cercles. Pour cela, cherchons à déterminer λ de manière que $\lambda C + bS$ se décompose en un produit de facteurs.

$$\lambda\{(c^2 - b^2)z + Rcx\}^2 - a^2b^2(x^2 + y^2)\} + b^2(x^2 + y^2 + z^2 + c^2) - 2bc(Rx + cz) = 0.$$

On remarque que y n'entre que par y^2; on devra donc avoir une expression de la forme

$$Ay^2 + B(ux + vz + w)^2.$$

Donc les termes indépendants de y^2 forment un carré parfait. Or les termes du premier degré et le terme constant sont

$$-2bc(Rx + cz) + b^2c^2.$$

Donc le carré complet est

$$Rx + cz - bc^2,$$

et on doit avoir

$$\lambda\{(c^2 - b^2)y + Rcx\}^2 - a^2b^2x^2\} + b^2(x^2 + z^2) = (Rx + cz)^2;$$

identité vérifiée pour

$$\lambda = \frac{1}{c^2 - b^2}.$$

L'équation précédente s'écrit donc

$$y^2\left[b^2 - \frac{a^2b^2}{c^2 - b^2}\right] + (Rx + cz)^2 = 0,$$
$$-R^2b^2y^2 + (a^2 - R^2)(Rx + cz)^2 = 0;$$

ce sont deux plans qui couperont la sphère S suivant deux cercles ayant la même projection verticale puisque les deux équations ne renferment d'autre terme en y que y^2.

On peut encore reconnaître la nature de l'intersection, de manière peut-être plus simple, en raisonnant comme il suit :

On sait que l'intersection du tore à méridienne circulaire et d'une sphère se projette sur le plan méridien qui leur est commun suivant une ellipse, ou une fraction d'ellipse.

Dans le cas actuel, considérons la sphère dont le centre ω' serait à la rencontre des normales communes aux méridiens des tores et dont le cercle générateur passerait par les points de tangence θ' et θ'' de ces méridiens. Cette sphère sera bitangente à chacun des tores. A cause de la symétrie, l'intersection de cette sphère avec le premier tore sera la même qu'avec le second tore ; donc elle sera aussi l'intersection des deux tores.

Or cette intersection, en projection verticale, est une ellipse tangente en θ' et θ'' au méridien de la sphère.

Mais alors l'intersection sera la même que celle de la sphère ω' et du cylindre du second degré de bout ayant pour base cette ellipse ; comme ce cylindre et la sphère ω' ont deux plans tangents communs en θ' et θ'', ils se coupent suivant deux courbes planes, qui, appartenant à la sphère ω', sont forcément deux circonférences dans l'espace.

PHYSIQUE

1292. — *L'objectif d'un microscope a* 7^{mm} *de diamètre et environ* 1^{cm} *de longueur. L'oculaire est un oculaire d'Huyghens de* 3^{cm} *de distance focale,* 4^{cm} *de longueur et* 2^{cm} *de diamètre au verre de champ. La longueur totale de l'instrument est de* 22^{cm} *environ.*

Ayant mis ce microscope au point sur un micromètre objectif au centième de millimètre, on trouve, avec la chambre claire, que 20 divisions de l'image occupent une longueur de 50^{mm} *à une distance de* 32^{cm}. *Calculer, autant que le permettent les données :*

1° *La puissance de l'instrument ;*

2° *Son grossissement ;*

3° *La distance focale de l'objectif ;*

4° *Le champ linéaire ;*

5° *La clarté, en attribuant à la pupille de l'observateur un diamètre de* 4^{mm} ;

6° *La latitude d'accommodation, en supposant le punctum proximum à* 15^{cm} ;

7° *Le tirage maximum à donner à l'instrument après qu'il a servi à une observation directe, pour mettre l'image au point sur une plaque photographique placée à* 15^{cm} *de l'oculaire.*

1° La puissance est le quotient du diamètre apparent de l'image par le diamètre linéaire de l'objet. L'image a 50^{mm} de diamètre et est vue à 320^{mm} ; son diamètre apparent est $\frac{50}{320}$. L'objet a $\frac{20}{100}$ de millimètre. La puissance est donc, avec le millimètre pour unité, $\frac{50 \times 100}{320 \times 20} = 0{,}781$, ce qui représente 781 dioptries.

La puissance ainsi déterminée est sensiblement égale à la puissance nominale, qui représente l'inverse de la distance focale de l'instrument tout entier. On a donc pour la valeur de cette distance focale :

$$F = \frac{1}{0{,}781} = 1^{mm},28.$$

2° Le grossissement est le produit de la puissance par la distance de vision à l'œil nu, que l'on suppose de 25^{cm}. On a donc, en prenant le millimètre pour unité : $G = 0{,}781 \times 250 = 195$.

3° Désignons respectivement par φ, f et b la distance focale de l'objectif, celle de l'oculaire et la distance du second point nodal de l'objectif au premier point nodal de l'oculaire. On sait que la valeur

absolue P de la puissance satisfait à la relation

$$-P = \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{f} - \frac{b}{f\varrho}.$$

Confondons le second plan principal de l'objectif avec sa face d'émergence, ce qui s'écarte fort peu de la vérité, et remarquons que le premier plan principal de l'oculaire est à 2^{cm} en dehors de l'instrument; alors $b = 23^{cm}$, et l'équation précédente peut s'écrire

$$-0,781 = \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{30} - \frac{230}{30\varrho}, \qquad \text{d'où} \qquad \varrho = 8^{mm},2.$$

4° L'objet doit être à peu près dans le premier plan focal de l'objectif, c'est-à-dire à une distance du premier point nodal égale à $8^{mm},2$. Plus exactement, l'image objective doit se former sensiblement dans le premier plan focal de l'oculaire, et il est facile de voir que ce dernier est à 20^{cm} de l'objectif. L'objet doit donc être à une distance p du premier point nodal de l'objectif donnée par l'équation

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{200} = \frac{1}{8,2}, \qquad \text{d'où} \qquad p = 8^{mm},55.$$

Ceci posé, le verre de champ de l'oculaire ayant 2^{cm} de diamètre et étant à 17^{cm} de l'objectif, le champ linéaire moyen a une grandeur x qui doit satisfaire à la proportion

$$\frac{x}{20} = \frac{8,55}{170}, \qquad \text{d'où} \qquad x = 1^{mm}.$$

5° On voit aisément que la seconde face de l'objectif est à 20^{cm} du premier foyer de l'oculaire; si donc on regarde l'anneau oculaire comme l'image de cette seconde face à laquelle on attribuera le diamètre donné de 7^{mm}, on aura, en appelant y le diamètre de l'anneau oculaire et appliquant une formule connue

$$\frac{y}{7} = \frac{30}{200}, \qquad \text{d'où} \qquad y = 1^{mm},05.$$

Les pinceaux lumineux qui pénètrent dans l'œil ont donc ce diamètre, tandis qu'à l'œil nu ils auraient le diamètre de la pupille, 4^{mm}. La clarté, qui est égale au rapport des sections, est donc

$$c = \left(\frac{1,05}{4}\right)^2 = 0,07.$$

6° On sait que la latitude d'accommodation d'un microscope a sensiblement pour expression $\frac{F^2}{\delta}$, F désignant la distance focale de l'instrument tout entier et δ la distance du punctum proximum. La valeur numérique est donc ici

$$\frac{\overline{1,28}^2}{150} = 0^{mm},011.$$

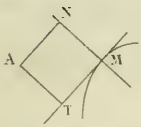
7° Pour transporter l'image virtuelle de la distance de 15^{cm} à l'infini, il faut, d'après le calcul précédent, tirer l'instrument de $0^{mm},011$; on conçoit qu'un nouveau tirage de $0^{mm},011$ la ramènera, réelle, de l'infini à 15^{cm}. L'application de la formule $qq' = F^2$ confirme d'ailleurs ce résultat. Le tirage total sera donc $0^{mm},022$, c'est-à-dire excessivement petit.

CONCOURS DE 1905 (*Suite.*)

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES (Cours spéciaux).

Analyse.

1459. — Trouver une courbe telle que les distances AN et AT d'un point fixe A à sa normale et à sa tangente en un point M soient dans un rapport de longueur constant lorsque le point M change de position sur la courbe.

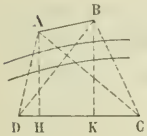


(*Durée : 4 heures.*)

Trigonométrie.

Pour évaluer la distance des points A et B inaccessibles, on a mesuré la distance de deux points C et D, et les angles que forment CA, CB, DA, DB avec la direction CD.

1° On demande d'établir les formules qui permettent de calculer la distance AB et les distances AH et BK des points A et B à la base CD.



2° On donne $CD = 500^m$,

$$\widehat{CDA} = 70°21'33'', \qquad \widehat{CDB} = 35°10'42''.$$
$$\widehat{DCA} = 29°\ 4'10'', \qquad \widehat{DCB} = 60°12'45''.$$

Calculer la valeur numérique de AB, AH, BK.

Les quatre points A, B, C, D sont supposés dans un même plan horizontal.

(*Durée : 3 heures.*)

Mécanique.

I. — On a deux rouleaux cylindriques de rayons R et r, avec $R > r$, fixés en A et B respectivement sur un plan horizontal, les points de contact étant à une distance $AB = a$. On pose sur ces rouleaux une tige pesante T, de longueur $EF = l$, d'épaisseur négligeable et de poids p, dans un plan perpendiculaire à l'axe des cylindres, de façon que son milieu M soit à égale distance des points de contact.

1° La tige est-elle en équilibre ?

2° Dans le cas où elle serait en équilibre, on attache à l'extrémité F la moins élevée un poids P. Quelles sont alors les conditions d'équilibre ? (Il suffit d'examiner à quelles conditions la tige ne pourra ni basculer ni glisser).

On tiendra compte du frottement, dont le coefficient est f.

II. — *Problème du parachute.* On laisse tomber dans l'air, avec une vitesse initiale verticale v_0, dirigée de haut en bas, un corps plan pesant *supposé maintenu horizontal.* Chaque point du corps décrit une verticale.

Soit p le poids de ce corps en kilogrammes, S sa surface en mètres carrés; la résistance R de l'air en kilogrammes au mouvement vertical du corps s'exerçant normalement au plan, en son centre de gravité, et ayant pour valeur à l'instant t : $R = kSv^2$, où v est la vitesse de chute à l'instant t, k un coefficient numérique.

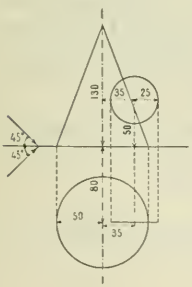
1° Discuter les variations de la vitesse suivant les valeurs de v_0 et t; dire en particulier ce qu'elle devient pour $t = \infty$;

2° Trouver le plus possible de propriétés du mouvement du corps; indiquer au moins une méthode pour trouver l'espace parcouru, si le temps manque pour la développer.

3° *Applications numériques.* — On prend $k = 0,34$, $S = 12^{mq}$, $p = 200^{kgrs}$: I. — Trouver la valeur de la vitesse au bout d'un temps infini; II. — v_0 étant égal à 10 mètres, quelle est la valeur de v au bout de 2 secondes.

On prendra l'accélération g de la pesanteur égale à $9^m,81$, e (base des log. népér.) égal à 2,718, $\log_{10} e = 0,434$. (*Durée : 4 heures*).

Épure.



On donne un cône de révolution à axe vertical dont le rayon de base a 50^{mm} et la hauteur 130^{mm}.

Le centre de la base est situé sur le grand axe de la feuille, à 80^{mm} en avant de la ligne de terre qui coïncide avec le petit axe de la feuille.

Dans le plan de front de l'axe on donne un cercle de 25^{mm} de rayon dont le centre est à 50^{mm} au-dessus du plan horizontal et à 35^{mm} à droite de l'axe du cône.

Par ce cercle passe un cylindre dont les génératrices font sur les deux plans de projection des angles de 45° avec la ligne de terre, ainsi que l'indiquent les flèches ci-contre.

On demande de représenter le cône avec l'entaille qu'y a faite le cylindre supposé enlevé.

(*Durée : 4 heures.*)

Croquis et dessin de machines.

1re Partie. — Croquis.

(Feuille 1/4 grand-aigle, quadrillée.)

1° Sur une première feuille, faire au crayon, à main levée, le relevé géométral (plan, élévation et coupe) de l'un des objets placés dans la salle d'examen.

2° Relever ses dimensions (en millimètres) et les inscrire sur le croquis.

(On accordera 1 h. 1/2 pour cette première partie du travail, après quoi le modèle en relief sera retiré de la salle.)

2me Partie. — Mise au net

(Feuille 1/4 grand-aigle.)

Sur une seconde feuille, mettre au net, à l'encre de Chine, à une échelle déterminée, le croquis précédent.

Nota. — L'échelle est laissée à l'arbitraire de MM. les candidats, elle devra être choisie assez grande pour que la feuille soit bien remplie. — L'échelle doit être dessinée dans une partie libre de cette feuille.

(*Durée : 4 heures.*)

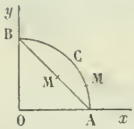
CERTIFICAT D'ÉTUDES SUPÉRIEURES (*Paris, 2e session*).

Mathématiques préparatoires à l'étude des sciences physiques.

Épreuve théorique.

I. — **1460**. Les lettres x et y désignant les coordonnées d'un point M par rapport à deux axes rectangulaires Ox et Oy : 1° calculer l'intégrale

$$\int y^2dx + (x^2 - 2xy)dy,$$



le long de l'arc du cercle ACB décrit de O comme centre avec l'unité comme rayon et situé dans l'angle positif des axes xOy; 2° calculer la même intégrale le long de la corde AB; 3° reconnaître si l'expression

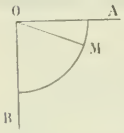
$$y^2dx + (x^2 - 2xy)dy$$

est une différentielle totale exacte d'une fonction de deux variables indépendantes x et y; 4° déterminer un facteur λ, fonction de la seule variable x, de telle façon que le produit de l'expression précédente par λ, $\lambda y^2dx + \lambda(x^2 - 2xy)dy$, soit une différentielle totale exacte, et indiquer la fonction dont ce produit est alors la différentielle.

II. — **1461**. Intégrer l'équation différentielle du second ordre

$$y^2y'' = -1,$$

y'' désignant la dérivée seconde de la fonction inconnue y par rapport à la variable x. Construire celle des courbes intégrales qui passe par le point de coordonnées $x = 1$, $y = 1$ et qui admet en ce point une tangente parallèle à Ox.



III. — **1462**. Un pendule simple OM dont la longueur est 1m et dans lequel le point matériel M a une masse de 10gr est écarté d'un angle droit de la verticale dans la position initiale OA. Il est abandonné à lui-même *sans vitesse initiale*.

Calculer en unités C.G.S. la vitesse que possède le point M à l'instant où le pendule passe par la verticale OB, ainsi que la tension du fil à cet instant.

On prendra $g = 980$.

(*25 octobre 1905, de 8 h. à midi*).

Épreuve pratique.

I. — **1463** Intégrer l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 1}.$$

Figurer les courbes intégrales en supposant que x et y désignent les coordonnées rectangulaires d'un point M.

II. — Calculer les intégrales

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}; \qquad \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\, dx; \qquad \int_0^1 \frac{dx}{2+\sqrt{1-x^2}}$$

à $\frac{1}{100}$ près.

Nota. — On indiquera sur la copie le détail des calculs.

25 octobre 1905, de 2 h. à 4 h.)

QUESTIONS PROPOSÉES

1464 — Si deux coniques sont bitangentes, les rayons de courbure aux points de contact forment une proportion.

1465. — On donne la parabole de sommet O et de foyer F qui a pour équation, en coordonnées rectangulaires,

$$y^2 - 2px = 0.$$

1° On suppose qu'un point M se déplace sur la parabole de façon que sa vitesse soit dans un rapport constant avec la distance FM. Trouver la loi des espaces.

2° On suppose qu'une droite qui, dans sa position initiale, coïncide avec la tangente au sommet roule sans glisser sur la parabole de façon que le point de contact coïncide à chaque instant avec le point M. Trouver la trajectoire du point A de cette droite qui, dans la position initiale, coïncide avec le sommet O de la parabole. Etudier le mouvement de ce point sur la trajectoire.

3° On abaisse du foyer F la perpendiculaire FP sur la droite mobile précédente. Montrer que le mouvement du point P sur cette droite est uniforme.

4° Calculer AP et FP en fonction du temps et montrer comment les expressions de AP et de FP peuvent servir à déterminer le mouvement du foyer F dans le roulement sans glissement de la parabole sur sa tangente au sommet.

Ch. Michel.

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1386. — *La tangente en un point* M *d'une ellipse rencontre les axes en* P *et* Q *et les parallèles aux axes menées par ces points se rencontrent en* R. *On considère la droite* MR *et la droite analogue* M'R' *qui correspond à l'extrémité du diamètre conjugué de* OM. *Trouver et construire le lieu du point de rencontre des droites* MR *et* M'R'.

Soit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ l'équation de l'ellipse, et soient $a \cos \varphi$, $b \sin \varphi$ les coordonnées d'un point M de cette ellipse.

La tangente en ce point, $\frac{x}{a} \cos \varphi + \frac{y}{b} \sin \varphi - 1 = 0$ rencontre Or en un point qui a pour abscisse $\frac{a}{\cos \varphi}$ et l'axe des y en un point qui a pour ordonnée $\frac{b}{\sin \varphi}$; les coordonnées du point R sont alors $x = \frac{a}{\cos \varphi}$, $y = \frac{b}{\sin \varphi}$, et par suite la droite MR a pour équation

$$\frac{x - a \cos \varphi}{\frac{a}{\cos \varphi} - a \cos \varphi} = \frac{y - b \sin \varphi}{\frac{b}{\sin \varphi} - b \sin \varphi},$$

ou

$$(1) \qquad bx\cos^3\varphi - ay\sin^3\varphi - ab\cos^2\varphi = 0.$$

L'équation de la droite correspondante M'R' s'en déduit en remplaçant φ par $\frac{\pi}{2}+\varphi$, ce qui donne

$$(2) \qquad bx\sin^3\varphi + ay\cos^3\varphi - ab\cos 2\varphi = 0,$$

et pour avoir le lieu du point de rencontre de ces deux droites, il faudrait éliminer φ entre les équations (1) et (2).

Mais il sera plus simple de résoudre ces équations par rapport à x et y, nous aurons ainsi les coordonnées d'un point du lieu en fonction du paramètre φ.

En faisant ce calcul, on trouve

$$x = a\,\frac{\cos^2\varphi\,(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)}{\cos^6\varphi+\sin^6\varphi}. \qquad y = b\,\frac{\cos^2\varphi\,(\cos^3\varphi-\sin^3\varphi)}{\cos^6\varphi+\sin^6\varphi}.$$

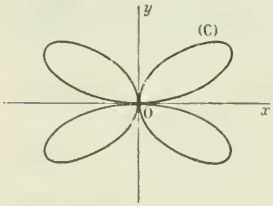
Pour avoir toute la courbe, il faut faire varier φ dans un intervalle d'amplitude égale à 2π. Si l'on change φ en $\varphi+\pi$, x et y changent de signe ; nous voyons ainsi que la courbe est symétrique par rapport à l'origine. Il suffira de faire varier φ dans un intervalle d'amplitude égale à π, de construire la branche de courbe correspondante et de tracer la branche symétrique par rapport à l'origine.

Remarquons aussi que si l'on change φ en $\frac{\pi}{2}-\varphi$, x change de signe et y ne change pas ; par suite, la courbe est symétrique par rapport à Oy. Pour simplifier la construction de la courbe en tenant compte de cette symétrie, il faut partager l'intervalle d'amplitude égale à π, où nous devons faire varier φ, en deux intervalles égaux, tels qu'à toute valeur $\varphi=\alpha$ appartenant au premier corresponde la valeur $\varphi=\frac{\pi}{2}-\alpha$ appartenant au second.

Pour cela, considérons les deux intervalles $\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ et $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)$ dont la réunion forme un intervalle d'étendue égale à π. A toute valeur $\frac{\pi}{4}-\theta$ du premier correspond la valeur $\frac{\pi}{4}+\theta$ du deuxième $\left(\theta \text{ étant compris entre } 0 \text{ et } \frac{\pi}{2}\right)$, et la somme de ces deux valeurs est égale à $\frac{\pi}{2}$. Il leur correspondra donc des points de la courbe symétriques par rapport à Oy.

Il suffira donc de faire varier φ dans le premier intervalle, par exemple $\left(-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}\right)$, de construire la branche de courbe correspondante, et de tracer les symétriques de cette branche par rapport aux deux axes.

On voit alors facilement que lorsque φ varie de $-\frac{\pi}{4}$ à $+\frac{\pi}{4}$, x part de zéro pour revenir à zéro, en étant toujours positif, et prend la valeur $x=a$ pour $\varphi=0$. De même y est positif dans cet intervalle, il est nul pour $\varphi=\pm\frac{\pi}{4}$ et égal à b pour $\varphi=0$.



A ces variations correspond la branche de courbe (C).

Nous avons

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a}\cdot\frac{\cos^3\varphi-\sin^3\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi};$$

pour $\varphi=-\frac{\pi}{4}$, $\frac{y}{x}$ est infini, et pour $\varphi=\frac{\pi}{4}$, $\frac{y}{x}$ est nul. Il en résulte que la courbe (C) est tangente à l'origine aux deux axes.

En achevant par symétrie, on obtient toute la courbe.

BROS, à Albi.

Bonne solution par M. Grangier, à Monbydier.

1387. — *La droite qui joint les points de Frégier correspondant aux extrémités de deux diamètres conjugués d'une ellipse enveloppe une autre ellipse.*

Soient $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ l'équation de l'ellipse et $(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$ les coordonnées d'un point M de cette courbe. Le point de Frégier est d'une part sur la normale au point M

$$(1)\qquad \frac{x-a\cos\varphi}{\frac{\cos\varphi}{a}}=\frac{y-b\sin\varphi}{\frac{\sin\varphi}{b}},$$

et d'autre part sur la droite qui joint les extrémités des parallèles aux axes menées par le point M et limitées à la courbe. Ces points ont pour coordonnées $(a\cos\varphi,\ -b\sin\varphi)$ et $(-a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$; ils sont symétriques par rapport au centre; par suite, la droite qui les joint a pour équation

$$\frac{y}{x}=-\frac{b\sin\varphi}{a\cos\varphi}$$

ou (2)
$$bx\sin\varphi+ay\cos\varphi=0.$$

Tout revient à résoudre les équations (1) et (2).

Pour cela, nous multiplierons les deux termes du rapport qui figure au premier membre de (1) par $b\sin\varphi$, puis les deux termes du second rapport par $a\cos\varphi$, et nous ajouterons terme à terme; nous avons ainsi, en tenant compte de l'équation (2),

$$\frac{x-a\cos\varphi}{\frac{\cos\varphi}{a}}=\frac{y-b\sin\varphi}{\frac{\sin\varphi}{b}}=\frac{-2ab\sin\varphi\cos\varphi}{\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\sin\varphi\cos\varphi}=\frac{-2a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

Nous en tirons

$$x=\frac{ac^2\cos\varphi}{a^2+b^2},\qquad y=-\frac{bc^2\sin\varphi}{a^2+b^2}.$$

Telles sont les coordonnées du point de Frégier relatif au point M. Remplaçons-y φ par $\varphi+\frac{\pi}{2}$, nous avons

$$x=-\frac{ac^2\sin\varphi}{a^2+b^2},\qquad y=-\frac{bc^2\sin\varphi}{a^2+b^2};$$

ce sont les coordonnées du point de Frégier correspondant au point M′ tel que les diamètres OM et OM′ soient conjugués.

La droite qui joint ces deux points a pour équation

$$bx(\cos\varphi-\sin\varphi)-ay(\cos\varphi+\sin\varphi)-\frac{abc^2}{a^2+b^2}=0.$$

On peut l'écrire

$$(bx-ay)\cos\varphi-(bx+ay)\sin\varphi=\frac{abc^2}{a^2+b^2}.$$

Prenons la dérivée par rapport à φ, nous avons

$$-(bx-ay)\sin\varphi-(bx+ay)\cos\varphi=0,$$

et, en formant la somme des carrés, nous obtenons

$$(bx-ay)^2+(bx+ay)^2=\frac{a^2b^2c^4}{(a^2+b^2)^2},$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{c^4}{2(a^2+b^2)^2}.$$

On voit ainsi que l'enveloppe cherchée est une ellipse homothétique à l'ellipse donnée.

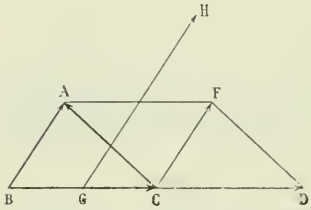
Gabriel PÉLISSIER, à Toulouse.

Bonnes solutions par MM. P. Gaussot ; G. Foucry, à Roanne : M. Grangier, à Monbydier ; Bros, à Albi ; Michel Constandaki ; A. Dediu, école d'artillerie et de génie, à Bucarest : Amblard, conducteur des Ponts et Chaussées, à Ruines (Cantal).

MÉCANIQUE

1380. — *On considère un triangle* ABC *et les trois forces* BC, CA *et* BA *appliquées le long des côtés de ce triangle. Trouver la résultante de ces trois forces et la placer.*

Première solution. — La force BC peut être transportée en CD suivant sa direction. Les forces CA et CD se composent d'après la règle du parallélogramme et ont pour résultante la force CF égale et parallèle à BA.



La résultante générale est donc la force GH double de BA, appliquée au point G milieu de BC, parallèle à BA et de même sens que BA.

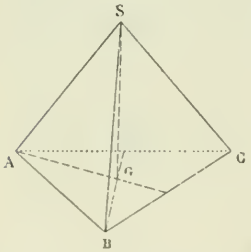
BROS, à Albi.

Deuxième solution. — Décomposons CA suivant CB et CF ; les deux forces CB et BC se détruisent et il reste BA et CF dont la résultante est égale à 2 BA, parallèle à BA et appliquée au milieu de BC.

AMBLARD, conducteur des Ponts et Chaussées, à Ruines (Cantal).

1381. — *On considère un tétraèdre* SABC *et le long des arêtes les six forces* SA, SB, SC, AB, BC, CA. *Trouver la résultante générale et le moment résultant de ce système au point* S.

La somme géométrique des trois forces AB, BC, CA étant nulle, ces trois forces forment un couple dont le moment est le double de l'aire du triangle ABC et est figuré par un vecteur mené, par exemple, par S perpendiculairement au plan ABC et dirigé vers ce plan. Le moment résultant de ce système de trois forces est alors invariable et toujours équipollent à l'axe du couple une fois figuré, quel que soit le centre des moments.



La résultante générale des six forces se réduit alors à la résultante des trois forces SA, SB, SC, c'est-à-dire, géométriquement, à la diagonale du parallélépipède construit sur ces forces ; c'est un vecteur obtenu en joignant le point S au centre de gravité G du triangle ABC, et en triplant ce vecteur SG.

Quant au moment résultant du système par rapport au point S, il se réduit évidemment au moment du couple précédent, puisque le moment de chacune des forces SA, SB, SC par rapport au point S est nul.

1388. — *Un point* M *se meut sur la parabole* $y^2 - 2px = 0$, *de façon que l'hodographe du mouvement soit la parabole elle-même.*

Déterminer les lois du mouvement, la vitesse et l'accélération, sachant qu'à l'époque $t = 0$ *le mobile est à l'extrémité de l'ordonnée focale.*

Trouver les lieux de l'extrémité du vecteur vitesse et du vecteur accélération.

Trouver le lieu de la projection de l'origine sur la droite de support de l'accélération.

Les coordonnées x, y du mobile M vérifient l'équation de la parabole ; nous avons donc successivement

$$y^2 - 2px = 0,$$

$$y\frac{dy}{dt} - p\frac{dx}{dt} = 0.$$

D'autre part, puisque l'hodographe du mouvement est la parabole elle-même, nous avons aussi

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - 2p\frac{dx}{dt} = 0;$$

une combinaison immédiate des deux dernières équations nous donne

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - 2y\frac{dy}{dt} = 0,$$

équation qui se décompose en deux : $\frac{dy}{dt} = 0$ et $\frac{dy}{dt} = 2y$. La première nous donne $y = C^{te}$, solution impropre, sans aucun intérêt. La deuxième nous donne de suite $y = Ce^{2t}$. Or, pour $t = 0$, le mobile est à l'extrémité de l'ordonnée focale ; la constante C est donc égale à p et nous avons

$$y = pe^{2t}, \qquad \text{puis,} \qquad x = \frac{p}{2}e^{4t}.$$

La vitesse est donnée par

$$\frac{dx}{dt} = 2pe^{4t}, \qquad \frac{dy}{dt} = 2pe^{2t}$$

et

$$v = 2pe^{2t}\sqrt{1 + e^{4t}}.$$

L'accélération a pour composantes

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 8pe^{4t}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = 4pe^{2t},$$

et pour valeur

$$\gamma = 4pe^{2t}\sqrt{1 + 4e^{4t}}.$$

Le vecteur vitesse a pour extrémité le point

$$x = \frac{p}{2}e^{4t} + 2pe^{4t}, \qquad y = pe^{2t} + 2pe^{2t},$$

ou

$$x = \frac{5p}{2}e^{4t}, \qquad y = 3pe^{2t};$$

le lieu de ce point est évident : c'est la parabole

$$y^2 = \frac{18px}{5}.$$

Le vecteur accélération a pour extrémité le point

$$x = \frac{p}{2}e^{4t} + 8pe^{4t}, \qquad y = pe^{2t} + 4pe^{2t},$$

ou

$$x = \frac{17p}{2}e^{4t}, \qquad y = 5pe^{2t};$$

le lieu de ce point est évident : c'est la parabole

$$y^2 = \frac{50p}{17}x.$$

La droite de support de l'accélération a pour équation

$$\frac{X - x}{\frac{d^2x}{dt^2}} = \frac{Y - y}{\frac{d^2y}{dt^2}}.$$

ou
$$\frac{2x - pe^{2t}}{4e^{2t}} = y - pe^{2t};$$
la perpendiculaire abaissée de l'origine sur cette droite a pour équation
$$2xe^{2t} + y = 0.$$
Le lieu du point de rencontre de ces deux droites s'obtient immédiatement ; c'est la cissoïde droite
$$8x(x^2 + y^2) + 3py^2 = 0.$$

On peut trouver une explication de ce fait en ceci que l'enveloppe de la droite de support de l'accélération est la parabole
$$2y^2 - 3px = 0,$$
et que le lieu cherché est la podaire de cette parabole par rapport à son sommet.

G. COTTY, à Dijon, et G. PÉLISSIER, à Toulouse.

Bonnes solutions : MM. Amblard, à Ruines ; Bros, à Albi ; A. Darmon, à Alger ; Dessimond, à Alger ; Gaussot ; P. Magron, lycée de Nancy.

ÉCOLE CENTRALE (1905).

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

Arithmétique (M. Combette).

3042. — Ecrire le nombre 3712 dans le système de base 6.

3043. — Reste de la division par 9 de 4512, 4512^2, 4512^{3}.

3044. — Reste de la division par 9 de 3742^{1000}.

3045. — Comment trouve-t-on le plus grand commun diviseur entre deux nombres ? — Etant donnés deux nombres a et b et un troisième nombre c premier avec a, démontrer que a et bc ont même p. g. c. d. que a et b.

3046. — Si μ est le p. p. c. m. de a et b, quel est le p. p. c. m. de a^3 et b^3 ?

3047. — Montrer qu'un nombre entier divisible par 9 et par 10, l'est par 90.

3048. — Former les diviseurs du nombre $A = 2^3.5^2$. — P. g. c. d. et p. p. c. m. des nombres
$$A = 2^3.5^2, \qquad B = 2^2.5^3, \qquad C = 2^5.3^2.5.7^2.$$

3049. — Démontrer que le nombre des multiples de b qui se trouvent dans la suite
$$a \times 1, \qquad a \times 2, \qquad a \times 3, \qquad \ldots, \qquad a \times b$$
est égal au p. g. c. d. des nombres a et b.

3050 — 7^2 est la somme d'un certain nombre d'entiers impairs consécutifs. Trouver ces nombres.

3051. — Condition pour que la fraction $\frac{A}{B}$, irréductible, soit de la forme $\frac{M}{12^p}$, M étant un nombre entier.

3052 — Calculer à $\frac{1}{100}$ près les quotients $\frac{0,02}{0,052}$, $\frac{0,0238}{0,031}$, $\frac{0,518}{0,0034}$.

3053. — Calculer à $\frac{1}{100}$ près $\sqrt{0,1}$, $\sqrt{0,001}$, $\sqrt{47,2}$, $\sqrt{\frac{3,1}{0,54}}$.

3054. — Calculer à $\frac{1}{1000}$ près $\sqrt{0,1}$, $\sqrt{0,001}$, $\sqrt{\frac{0,1}{32}}$, $\sqrt[5]{0,1}$.

3055. — Erreur relative de la racine carrée d'un nombre approché.

3056. — On a mesuré avec un mètre les dimensions d'un rectangle; on a trouvé $45^m,3$ et $21^m,2$ à 1^{dm} près. — Avec quelle approximation a-t-on la surface ?

3057. — On a mesuré la circonférence d'un cercle et on a trouvé $45^m,3$ à 1^{dm} près. — Avec quelle approximation a-t-on son rayon ?

3058 — Calculer à $\frac{1}{100}$ près $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{\pi}}{0,0128}$, π^2, $\pi\sqrt{3}$, $\frac{\pi^2}{\sqrt{3}}$.

3059. — Calculer à $\frac{1}{1000}$ près $\frac{\sqrt{2}}{0,715}$, $\frac{3}{\sqrt{5}}$, $\frac{0,315}{\pi}$, $\pi\sqrt{2}$,
$$\frac{\sqrt{14,317}}{\pi}, \qquad \pi^3, \qquad \pi^2\sqrt{3}, \qquad \pi e^3, \qquad \frac{\pi}{\sqrt{7}}, \qquad \sqrt{\pi}, \qquad \sqrt{3-\sqrt{3}}.$$

3060 — Trouver la limite de $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}$.

Algèbre (M. Combette).

3061. — Résoudre par la méthode des coefficients indéterminés le système
$$5x + 2y - z = 2,$$
$$3x - 4y + 3z = 1,$$
$$x + 3y - 5z = 8.$$

3062. — Résoudre et discuter les systèmes suivants

$$\left|\begin{array}{l} 3x-2y+z=1,\\ 5x+3y-4z=2,\\ 8x+y-3z=3,\end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} 3x-2y+5z=1,\\ 2x+3y-3z=4,\\ 5x+y+2z=2;\end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} 3x-2y+5z=11,\\ 2x+3y-2z=3,\\ 5x+y+3z=5;\end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} 3x-2y+z=1,\\ 4x+3y-2z=3,\\ 5x-4y-z=2.\end{array}\right.$$

3063. — Eliminer x et y entre les trois équations

$$\left|\begin{array}{l} 3x-2y+5=0,\\ 2x-3y+\lambda=0,\\ 4x-6y+\mu=0;\end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} 3x-2y+\lambda=0,\\ 2x-5y+\mu=0,\\ 4x-6y+\nu=0.\end{array}\right.$$

3064. — On donne les six lettres a, b, c, d, e, f. Combien pourra-t-on former avec ces six lettres de produits de la forme $a^3b^4c^2$?

3065. — Appliquer la formule du binome au développement de $(a+b+c)^8$ et calculer en particulier le coefficient du terme en $a^3b^4c^2$.

3066. — Développer $(a+b+c+d)^{10}$. Coefficient du terme en $a^4b^3c^2d$.

3067. — Développer $(a+b+c+d)^{12}$. Coefficient du terme en $a^3b^4c^5$.

3068. — Développer $(a+b+c+d+e)^{13}$. Coefficient du terme en $a^6b^2c^2d^3$.

3069. — Développer $(a+b+c)^{15}$. Coefficient du terme en $a^4b^5c^3$. Nombre des termes du développement.

3070. — Calculer la somme $1^2+2^3+3^3+\cdots+n^3$.

3071. — Démontrer que $\sqrt[2]{\sqrt[3]{a}}=\sqrt[6]{a}$.

3072. — On donne une série à termes positifs $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$. — Montrer que si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 0,5, la série est convergente. — Même question avec $\sqrt[n]{u_n}$. — Si nu_n tend vers 0,5, la série est divergente.

3073. — Si la série $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$ est convergente pour $x=\alpha$, elle est convergente pour toutes les valeurs de x comprises entre α et $-\alpha$.

3074. — Etudier les séries

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots;$$

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\cdots;$$

$$1-\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n!}+\cdots;$$

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots;$$

$$1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\cdots;$$

$$1+\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{1.2}+\cdots+\frac{\sin nx}{n!}+\cdots;$$

$$1+\frac{\cos x}{1}+\frac{\cos 2x}{1.2}+\cdots+\frac{\cos nx}{n!}+\cdots;$$

$$1+\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin^2 x}{1.2}+\cdots+\frac{\sin^n x}{n!}+\cdots$$

3075. — Etudier les séries de terme général

$$u_n=\frac{1}{n^2}; \qquad u_n=\frac{1}{n^3}; \qquad u_n=\frac{1}{n^4}; \qquad u_n=\frac{1}{\sqrt{n}};$$

$$u_n=\frac{n-1}{2(n+1)}; \qquad u_n=\frac{n-1}{2(n^2+1)}, \qquad u_n=\frac{n-1}{2(n^3+1)};$$

$$u_n=\frac{4n^3-1}{3n^5+1}; \qquad u_n=\frac{3n-1}{5n^3+1}; \qquad u_n=\frac{3n-1}{n^4+1}.$$

3076. — Etudier les séries

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\cdots;$$

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}+\cdots;$$

$$1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[3]{n}}+\cdots;$$

$$1-\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{\sqrt{2}}-\frac{\sin 3x}{\sqrt{3}}+\cdots$$

3077. — Développer 3^x en série ordonnée suivant les puissances croissantes de x.

3078. — Qu'appelle-t-on caractéristique du logarithme décimal de 0,0057 ? — Soit $\log x = \overline{3},426728$, en déduire $\log \sqrt[5]{x}$.

3079. — Que devient une somme de 30 000fr placée à intérêts composés au taux de 4 °/o pendant 5 ans 4 mois 10 jours, les intérêts se capitalisant chaque année ?

3080. — Calculer le nombre d'annuités de 1 000fr à payer pour rembourser une somme de 4 500fr au taux de 4 °/o.

3081. — Dérivées de

$$y = 5^{2x-1}; \quad y = 5^{8x^3+1}; \quad y = \operatorname{arc\,tg} 8x^5 - 4^{6x^2}; \quad y = [\operatorname{arc\,sin}(8x^2-5)]^2; \quad y = [2\sin^2 x^5 - 3^{x^2}]^3;$$

$$y = [\operatorname{arc\,tg} 3x^2 + 5^{4x^2}]^4; \quad y = \sqrt[3]{\operatorname{arc\,tg} 7x^4}; \quad y = \sqrt[4]{5\cos^3 8x}; \quad y = \sqrt[5]{L(8x^3+1)};$$

$$y = \sqrt{1+\cos^3 6x^2}; \quad y = \sqrt[5]{3\cos^4 5x^2 + 1}; \quad y = \sqrt[5]{3\cos^4 x^3 - 5x^4}; \quad y = \sqrt[9]{\cos^3 8x^4 - \operatorname{tg}^2 4x^3};$$

$$y = \sqrt{\cos^4 3x^2 - L\operatorname{tg} 5x^2}; \quad y = \sqrt[3]{\sin^4 x^3 - L(3x^2-1)}; \quad y = 2^{5x^3}.\sin^3 8x^2; \quad y = 5^{\operatorname{tg}^3 x^2}.\sin^4 x^3;$$

$$y = \operatorname{arc\,tg} 8x^3 \times 5^{4x^2}; \quad y = (\operatorname{arc\,tg} 4x^3)^5 \times 5^{4x^5}; \quad y = 3^{\cos^2 x} \times \operatorname{arc\,tg} 8x^3; \quad y = \operatorname{arc\,tg} 8x^2 \times 3^{7x^2};$$

$$y = \operatorname{arc\,tg} 5x^3 \times 5^{4x^2}; \quad y = \sin^3(4x^2-1) \times 5^{4x^3}; \quad y = 3^{7x^2} \times \operatorname{arc\,tg} 4x^3;$$

$$y = \operatorname{arc\,tg} 8x^2 \times \sin^3 5x^4; \quad y = \operatorname{arc\,tg}(3x^2+1) \times \cos^8 x; \quad y = \operatorname{arc\,cos} 4x^5 \times L(7x^3-1);$$

$$y = \operatorname{arc\,cos}(3x^2+1) \times L(8x^2-1); \quad y = \frac{\operatorname{arc\,sin} 5x^2}{L(3x^2+1)}; \quad y = \operatorname{arc\,sin}(8x^2-1) \times L\sin^4(5x^2-x);$$

$$y = \frac{\cos^4 2x^3}{\sqrt{5x}}; \quad y = \sqrt[5]{\sin^3 x^4} \times L(2x^3-1); \quad y = \operatorname{tg}^5 4x^3 \times L(5x^2+1);$$

$$y = \operatorname{arc\,sin}(7x^3+1)L(3x^3+2); \quad y = L[u + \sqrt{u^2+a^2}].$$

3082. — Dérivées de

$$y = (x^3+1)^{x^3+1}; \quad y = (2x^3-1)^{5x^2}; \quad y = (4x^3+2x-1)^{3x^2}; \quad y = (5x^2+1)^{4x^3};$$

$$y = (5\cos 4x^3)^{8x^2}; \quad y = [\cos(7x^2-1)]^{x^3}; \quad y = (\sin 8x^3)^{4x^2}; \quad y = (3x^2-1)^{\cos^2 5x^3};$$

$$y = (x^2+1)^{\cos^3 x^3}; \quad y = (8x^2+1)^{\cos^2 x^3}; \quad y = (5x^2+1)^{\cos 4x^2}; \quad y = (4x^3+1)^{\sin^3(2x)^5};$$

$$y = (x^3+2x)^{\sin^3 8x^5}; \quad y = (5x^3-1)^{\operatorname{tg}^2 4x^5}; \quad y = (\operatorname{arc\,sin}^3 4x^5-1)^{5x^3-1}; \quad y = (3a^{2x}-1)^{\sin^3 x^4};$$

$$y = (\cos 5x - 1)^{\operatorname{tg} 3x+1}; \quad y = (\sin 5x^3)^{\cos 8x^2}; \quad y = (2x^3+\cos^3 x)^{\sin^2 8x^4}; \quad y = [8\cos^2(x^3-2x^2)]^{\operatorname{tg}^2 5x};$$

$$y = (5\sin^3 2x + 3x)^{4\operatorname{cotg}^3 x}; \quad y = (\operatorname{arc\,tg} 5x^3)^{x^{6/2}}; \quad y = (8^{3x^2}+5x)^{\log\cos x}; \quad y = x^{x^x}.$$

3083. — $f(u, v)$ étant une fonction composée de la variable x, calculer la dérivée seconde de cette fonction par rapport à x.

3084. — Calculer la dérivée de $y = \sin 3x + 3^{4x}$. Dérivée n^e.

3085. — Dérivées d'ordre n des fonctions suivantes

$$y = \frac{3}{5x+2}; \quad y = \frac{m}{ax+b}; \quad y = \frac{1}{x^2-4}; \quad y = \frac{5x}{4x^2-1}; \quad y = \frac{3x}{x^2-5x+6}.$$

3086. — Étant donnée l'équation

$$3^{x^2} - 5\operatorname{tg}^3 y + 5\log(x^2-y^2) = 1,$$

en déduire y'_x. — Même question avec l'équation

$$y^{5x} - \cos^2 x + x^y = 0.$$

3087. — Étudier les variations des fonctions suivantes

$$y = \frac{x^3-2}{x^2-1}; \quad y = \frac{x^2+x}{x^2-1}; \quad y = \frac{x^3+2x}{x^2-1}; \quad y = \frac{4x^3}{4x^2-1}; \quad y = \frac{3x^2-1}{x^3+1}; \quad y = \frac{x^3-2}{x^3+x}.$$

3088. — Minimum de $y = 5\sin x + 3\cos x$, x variant de 0 à 2π.

3089. — u et v étant deux quantités positives dont la somme est constante $(u+v=a)$, trouver le maximum du produit u^2v^5.

3090. — x et y étant positifs et vérifiant l'équation $3x+5y=10$, trouver le maximum de x^3y^5.

3091. — Sachant que $x^3y^4 = 10$, trouver le minimum de $3x^2+5y^3$.

3092. — Montrer que le rapport de deux infiniment petits a même limite que le rapport de leurs parties principales.

3093. — x étant pris pour infiniment petit principal, trouver l'ordre infinitésimal et la partie principale de chacun des infiniment petits suivants :

$$\operatorname{tg} x; \quad 1-\cos x; \quad x - \sin x; \quad L(1+x) - \sin x.$$

3094. — Vers quelle limite tend le rapport $\frac{Lx}{x^2}$ quand x croît sans limite ?

3095. — Limites pour $x = 0$ des expressions suivantes :

$$\frac{x^3 - \sin^2 5x.\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^3 4x}; \quad \frac{x^3 - \sin 5x.\operatorname{tg}^2 2x}{\sin 3x.\operatorname{tg} 4x.\sin 8x}; \quad \frac{\sin^3 4x - x^2\operatorname{tg} 8x}{\sin^2 5x.\operatorname{tg} 3x}; \quad \frac{x - \sin x}{L(1+x) - x + \frac{x^2}{2}};$$

$$(1-\sin 2x)^{\operatorname{cotg} 5x}; \quad (1-3\operatorname{tg} 5x)^{\operatorname{cotg} 4x};$$

$$(1+\operatorname{tg} 3x)^{\operatorname{cotg} 5x}; \quad (1-\operatorname{tg} 3x)^{\operatorname{cotg} 5x}; \quad (1-5\sin^2 3x)^{2\operatorname{cotg}^2 x}.$$

3096. — Trouver la fonction y, sachant que

$$y' = x.3^{4x^2}; \quad y' = x.5^{4x^2}; \quad y' = 5x.2^{4x^2}; \quad y' = 5x^2.7^{4x^3+1}; \quad y' = 5x^2.7^{x^3-1};$$

$y' = 5\cos x . 7^{3\sin x}$; $y' = \frac{Lx}{x}$; $y' = \cos^2 x$; $y' = \sin^2 x$; $y' = \sin^3 x$; $y' = \sin^4 x$;

$$y' = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right);$$

$y' = \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right)$; $y' = \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) . \cos\left(4x + \frac{\pi}{5}\right)$; $y' = \cos^3 x \sin^5 x$;

$y' = \sin^4 x \cos^3 x$; $y' = \sin^3 x \cos^5 x$; $y' = \operatorname{tg} x$; $y' = \operatorname{tg}^2 x$; $y' = \operatorname{tg}^4 x$;

$y' = \frac{3x}{x^2 - 4}$; $y' = \frac{4x}{5x^2 - 1}$; $y' = \frac{5x^2 + 1}{(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 1)}$; $y' = \frac{x^2}{(x - 1)^3}$; $y' = \frac{2x^2 - 1}{(x - 3)^3}$;

$y' = \frac{x^3}{(x - 2)^4}$; $y' = \frac{3x^2}{(x - 1)(x + 2)^2}$; $y' = \frac{x^3}{(x - 1)^3(x + 2)}$; $y' = \frac{3x^4}{(x - 1)^5}$;

$y' = \frac{5x}{(3 - 8x^2)^5}$; $y' = \frac{5x - 1}{x^2 + 4}$; $y' = \frac{5x}{3 + 4x^2}$; $y' = \frac{5x + 1}{(x + 1)^2 + 2}$; $y' = \frac{2x + 3}{(x - 1)^2 + 1}$;

$y' = \frac{3x - 2}{(x + 1)^2 + 2}$; $y' = \frac{3x + 5}{(x - 2)^2 + 1}$; $y' = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2 + 3}$; $y' = \frac{5x + 3}{(x - 1)^2 + 2}$;

$y' = \frac{x - 1}{(x + 2)^2 + 1}$; $y' = \frac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)}$; $y' = \frac{x^3}{(x - 1)^2(x^2 + 1)}$; $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}}$;

$y' = \frac{5x^2}{\sqrt{3 + 8x^3}}$; $y' = \frac{5x^2}{\sqrt{4x^3 - 8}}$; $y' = \frac{7x^2}{\sqrt{8x^3 - 1}}$; $y' = \frac{4x^3}{\sqrt{5x^4 - 1}}$; $y' = \frac{3x}{\sqrt{5x^4 + 1}}$;

$y' = \frac{8x}{\sqrt{5x^4 + 2}}$; $y' = \frac{3x}{\sqrt{4x^2 - 5}}$; $y' = \frac{7x}{\sqrt{5 + 3x^4}}$; $y' = \frac{2x}{\sqrt{3 - 5x^4}}$; $y' = \frac{3x^2}{\sqrt{4 - 6x^6}}$; $y' = \frac{7x^2}{\sqrt{8 - 3x^6}}$;

$y' = \frac{7x^2}{\sqrt{5 - 4x^6}}$; $y' = \frac{5x^2}{\sqrt{3 - 8x^3}}$; $y' = \frac{7x^3}{\sqrt{15 - 3x^3}}$; $y' = \frac{4x - 1}{\sqrt{5x^2 + 2}}$; $y' = \frac{5\cos x}{\sqrt{3\sin^2 x - 8}}$.

3097. — Trouver les fonctions y vérifiant l'équation $y = 4y''$.

3098. — Dans quel cas $x^m + a^m$ est-il divisible par $x^p + a^p$?

3099. — Montrer que l'expression $a + bi$ peut se mettre sous la forme $\rho e^{i\theta}$. Calculer ρ et θ.

3100. — Calculer $\sqrt[3]{i}$.

3101. — Racines de l'équation $x^3 - a^3 = 0$. Soit l'équation $x^3 - 8 = 0$; mettre ses racines sous la forme trigonométrique.

3102. — Résoudre l'équation $x^4 - 1 = 0$.

3103. — Mettre les racines de l'équation $x^5 - 1 = 0$ sous la forme trigonométrique. Démontrer que la somme des racines est nulle.

3104. — Résoudre algébriquement l'équation $x^5 - 1 = 0$.

3105. — Résoudre l'équation $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ sachant qu'elle est réciproque.

3106. — Condition pour que a soit racine multiple d'ordre p de $f(x) = 0$.

3107. — Condition pour que l'équation $x^3 + px + q = 0$ ait une racine double. Résoudre l'équation dans ce cas. — Même question avec l'équation complète $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

3108. — Condition pour que l'équation $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ ait une racine double.

3109. — Reconnaître si l'équation $x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 1 = 0$ a une racine triple.

3110. — Quelle condition doit exister entre p, q, r pour que deux racines α et β de l'équation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ vérifient la relation $3\alpha + 5\beta = 1$?

3111. — Exprimer que l'équation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ a deux racines dont le produit est -1.

3112. — On donne l'équation $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, former l'équation aux sommes des racines deux à deux.

3113. — Équation aux carrés des racines de l'équation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$.

3114. — On donne l'équation

$$f(x) = x^3 + px + q = 0 \qquad (1)$$

et on pose

$$y = f'(x) = 3x^2 + p. \qquad (2)$$

Montrer que l'équation obtenue en éliminant x entre les équations (1) et (2) a une racine nulle lorsque $4p^3 + 27q^2 = 0$. — Expliquer pourquoi le terme en y manque dans cette équation.

3115. — $f(x)$ étant un polynome entier en x, montrer que l'on a

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1} f'(x_0 + \frac{h^2}{1.2} f''(x_0 + \theta h),$$

θ étant un nombre compris entre 0 et 1.

3116. — Soit $f(x) = 0$ une équation algébrique entière de degré m. Si pour $x = a$, on a

$$f(a) > 0, \quad f'(a) > 0, \quad f''(a) > 0, \quad \ldots\ldots, \quad f^{m}(a) > 0,$$

a est une limite supérieure des racines de l'équation.

3117. — Lorsqu'une équation algébrique entière, $f(x) = 0$, a toutes ses racines réelles, il en est de même de l'équation dérivée.

3118. — Soit l'expression $(x^2 - 4)^n$. — Si on en prend la dérivée n^e et qu'on l'égale à 0, de quel degré sera l'équation ainsi obtenue ? — Démontrer qu'elle aura toutes ses racines réelles et comprises entre -2 et $+2$.

3119. — L'équation $5x^3 - 4x - 1 = 0$ a-t-elle ses trois racines réelles ? Quand une équation a toutes ses racines réelles, le théorème de Descartes donne exactement le nombre des racines positives ou négatives.

3120. — Nombre des racines réelles de l'équation $x^5 - 3x - 4 = 0$. — Intersection de la courbe $y = x^5$ avec la droite $y = 3x + 4$. — Calculer une limite supérieure de la racine positive.

3121. — Étudier l'équation $x^3 - 7x + 1 = 0$. — Intersection de $y = x^3$ avec $y = 7x - 1$. — Séparer les racines au moyen de celles de la dérivée.

3122. — Nombre des racines réelles de l'équation $x^5 - 2x^4 - 3 = 0$. Intersection de $y = x^5 - 2x^4$ avec la droite $y = 3$.

3123. — Appliquer le théorème de Descartes à l'équation $x^5 + x^4 - 2x^3 - 5 = 0$. Limite supérieure de la racine positive. Approcher de cette racine par la méthode des parties proportionnelles.

3124. — Nombre des racines réelles de $x^4 - x - 3 = 0$. — Limite supérieure de la racine positive ; approcher de cette racine par la méthode de Newton.

3125. — Nombre des racines réelles de l'équation $x^4 + 2x - 1 = 0$. La somme des cubes des racines est-elle réelle? Calculer cette somme.

3126. — Conditions pour que l'équation $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ait ses trois racines réelles.

3127. — Étudier les équations suivantes :

$$x^5 + 4x - 3 = 0; \quad x^4 - 5x - 2 = 0; \quad x^5 + 2x^3 - 1 = 0; \quad x^5 - 5x^2 - 8 = 0;$$
$$x^5 - 3x - 6 = 0; \quad x^5 - 2x^4 - 3 = 0; \quad x^5 - x + 1 = 0; \quad x^5 - 3x^2 + 2 = 0;$$
$$x^4 + 4x^3 - 1 = 0; \quad x^4 - 5x + 1 = 0; \quad x^5 - 4x^2 + 1 = 0.$$

3128. — Discuter les inégalités suivantes :

$$\frac{x^3 - 1}{x + 1} > \frac{x - 3}{x^2 - 1}; \qquad \frac{x + 2}{x^3 - 1} < \frac{x - 3}{x - 2}; \qquad \sqrt{2x^2 - 3} > 5x - 2.$$

3129. — Décomposer en éléments simples les fractions suivantes :

$$\frac{5x^3}{(x+1)^4}; \qquad \frac{3x^2}{(x-2)(x+2)^3}; \qquad \frac{3x^3 - 1}{(x^2+1)^2}.$$

3130 — $f(x)$ étant un polynome du 5e degré à coefficients réels, et non divisible par $x - \alpha - \beta i$, sous quelle forme peut-on mettre la fraction rationnelle

$$\frac{f(x)}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^3}?$$

Trigonométrie (M. Combette).

3131. — Résoudre l'équation $\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(5x + \frac{\pi}{3}\right)$.

3132. — Lignes trigonométriques des arcs $\frac{\pi}{12}$, $\frac{\pi}{5}$.

3133. — Calculer $\sin\frac{\pi}{8}$, connaissant $\cos\frac{\pi}{4}$.

3134. — Calculer $\cos\frac{\pi}{8}$ à $\frac{1}{1\,000}$ près.

3135. — Calculer $\sin\frac{\pi}{10}$, $\sin\frac{\pi}{20}$.

3136. — Calculer $\operatorname{tg}\frac{a}{3}$ connaissant $\cos a$. — Prévoir le nombre des racines.

3137. — Calculer $\sin 3a$ connaissant $\sin 2a$; $\cos 3a$ connaissant $\cos 2a$.

3138. — Trouver une relation entre $\operatorname{tg} 2a$ et $\operatorname{tg} 3a$; calculer $\operatorname{tg} 3a$, connaissant $\operatorname{tg} 2a$.

3139. — Donner une limite inférieure du rayon d'un cercle, tel que la différence entre l'arc de 30min et sa corde soit moindre que $0^m,01$.

3140. — Rendre calculable par logarithmes l'expression

$$\sin a + \sin b + \sin c - \sin(a + b + c).$$

3141. — Transformer en un monome $1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c - 2\cos a \cos b \cos c$.

3142. — Transformer en monomes les racines de l'équation $x^2 + px + q = 0$.

3143. — Étant donnée l'équation $a\cos x + b\sin x = c$, calculer $\cos x$ et $\sin x$. Rendre calculable par logarithmes la formule donnant le sinus.

3144. — Éliminer x entre les deux équations

$$a\cos x + b\sin x = c, \qquad a'\cos x + b'\sin x = c'.$$

3145. — Résoudre et discuter les équations

$$(\lambda - 1)\sin^2 x - 2\lambda \sin x \cos x = \lambda^2 + 1, \qquad (m - 1)\cos^2 x - 3m \sin x \cos x = m + 1.$$

3146. — Connaissant les trois côtés d'un triangle, calculer $\sin A$. — Discussion.

3147. — Résoudre un triangle connaissant :
1° le périmètre et les angles ; 2° a, A, $b + c$; 3° a, A, $b - c$.

3148. — Établir la relation $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$. — En déduire $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$.

3149. — Hauteur d'une tour dont le pied est accessible. — Erreur commise, sachant que le graphomètre donne les angles avec une approximation connue. — Comment faire la mesure pour avoir une erreur aussi faible que possible.

3150 — Résoudre un triangle connaissant $\log a$, $\log b$ et $\widehat{C}$.

3151. — Résoudre les inégalités

$$\sqrt{5 - 9\cos x} > 3\cos x + 1; \qquad \sqrt{4 - 5\sin x} > 2 - 3\sin x; \qquad \sqrt{2\sin^2 x - 1} < 3 - 5\cos x;$$
$$\sqrt{3\cos x - 1} > 5\sin^2 x - 4; \qquad \sqrt{2\sin^2 x - 1} < 5\cos x - 3; \qquad \sqrt{3 - 5\cos x} < 3\cos x - 2.$$

Géométrie analytique (M. Goully).

Géométrie analytique à deux dimensions.

3152. — Que représentent les équations : 1° $x^2+y^2-R^2=0$; 2° $2x-3y-4=0$?

3153. — Les médianes d'un triangle se coupent en un même point. — Même question pour les hauteurs, les bissectrices.

3154. — Expression de la surface d'un triangle en fonction des coordonnées des trois sommets.

3155. — Que représente l'équation $A(x-\alpha)^2+2B(x-\alpha)(y-\beta)+C(y-\beta)^2=0$? Équation du faisceau des bissectrices.

3156. — Que représente l'expression $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-R^2$?

3157. — Lieu des points d'où on voit deux circonférences sous le même angle.

3158. — Étant donnés deux cercles O et O', les couper par un troisième cercle ω, tel que les cordes communes AB et CD soient respectivement des diamètres de O et de O'.

3159. — Construire les courbes suivantes :

$$y=x+\frac{1}{x};\qquad y=\frac{x^2+2x+3}{x-1};\qquad y=x+1+\frac{x}{x^2-1};\qquad y=x+\frac{x}{(x-1)^2};$$

$$y=x^2+\frac{1}{x};\qquad y=(x+1)^2+\frac{1}{(x-4)^3};\qquad y=x^2+\frac{1}{x^2-1};\qquad y=x^2+\frac{x}{x^2-4};$$

$$y=x\sqrt{\frac{x-1}{x^2-4}};\qquad y=L(1-x^2);\qquad y=\frac{L(1-x^2)}{x};\qquad y=\frac{Lx}{1-x};\qquad y=L\sin x;$$

$$y=xe^x;\qquad y=\frac{\sin x}{x},\qquad y=\frac{\cos x}{1-x^2};\qquad y=x\pm\sqrt{x^2+1};\qquad y=x\pm\sqrt{x};$$

$$y=x\pm\sqrt{x^2+2x-3};\qquad y=x-3\pm\sqrt{2x^2-4x+3};\qquad y=-x+3\pm\sqrt{x^2-2x+4};$$

$$y=x\pm\sqrt{x^3};\qquad y=x^2\pm\sqrt{x^5};\qquad y=x^2\pm\sqrt{(x^2-1)(x^2-9)};\qquad y^2=\frac{x^2-9}{(x-2)(x-4)};\qquad y^2=x^3+\frac{1}{x^2-1}.$$

3160. — Construire les courbes

$$y^2+xy+2x^2+x=0;\qquad x^2+2xy+y^2-x+y+1=0;\qquad x^2+2xy+y^2+2x-3y+1=0;$$

$$x^2+xy+x-y=0;\qquad x^2-2xy-y^2+2x-y=0;$$

$$x^2+8xy+4y^2+x+y=0;\qquad x^2+xy-x+y=0;\qquad (x+y-1)(2x-y+3)+4=0;$$

$$x^3+x^2+y^2=0;\qquad y^2+x(x^2-y^2)=0.$$

3161. — Définition du centre et du rayon de courbure.

3162. — Construire les courbes

$$\rho(a\cos\omega+b\sin\omega)=c;\qquad \rho=\cos\omega;$$

$$\rho=\sin^2\omega;\qquad \rho=\frac{1}{\cos^2\frac{\omega}{2}};\qquad \rho=\frac{\sin\omega}{\omega};$$

$$\rho=a\omega+b;\qquad \rho=\omega+\frac{1}{\omega};\qquad \rho=\frac{\omega}{1-\omega}.$$

3163. — Courbe dont la sous-normale polaire est constante.

3164. — Trouver la courbe telle que $\operatorname{tg} V=\frac{1}{\sin\omega}$, sachant que pour $\omega=\frac{\pi}{2}$, $\rho=a$. — Construire cette courbe.

3165. — Polaire d'un point par rapport à une ellipse.

3166. — Construire les axes d'une ellipse connaissant deux diamètres conjugués ; longueur des axes.

3167. — Variation de l'angle des rayons vecteurs d'un point d'une hyperbole.

3168. — On donne l'équation $y^2+2xy-4+\lambda(x+y)(x+y+1)=0$; cette équation représente, quand λ varie, des coniques passant par quatre points fixes. — Déterminer les quatre points fixes.

3169. — Étant donnée la conique $x^2+4xy-y^2+x-y=0$, disposer de λ de façon que l'équation $x^2+4xy-y^2+x-y+\lambda=0$ représente le faisceau des asymptotes de la conique donnée.

3170. — Lieu des centres des coniques représentées par l'équation

$$x^2+y^2-1+\lambda(x+y-1)^2=0.$$

3171. — Équation générale des cercles tangents à une parabole en un point donné.

3172. — Discuter la nature des coniques représentées par l'équation

$$x^2+xy+y^2+\lambda(x-1)(y+2x)=0.$$

Peut-on avoir un cercle ? — Lieu des centres.

3173. — Équation générale des coniques passant par les points de rencontre de deux coniques données. — Lieu du pôle de l'axe des y par rapport à toutes ces coniques.

3174. — Conditions d'homothétie de deux courbes du second ordre. — Cordes communes à deux coniques homothétiques.

3175. — Que représente l'équation $AB+\mu BC+\lambda CA=0$, A, B, C désignant des fonctions linéaires de x et de y ? — Combien ces coniques ont-elles de points communs ?

3176. — Construire une conique connaissant une directrice et trois points.

3177. — Construire une parabole connaissant la directrice et deux points.

3178. — Construire une conique connaissant une directrice, le foyer correspondant et une tangente.
3179. — Construire une parabole connaissant le foyer et deux tangentes.
3180. — Construire une parabole connaissant trois tangentes dont la tangente au sommet.
3181. — Construire une parabole connaissant une tangente, un point et le foyer.

Géométrie analytique à trois dimensions.

3182. — Condition pour que deux droites soient dans un même plan.
3183. — Equations d'une droite passant par un point donné et perpendiculaire à deux directions données.
3184. — Calculer les coordonnées du symétrique d'un point x_0, y_0, z_0 par rapport à un plan $mx + ny + pz + q = 0$.
3185. — Distance de l'origine à la droite $x = a$, $by + cz + d = 0$.
3186. — Distance d'un point à la droite

$$Ax + By + Cz + D = 0 : \qquad A'x + B'y + C'z + D' = 0.$$

3187. — Perpendiculaire du point x_0, y_0, z_0 sur la droite

$$x = az + h, \qquad y = bz + k.$$

3188. — Cône de base $z = 0$, $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ et dont le sommet est le point

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = h.$$

3189. — Cône dont le sommet est l'origine et la base

$$z = h, \quad ax^2 + 2bxy + cy^2 + d = 0.$$

3190. — Plan tangent en un point de la surface $xy = z$. — Nature de la section de la surface par son plan tangent.
3191. Equation de la normale à la surface $xy = z$, au point $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$.
3192. — Que représentent les équations

$$f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0 ; \qquad f(x - y, y - z) = 0 ; \qquad f(x^2 + y^2, z) = 0 ; \qquad f(x^2 + y^2 + z^2, z) = 0 ?$$

3193. — Equation générale des surfaces de révolution. — Trouver l'axe.
3194. — Que représente l'équation $xy + yz + zx + 1 = 0$? Montrer que c'est une surface de révolution.
3195. — Que représentent les équations

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3z - 4 ; \qquad x^2 + y^2 + z^2 - (z + 4)^2 = 0 ; \qquad (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = z ;$$
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + z - c = 0 ; \qquad (x^2 + y^2)z^2 = 1 ; \qquad y^2 = \sqrt{x^2 + z^2} ;$$
$$x^2 + y^2 = (4z^2 + z + 1)^3 ; \qquad (x^2 + y^2)^3 = z^4 ; \qquad x^2 + y^2 = e^z ; \qquad x^2 + y^2 + z^2 = \sin z ?$$

3196. — Que représente l'équation $\dfrac{x^2}{2a} - \dfrac{y^2}{2b} = z$? — Plan tangent au point $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$. — Comment ce plan coupe-t-il la surface ?
3197. — Conditions pour que trois diamètres de l'ellipsoïde, donnés par leurs cosinus directeurs, forment un système de diamètres conjugués.
3198. — Reconnaître les surfaces

$$xy = z^2 ; \qquad x^2 + (y - 2)(z - 3) = 0 ;$$
$$x^2 + y^2 = yz ; \qquad x^2 + xz + 2y^2 + x + z = 0 ;$$
$$xy = z ; \qquad x^2 + 2y^2 + xz + x + y = 0 ;$$
$$(x + 1)(y - z) + z - x = 0 ; \qquad yz + xy + x + z + 1 = 0 ;$$
$$(x + 1)(y - z) + z - 3 = 0 ; \qquad (x + 1)(y - z) + y - 3 = 0 ;$$
$$(x + 1)(1 - z) - z^2 = 0 ; \qquad x(2x - 3y + 4) = z ;$$
$$x^2 - (x - z)^2 + zy + 1 = 0 ; \qquad x^2 - 2y - 3z = 0 ;$$

$$z = 1 \pm \sqrt{xy} ; \qquad z = x \pm \sqrt{x^2 - y^2} ; \qquad z = x + y \pm \sqrt{x^2 + xy + y^2} ; \qquad y = x \pm \sqrt{(z - 1)(x - 3)} ;$$
$$z = x \pm \sqrt{xy - 1} ; \qquad y = x + z + 1 \pm \sqrt{1 - x^2 - z^2} ; \qquad x = y + z \pm \sqrt{z^2 - y^2 + 1} ;$$
$$z = 2x \pm \sqrt{x^2 + y^2 - 1} ; \qquad y = x + z \pm \sqrt{x^2 + 2z^2 + 1} ; \qquad y = x + 1 + \sqrt{1 - 2xz - z^2} ;$$
$$y = x - z - 1 \pm \sqrt{1 - x^2 + z^2} ; \qquad y = x + z + 1 \pm \sqrt{z^2 - x} ; \qquad y = z + x \pm \sqrt{z^2 + 1} \text{ (ligne des centres)} ;$$
$$y = x + \sqrt{z} ; \qquad y = x + z \pm \sqrt{x + z} ; \qquad y = z + x + 1 \pm \sqrt{3x - 4}.$$

Mécanique (M. Gouilly).

3199. — Définir la vitesse d'un mouvement varié. — Montrer que la machine d'Atwood donne la vitesse.
3200. — Construire le diagramme du mouvement défini par l'équation

$$s = 3t^2 - 6t - 1.$$

3201. — Mouvement vibratoire simple. — Diagramme du mouvement. — Construire la vitesse et l'accélération en un point.
3202. — Etudier le mouvement $x = a \cos \omega t + b \sin \omega t$.
3203. — Un point mobile se déplace sur une circonférence d'un mouvement uniforme ; le rayon de la circonférence étant 2^m et le nombre de tours par seconde 4, calculer l'accélération.
3204. — Trouver l'accélération d'un point en rotation autour d'un axe.
3205. — Amener une figure plane S à une autre position S′ par une rotation. — Raisonner sur un segment de droite.
3206. — Le mouvement d'une figure plane dans son plan est défini par les mouvements respectifs de deux de ses points ; — le mouvement d'une figure de l'espace est défini par les mouvements de trois de ses points.
3207. — Etant donnée la figure formée par trois points A, B, C (dans un plan) et les directions des vitesses de deux de ces points, trouver celle du troisième.
3208. — Quelle particularité présente un mouvement dans lequel l'hodographe est 1° une droite ; 2° une circonférence ; 3° un point ?
3209. — Un point de masse m se déplace sur une circonférence de rayon R, avec une vitesse constante v ; trouver la force qui produit le mouvement.

3210. — Mouvement d'un point matériel sur une trajectoire polie dans le champ de la pesanteur.

3211. — Dans le champ de la pesanteur, on considère deux surfaces de niveau et une trajectoire les coupant en A et B. Connaissant la distance verticale h des deux points A et B et la vitesse v du mobile en A, calculer sa vitesse v en B.

3212. — Trouver le temps mis par un mobile soumis à la pesanteur pour décrire une corde d'un cercle ayant comme extrémité le point le plus haut du cercle.

3213. — Conditions pour que trois vecteurs forment un système équivalent à 0. — Les médianes d'un triangle forment un système de vecteurs équivalent à 0.

3214. — Montrer qu'il existe six conditions nécessaires de l'équilibre, indépendantes des forces intérieures.

3215. — Équilibre d'une échelle placée contre un mur et supportant un poids vertical placé en son milieu.

3216. — Une barre horizontale ayant trois points d'appui A, B, C est soumise à deux forces verticales. On demande de calculer les réactions des appuis. — Cas où le nombre d'équations obtenues serait suffisant.

Géométrie (M. Lévi).

3217. — Construire un triangle, connaissant les bissectrices en position et un sommet.

3218. — Construire un triangle, connaissant la hauteur, la médiane et la bissectrice issues d'un même sommet.

3219. — Construire un triangle connaissant le côté a, la hauteur correspondante h et le rapport $\frac{b}{c} = \frac{m}{n}$ des deux autres côtés.

3220. — Construire un trapèze connaissant les quatre côtés ; connaissant les diagonales et les deux côtés parallèles.

3221. — Déterminer une sécante coupant deux cercles suivant des cordes de longueurs données.

3222. — Mener la tangente commune à deux cercles. — Démontrer que si les deux cercles sont tangents extérieurement, la portion de tangente commune extérieure comprise entre les deux points de contact est moyenne géométrique entre les diamètres des deux circonférences.

3223. — On considère tous les cercles tangents à une droite en un même point. Lieu des points de contact des tangentes parallèles à une direction donnée.

3224. — On donne un triangle ABC. — Trouver un cercle passant par A et B et tel que la tangente menée de C à ce cercle ait une longueur donnée l.

3225. — Construire la longueur x, sachant que : 1° $\frac{x}{a} = \frac{m^2}{n^2}$, 2° $x = \sqrt[4]{a^4 + b^4 + c^4}$; 3° $x = \sqrt{a^4 + b^4 + c^2 d^2}$.

3226. — Figure inverse d'un cercle quand le pôle est sur ce cercle.

3227. — Construire un cercle passant par deux points et dont la corde commune avec un cercle donné soit égale à une longueur donnée.

3228. — Construire un cercle tangent à un cercle et à deux droites. — Nombre de solutions.

3229. — Cercle tangent à trois cercles donnés.

3230. — Côté du décagone régulier inscrit dans une circonférence.

3231. — Combien peut-on former de rapports anharmoniques avec quatre points donnés ? — Etant donnés trois des points, et la valeur du rapport anharmonique, le quatrième est-il déterminé ?

3232. — Lieu des points d'où on voit deux cercles sous le même angle. Point d'où l'on voit trois cercles sous le même angle.

3233. — Trouver dans un plan un point dont les distances à trois points donnés soient proportionnelles à des longueurs données.

3234. — On donne deux droites A et B et un plan H. Lieu du milieu des droites s'appuyant sur A et B et parallèles à H.

3235. — Mener une droite, de longueur l, s'appuyant sur deux droites données et parallèles à un plan donné.

3236. — Soient trois droites A, B, C de l'espace : mener une transversale les rencontrant aux points a, b, c, de façon que $ab = bc$.

3237. — On donne une droite et deux points A et B. Mener par la droite un plan à égale distance de A et de B.

3238. — Propriétés du trièdre trirectangle.

3239. — Montrer que dans un trièdre les plans menés par chaque arête perpendiculairement à la face opposée passent par une même droite.

3240. — Dans un tétraèdre, les perpendiculaires aux faces menées par les centres des cercles circonscrits à ces faces se rencontrent en un même point.

3241. — Construire un parallélépipède ayant pour arêtes trois droites données.

3242. — Lieu des points d'égale puissance par rapport à deux sphères : — par rapport à trois sphères.

3243. — Points de l'espace d'où l'on voit les trois côtés d'un triangle sous un angle droit.

3244. — Mener par un point donné une droite qui fasse des angles donnés avec deux droites données.

3245. — Mener par un point une droite faisant des angles donnés avec deux plans donnés.

3246. — Mener par un point un plan faisant avec deux plans donnés des angles donnés.

3247. — Par un point, mener une droite qui soit à des distances données d'un point donné et d'une droite donnée.

3248. — Mener, parallèlement à une direction donnée, une droite qui soit à des distances données d'un point et d'une droite donnés.

3249. — Mener par un point donné une droite à distance donnée d'une droite donnée et qui fasse avec un plan P un angle donné.

3250. — Mener par un point une droite à distances données de deux droites données.

3251. — Déterminer un cylindre de révolution tangent à deux plans et passant par un point.

3252. — Sphère passant par trois points et tangente à un plan.

3253. — Sphère tangente à trois plans et passant par un point.

3254. — Sphère tangente à deux droites données en deux points donnés.

3255. — Inscrire une sphère de rayon donné dans un angle trièdre.

3256. — Construire une sphère de rayon donné passant par un point donné et tangente à deux plans donnés.

3257. — Tracer une sphère de rayon R, tangente à deux plans et à une sphère.

3258. — Tracer une sphère de rayon donné passant par deux points et tangente à un plan.

3259. — Construire une sphère de rayon donné, tangente à un plan donné, à une sphère donnée et passant par un point donné.

3260. — Construire une sphère de rayon donné, tangente à un plan donné et à deux sphères données.

3261. — Etant donné un cône à base circulaire, montrer qu'il existe une deuxième direction de plan donnant des cercles dans le cône.

3262. — Sur les tangentes PM, PM' à une ellipse de foyers F et F', on porte respectivement $P\varphi = PF$, $P\varphi' = PF'$; montrer que $\varphi\varphi' = 2a$.

3263. — Construire une ellipse connaissant :

1° un foyer, deux tangentes et le point de contact de l'une d'elles ;

2° un foyer, deux points et la tangente en l'un de ces points ;

3° un foyer, deux tangentes et un point ;

4° un foyer, une tangente et deux points ;

5° un foyer, un sommet et une tangente ;

6° deux tangentes, un foyer et un point du cercle principal.

3264. — Construire une ellipse connaissant le grand axe et un point ; — le grand axe et une tangente.

3265. — Construire une ellipse connaissant trois points et un foyer ; — trois points et une directrice.

3266. — Lieu des foyers des ellipses admettant deux directrices données et passant par un point. — Construire une ellipse connaissant les deux directrices, un point et la tangente en ce point.

3267. — Construire une ellipse connaissant un foyer, un point et les longueurs des axes.

3268. — Lieu du milieu d'une droite de longueur constante dont les extrémités glissent sur deux droites qui se coupent.

3269. — Construire une hyperbole connaissant un foyer, une asymptote et un point ; un foyer, une asymptote et une tangente.

3270. — Lieu des points équidistants d'un cercle et d'une droite.

3271. — Construire une parabole connaissant la directrice et deux tangentes.

3272. — Construire une parabole connaissant la directrice, un point et une tangente.

3273. — Construire une parabole connaissant quatre tangentes. Lieu des foyers des paraboles tangentes à trois droites.

3274. — Mener, par un point de l'axe d'une parabole, des normales faisant entre elles un angle donné.

QUESTIONS PROPOSÉES

1466. — On considère la fonction

$$y = e^x(x^2 + px + 1)$$

en supposant $|p| > 2$. On demande :

1° de construire la courbe représentative ;

2° de trouver le lieu des points d'intersection des tangentes aux points d'inflexion quand p varie ;

3° de déterminer p de façon que les tangentes aux points d'inflexion se coupent sur la droite $x = x_1$. (x_1 *étant la racine de la dérivée seconde comprise entre les deux racines de la dérivée première.*)

P. Magron, lycée de Nancy.

1467. — On considère un cercle (C), un point P et deux droites rectangulaires variables qui passent au point P et rencontrent le cercle en quatre points A, B, C, D.

1° Trouver l'enveloppe du cercle (S) qui passe au point P et aux deux autres points diagonaux du quadrangle inscrit ABCD.

2° Trouver le lieu du point de rencontre de deux cercles (S) orthogonaux.

G. Pélissier, à Toulouse.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

16e Année. N° 4. Janvier 1906.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE DU SECOND ORDRE A COEFFICIENTS CONSTANTS, SANS SECOND MEMBRE

par M. **Th. Leconte**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Lyon.

1. Soit l'équation différentielle

$$(1) \qquad y'' + ay' + by = 0,$$

a et b désignant deux nombres.

Nous nous proposons de montrer que l'intégrale générale de l'équation (1), obtenue sous forme de série entière par l'application de la méthode des coefficients indéterminés, comprend toutes les intégrales.

C'est une conséquence de la théorie des équations différentielles qu'il est utile, en vue de l'enseignement des mathématiques spéciales, de mettre au point sans recourir à cette théorie, et en utilisant d'ailleurs ses procédés classiques.

2. Rappelons d'abord brièvement quelques méthodes donnant toutes les intégrales de l'équation (1).

1° Entre trois intégrales quelconques y, y_1, y_2, pourvu toutefois que le rapport de deux d'entre elles ne soit pas une constante, il existe la relation obtenue en éliminant a et b entre les trois équations linéaires exprimant que y, y_1, y_2 sont des intégrales :

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ y_1 & y'_1 & y''_1 \\ y_2 & y'_2 & y''_2 \end{vmatrix} = 0.$$

D'où l'on tire

$$\begin{aligned} y &= \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2, \\ y' &= \lambda_1 y'_1 + \lambda_2 y'_2, \\ y'' &= \lambda_1 y''_1 + \lambda_2 y''_2, \end{aligned}$$

λ_1 et λ_2 désignant deux constantes, comme on le voit en différentiant deux fois les deux membres de la première relation et en tenant compte des deux autres.

L'intégration de l'équation (1) se ramène donc à la recherche de deux intégrales particulières dont le rapport ne soit pas constant.

Je me borne à énoncer que $e^{r_1 x}$ et $e^{r_2 x}$ sont deux intégrales, r_1 et r_2 étant les racines supposées distinctes de l'équation $r^2 + ar + b = 0$.

Si l'on a $r_1 = r_2 = r$, ce sont les deux fonctions e^{rx} et xe^{rx} qu'on peut prendre comme satisfaisant à l'équation (1).

2° On peut poser

$$y = ze^{rx},$$

e^{rx} étant une intégrale particulière et l'équation (1) devient, par rapport à z, après division de son

premier membre par e^{rx}, l'équation différentielle

$$z'' + (2r + a)z' = 0,$$

dont l'intégration est immédiate.

3° D'autres procédés d'abaissement, s'ils conduisent à des calculs moins simples, permettent pourtant de traiter la question jusqu'au bout.

On peut faire le changement de fonction $y = e^z$ ou, encore, prendre y pour variable indépendante et considérer y' comme fonction de y.

4° Voici enfin une autre méthode que M. Michel m'a signalée.

Introduisons dans le premier membre de l'équation (1) les racines r_1 et r_2 de l'équation caractéristique.

On obtient ainsi la forme

$$y'' - (r_1 + r_2)\, y' + r_1 r_2 y = 0,$$

ou

$$y'' - r_1 y' - r_2(y' - r_1 y) = 0,$$

et si l'on pose $y' - r_1 y = z$, l'équation différentielle devient $z' - r_2 z = 0$ dont les intégrales s'écrivent

$$z = ce^{r_2 x}.$$

Par suite, on est ramené à l'intégration de l'équation du premier ordre

$$y' - r_1 y = ce^{r_2 x}.$$

Les procédés sont donc nombreux pour prouver qu'une intégrale quelconque est de la forme

$$y = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}, \qquad \text{si } r_1 \text{ et } r_2 \text{ sont différents,}$$

et

$$y = e^{rx}(\lambda_1 + \lambda_2 x), \qquad \text{si} \qquad r_1 = r_2 = r.$$

Une remarque importante est que l'on doit pouvoir prendre, pour constantes arbitraires, au lieu de λ_1 et λ_2 les valeurs c_0 et c_1 prises par l'intégrale et par sa dérivée première pour $x = 0$.

En effet, l'on a, si $r_1 \neq r_2$,

$$c_0 = \lambda_1 + \lambda_2,$$
$$c_1 = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2,$$

et, si

$$r_1 = r_2 = r,$$
$$c_0 = \lambda_1,$$
$$c_1 = \lambda_1 r + \lambda_2.$$

3. Considérons une série entière

$$c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

qui soit intégrale de l'équation (1).

Je vais montrer qu'elle est absolument convergente quel que soit x.

Nous avons, pour déterminer $c_2, c_3, \ldots c_n, \ldots$, c_0 et c_1 étant arbitraires, les relations de récurrence

$$1.2\, c_2 + ac_1 + bc_0 = 0,$$
$$2.3\, c_3 + 2ac_2 + bc_1 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(n-1)n\, c_n + (n-1)ac_{n-1} + bc_{n-2} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Appelons γ_0 et γ_1 deux nombres positifs au moins égaux aux valeurs absolues de c_0 et c_1; A et B deux nombres positifs au moins égaux aux valeurs absolues de a et b; et considérons les nombres γ déterminés par les équations

$$1.2\gamma_2 = A\gamma_1 + B\gamma_0,$$
$$2.3\gamma_3 = 2A\gamma_2 + B\gamma_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(2) \qquad (n-1)n\gamma_n = (n-1)A\gamma_{n-1} + B\gamma_{n-2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

le nombre γ_n est au moins égal à la valeur absolue de c_n. Donc la série entière de terme général $c_n x_n$ sera absolument convergente, quel que soit x, si celle de terme général $\gamma_n x^n$ jouit de cette propriété ; ce qui sera établi si l'on montre que $\frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}}$ tend vers zéro quand n croît indéfiniment.

De l'équation (2) on tire

$$n\frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}} = A + \frac{B}{(n-1)\frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_{n-2}}}.$$

Posons, pour simplifier, $u_n = \frac{n\gamma_n}{\gamma_{n-1}}$,

u_1 étant choisi arbitrairement, les nombres u seront donnés par la loi

$$u_n = A + \frac{B}{u_{n-1}}.$$

A partir de u_2, ces nombres sont supérieurs à A ; et par suite, à partir de u_3 inférieurs à $A + \frac{B}{A}$.

Donc $\frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}}$ tend vers zéro.

4. Effectuons le calcul de c_n.

1er Cas. — r_1 et r_2 sont distincts. Nous pouvons écrire la relation de récurrence

$$(n-1)nc_n = (n-1)(r_1+r_2)c_{n-1} - r_1r_2c_{n-2}.$$

D'autre part, posons

$$c_0 = \lambda_1 + \lambda_2,$$
$$c_1 = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2,$$

λ_1 et λ_2 remplaçant c_0 et c_1 comme constantes arbitraires et nous permettant de revenir à la forme trouvée plus haut.

On a

$$1.2c_2 = (r_1+r_2)c_1 - r_1r_2c_0,$$

d'où

$$c_2 = \frac{\lambda_1 r_1^2 + \lambda_2 r_2^2}{1.2}.$$

Admettons la loi qui s'annonce jusqu'à l'indice $n-1$,

$$c_{n-2} = \frac{\lambda_1 r_1^{n-2} + \lambda_2 r_2^{n-2}}{(n-2)!},$$

$$c_{n-1} = \frac{\lambda_1 r_1^{n-1} + \lambda_2 r_2^{n-1}}{(n-1)!};$$

il en résultera que

$$(n-1)nc_n = \frac{(r_1+r_2)(\lambda_1 r_1^{n-1} + \lambda_2 r_2^{n-1}) - r_1r_2(\lambda_1 r_1^{n-2} + \lambda_2 r_2^{n-2})}{(n-2)!},$$

ou encore

$$c_n = \frac{\lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n}{n!}.$$

C'est dire que l'intégrale générale trouvée peut s'écrire

$$\lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}.$$

2e Cas. $r_1 = r_2 = r.$

La relation de récurrence prend la forme

$$(n-1)nc_n = 2(n-1)rc_{n-1} - r^2c_{n-2}.$$

Posons, cette fois,

$$c_0 = \lambda_1,$$
$$c_1 = \lambda_1 r + \lambda_2.$$

On a $$1.2c_2 = 2rc_1 - r^2c_0 = 2r(\lambda_1 r + \lambda_2) - r^2c_0 = \lambda_1 r^2 + 2\lambda_2 r.$$

Admettons que l'on ait

$$c_{n-2} = \frac{\lambda_1 r^{n-2} + \lambda_2(n-2)r^{n-3}}{(n-2)!},$$

$$c_{n-1} = \frac{\lambda_1 r^{n-1} + \lambda_2(n-1)r^{n-2}}{(n-1)!}.$$

Nous en déduirons

$$(n-1)nc_n = \frac{2r[\lambda_1 r^{n-1} + \lambda_2(n-1)r^{n-2}] - r^2[\lambda_1 r^{n-2} + \lambda_2(n-2)r^{n-3}]}{(n-2)!},$$

ou enfin

$$c_n = \frac{\lambda_1 r^n + \lambda_2 n r^{n-1}}{n!} = \lambda_1 \frac{r^n}{n!} + \lambda_2 \frac{r^{n-1}}{(n-1)!}.$$

L'intégrale générale trouvée est donc bien de la forme

$$e^{rx}(\lambda_1 + \lambda_2 x).$$

5. Pour terminer, faisons la remarque que nous avons, en partant d'un nombre v_1 arbitrairement choisi, trouvé l'expression de v_n donné par la loi

$$v_n = -a - \frac{b}{v_{n-1}}.$$

La variation de v_n, pour les grandes valeurs de n, est intéressante et son expression, quand les racines r_1 et r_2 de l'équation $r^2 + ar + b = 0$ sont distinctes, est, en posant

$$v_1 = \frac{c_1}{c_0} = \frac{\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2}{\lambda_1 + \lambda_2},$$

$$v_n = \frac{nc_n}{c_{n-1}} = \frac{\lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n}{\lambda_1 r_1^{n-1} + \lambda_2 r_2^{n-1}}.$$

Note de la rédaction. — La forme générale trouvée pour la série entière montre assez nettement qu'elle est convergente pour toute valeur de x ; aussi la démonstration de ce fait, qui est placée avant le calcul de la série, est-elle inutile dans le cas actuel ; c'est plutôt une indication de méthode pour d'autres cas plus difficiles que celui-ci.

CORRESPONDANCE

Monsieur et cher Collègue,

Depuis que j'ai écrit mon article sur le théorème de Rolle (*), je me suis aperçu qu'il est possible de généraliser ce théorème plus que je ne l'ai fait.

Tout d'abord, on a immédiatement l'énoncé suivant :

Si une fonction $f(x)$ est déterminée et admet une dérivée pour toute valeur de x comprise entre deux nombres a et b finis ou infinis, si en outre cette fonction tend vers une même limite A quand x tend vers a et quand x tend vers b, il existe au moins une valeur de x comprise entre a et b pour laquelle la dérivée est nulle.

Il suffit pour l'établir d'appliquer le théorème de Rolle à la fonction $f(x) - A$ qui, au même titre que $f(x)$, est déterminée et admet une dérivée pour toute valeur de x comprise entre a et b.

Cela posé, j'énonce le théorème que j'ai en vue :

Si une fonction $f(x)$ est déterminée et admet une dérivée pour toute valeur de x comprise entre deux

(*) Voir Revue, novembre 1905, page 337.

nombres a et b finis ou infinis, si en outre cette fonction tend vers $+\infty$ (ou vers $-\infty$) quand x tend vers a et aussi quand x tend vers b, il existe au moins une valeur de x comprise entre a et b pour laquelle la dérivée est nulle.

Supposons, pour fixer les idées, que $f(x)$ tende vers $+\infty$ quand x tend vers a et quand x tend vers b. Soit x_0 une valeur de x comprise entre a et b et prenons un nombre A supérieur à $f(x_0)$. Il est possible de trouver un nombre a_1, que l'on peut supposer du même côté que a par rapport à x_0, tel que, pour toute valeur de x comprise entre a et a_1, on ait $f(x) > A$. On a ainsi, a_2 étant un nombre déterminé, quelconque d'ailleurs, compris entre a et a_1, $f(a_2) > A$. Or, la fonction $f(x)$ étant dérivable pour toute valeur de x comprise entre a_2 et x_0 et aussi pour $x = a_2$ et pour $x = x_0$ est continue pour les mêmes valeurs, et, A étant compris entre $f(a_2)$ et $f(x_0)$, il existe un nombre a', compris entre a_2 et x_0, tel que l'on ait

$$f(a') = A.$$

Par un raisonnement analogue, on montre qu'il existe un nombre b' compris entre x_0 et b, tel que l'on ait

$$f(b') = A.$$

Cela posé, la fonction $f(x)$ est déterminée et admet une dérivée pour toute valeur de x comprise entre a' et b'; elle tend en outre vers A quand x tend vers a' ou vers b'; donc, d'après le théorème précédent, il existe au moins une valeur de x comprise entre a' et b' et, par suite, comprise entre a et b, pour laquelle la dérivée est nulle.

Veuillez agréer, etc.

CH. MICHEL.

NOTE SUR LA DÉRIVÉE DE LA FONCTION x^m.

On établit immédiatement, dès les débuts du calcul différentiel que, dans le cas où m désigne un nombre entier et positif, la dérivée de la fonction x^m est mx^{m-1}; puis, plus tard, on étend cette règle à tous les cas.

Voici la démonstration que je donne depuis longtemps dans mon enseignement.

Tout d'abord, si m désigne un nombre incommensurable ou un nombre fractionnaire de la forme $\pm\frac{2p+1}{2q}$, la fonction n'existe que pour les valeurs positives de x et on peut poser $x = e^{Lx}$; on a donc $x^m = e^{mLx}$ et il suffit d'appliquer la règle des fonctions de fonctions au second membre pour avoir la dérivée de x^m; on trouve ainsi de suite $e^{mLx}\frac{m}{x}$ ou mx^{m-1}.

Mais si m est une fraction à dénominateur impair, si m est de l'une ou l'autre des deux formes $m = \pm\frac{2p}{2q+1}$, $m = \pm\frac{2p+1}{2q+1}$, la fonction existe aussi pour x négatif. Il s'agit de voir si la règle est encore vraie pour ces valeurs de x. Pour cela on pose $x = -x'$, et on a $x^m = (-x')^m = \varepsilon x'^m$, ε étant égal à $+1$ dans le premier cas et à -1 dans le second. On dérive alors $\varepsilon x'^m$ par rapport à x', ce qui est permis puisque x' est positif, et on multiplie par la dérivée de x' par rapport à x, qui est égale à -1. Ceci donne $-m\varepsilon x'^{m-1}$ ou $\frac{m\varepsilon x'^m}{-x'}$. Il suffit alors de remplacer x' par $-x$ pour obtenir le résultat annoncé.

E. H.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1389. — *On donne dans un plan une parabole* (P) *et un cercle* (C) *ayant pour centre le foyer de* (P), *et on prend sur le cercle* (C) *deux points* H *et* K *diamétralement opposés.*

1° *Démontrer que les points* H *et* K *et les points de contact des tangentes à* P *issues de ces points sont six points d'un même cercle* (Ω). *Trouver, lorsque* H *se déplace sur* (C), *le lieu du centre et l'enveloppe* (Σ) *du cercle* (Ω), *l'enveloppe de la corde des contacts de* (Ω) *et de* (Σ) *et le lieu du pôle de cette corde.*

2° *On considère le cercle* (Ω') *correspondant aux points* H' *et* K' *du cercle* (C) *qui sont situés sur le diamètre perpendiculaire à* HK. *Prouver que les quatre points de contact de* (Ω) *et de* (Ω') *avec la courbe* (Σ) *sont en ligne droite. Trouver, lorsque le point* H *se déplace sur* (C), *les enveloppes de la ligne des centres, de l'axe radical des cercles* (Ω) *et* (Ω'), *ainsi que les lieux de leurs points communs et de leurs centres de similitude.*

3° *Prouver que la courbe* (Σ) *est un ovale de Descartes en mettant en évidence les trois foyers. Montrer qu'il y a quatre familles de cercles bitangents à cette courbe, et trouver le lieu de leurs centres, l'enveloppe des cordes de contact et le lieu des pôles de ces cordes.*

4° *Il existe quatre cercles tangents à* (Σ) *en un même point* M, *et tangents en un autre point à cette courbe. L'un de ces autres points est le point* M', *symétrique de* M *par rapport à l'axe de symétrie* Δ *de* (Σ) ; *soient* M_1, M_2, M_3 *les trois autres points et* M'_1, M'_2, M'_3 *leurs symétriques par rapport à* Δ ; *montrer que les groupes* $MM_1M_2M'_3$, $MM_1M_3M'_2$, $MM_2M_3M_1$ *sont concycliques, et trouver le lieu des centres et l'enveloppe des cercles passant par ces trois groupes de points.*

Prenons pour axes de coordonnées Ox, Oy l'axe de la parabole (P) et la perpendiculaire à l'axe menée par le foyer. Les équations des courbes (P) et (C) s'écriront

$$P \equiv y^2 - 2px - p^2 = 0, \qquad C \equiv x^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

1° En désignant alors par α, β et $-\alpha$, $-\beta$ les coordonnées de H et K, on aura, pour les polaires de ces deux points par rapport à la parabole,

$$U \equiv p(x+p) - (\beta y - p\alpha) = 0, \qquad V \equiv p(x+p) + (\beta y - p\alpha) = 0,$$

d'où l'on déduit l'équation générale des coniques passant aux quatre points de contact des tangentes menées à la parabole de H et de K :

$$UV + \lambda P = 0, \text{ ou}$$

$$p\,(x+p)^2 - (\beta y - p\alpha)^2 + \lambda(y^2 - 2px - p^2) = 0.$$

Cette courbe représente un cercle si $\lambda = \beta^2 + p^2$. Après avoir remplacé λ par cette valeur, divisé tous les termes par p^2, et simplifié en tenant compte de la condition $\alpha^2 + \beta^2 = R^2$, on trouve

$$(\Omega) \qquad x^2 + y^2 - 2\frac{\beta}{p}(\beta x - \alpha y) - R^2 = 0.$$

Le cercle que représente cette équation passant par les deux points (α, β) et $(-\alpha, -\beta)$, la propriété énoncée est démontrée.

En éliminant α et β entre les coordonnées du centre du cercle (Ω),

$$x = \frac{\beta^2}{p}, \qquad y = -\frac{\alpha\beta}{p}$$

et $\alpha^2 + \beta^2 = R^2$, on obtient

$$x^2 + y^2 - 2dx = 0 \qquad \left(\text{avec } d = \frac{R^2}{2p}\right).$$

Le lieu du centre ω du cercle (Ω) est donc un cercle. La puissance de l'origine des coordonnées par rapport au cercle (Ω), étant d'autre part constante, $-R^2$, on en déduit que l'enveloppe de (Ω) est une quartique bicirculaire (Σ).

Pour trouver cette enveloppe, écrivons l'équation de (Ω) sous la forme

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y - R^2 = 0.$$

Comme x_0, y_0 sont liés par la relation $x_0^2 + y_0^2 - 2dx_0 = 0$, il nous suffit de poser, pour ne garder qu'un paramètre variable, $x_0 = d(1 + \cos\theta)$ et $y_0 = d\sin\theta$.

L'équation du cercle (Ω) devient ainsi

$$(1) \qquad \Gamma - 2d(x\cos\theta + y\sin\theta) = 0,$$

avec

$$\Gamma \equiv x^2 + y^2 - 2dx - R^2,$$

et l'élimination de θ entre la relation (1) et sa dérivée par rapport à θ,

$$(2) \qquad x\sin\theta - y\cos\theta = 0,$$

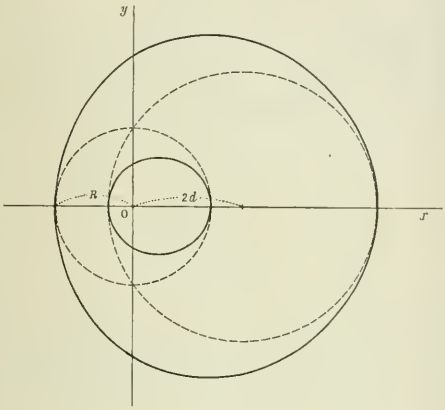
donne l'enveloppe

$$(\Sigma) \qquad \Gamma^2 - 4d^2(x^2 + y^2) = 0.$$

Pour construire cette courbe, le plus simple est de passer aux coordonnées polaires, ce qui donne

$$(3) \qquad f(\rho, \theta) \equiv \rho^2 - 2d(1 + \cos\theta)\rho - R^2 = 0.$$

On trouve en réalité deux équations polaires différant par le signe de $2d\rho$, mais on vérifie immédiatement qu'elles représentent la même courbe en remplaçant dans l'une d'elles ρ et θ respectivement par $-\rho$ et $\theta + \pi$.



Pour tracer la courbe, il n'y a qu'à suivre les valeurs successives des deux déterminations de ρ,

$$\left.\begin{matrix}\rho_1\\ \rho_2\end{matrix}\right\} = d(1 + \cos\theta) \pm \sqrt{d^2(1 + \cos\theta)^2 + R^2},$$

quand θ varie de 0 à π, puis à compléter par symétrie autour de Ox.

La détermination ρ_1 (signe $+$) est toujours positive et plus grande en valeur absolue que la détermination ρ_2 (signe $-$), toujours négative, car la somme et le produit des racines de l'équation (3) sont, la première toujours positive, et le second toujours négatif. Enfin la dérivée de ρ par rapport à θ,

$$\frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{f'_\theta}{f'_\rho} = \frac{-d\rho\sin\theta}{\rho - d(1 + \cos\theta)},$$

étant négative pour toute valeur de θ comprise entre 0 et π, et pour les deux déterminations ρ_1 et ρ_2, il en résulte que, lorsque θ augmente, la valeur absolue du rayon vecteur ρ_1 diminue, tandis que celle du rayon vecteur ρ_2 augmente.

θ	0	croît	π
ρ_1	$2d + \sqrt{4d^2 + R^2}$	décroît	R
ρ_2	$2d - \sqrt{4d^2 + R^2}$	décroît	$-R$

La courbe (Σ) se compose donc de deux ovales fermés.

En écrivant son équation cartésienne ainsi :

$$(x^2 + y^2 - R^2)(x^2 + y^2 - 4dx - R^2) - 4d^2y^2 = 0,$$

on voit qu'un des ovales est extérieur au cercle (C) et que l'autre lui est intérieur.

L'équation (2), qui peut s'écrire

$$y - x\operatorname{tg}\theta = 0,$$

représente la corde des contacts du cercle (Ω) et de son enveloppe. Elle fait l'angle θ avec Ox et passe constamment par le point fixe O.

Le pôle P de cette droite par rapport au cercle (équation (2)) est défini par les relations

$$f'_x\cos\theta + f'_y\sin\theta = 0, \qquad f'_z = 0,$$

$$(4)\qquad \begin{cases} x\cos\theta + y\sin\theta - d(1+\cos\theta) = 0, \\ x(1+\cos\theta) + y\sin\theta + \dfrac{R^2}{d} = 0. \end{cases}$$

On en tire

$$\begin{cases} x = -d(1+\cos\theta) + 2p], \\ y = \dfrac{d(1+\cos\theta)^2 + 2p\cos\theta}{\sin\theta}, \end{cases} \qquad (R^2 = 2pd)$$

et ces expressions montrent que le lieu du point P est une quartique unicursale symétrique par rapport à Ox. L'équation cartésienne de ce lieu s'obtient en éliminant θ entre les équations (4). On trouve ainsi

$$y^2(x+p)(x+2p+2d) + (x^2+2px-2pd)^2 = 0,$$

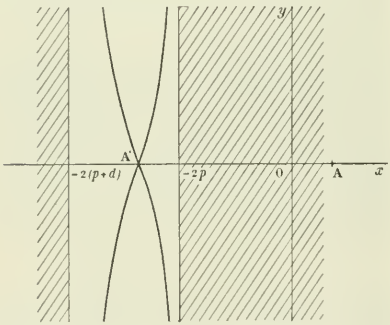
équation facile à discuter par rapport à y.

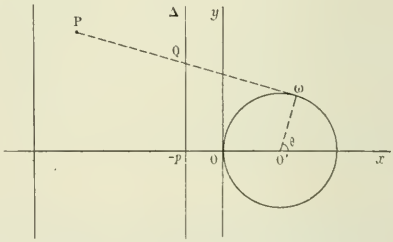
La discussion met en évidence un point double à l'infini dans la direction de Oy, et deux points doubles à distance finie sur Ox, l'un A isolé, et l'autre A′ à tangentes réelles et distinctes. Les abscisses des points A et A′ sont les racines de l'équation

$$x^2 + 2px - 2pd = 0.$$

Nous verrons plus loin que A et A′ sont deux foyers de la courbe (Σ), le troisième foyer étant le point O.

On peut donner de la courbe, lieu des pôles, une définition géométrique simple. O étant le foyer de





la parabole (P), sa directrice Δ est la droite $x = -p$. Cela étant, le pôle P de la corde des contacts est sur la droite

$$(x-d)\cos\theta + y\sin\theta - d = 0,$$

tangente au cercle O′, $x^2 + y^2 - 2dx = 0$, lieu des centres, au point

$$x_0 = d(1+\cos\theta), \qquad y_0 = d\sin\theta,$$

centre du cercle (Ω).

Entre les abscisses x_0 de ω et x de P, on a d'autre part la relation

$$x + x_0 = -2p,$$

ce qui prouve que le milieu Q du segment ωP est sur Δ. Il suffit donc pour avoir un point P de mener une tangente ωP au cercle O′, et de prolonger ωQ d'une longueur égale QP.

2°. Les centres ω et ω' des cercles (Ω) et (Ω') sont situés sur les perpendiculaires élevées aux cordes HK et H′K′ rectangulaires en leur milieu O. Ces points sont, par suite, diamétralement opposés sur le cercle O′, lieu des centres. Or on a vu qu'en représentant par $d(1+\cos\theta)$, $d\sin\theta$ les coordonnées du point ω, ce qui revient à désigner par θ l'angle $\widehat{xO'\omega}$, l'équation de la corde des contacts Oz était $y = x\,\mathrm{tg}\,\theta$.

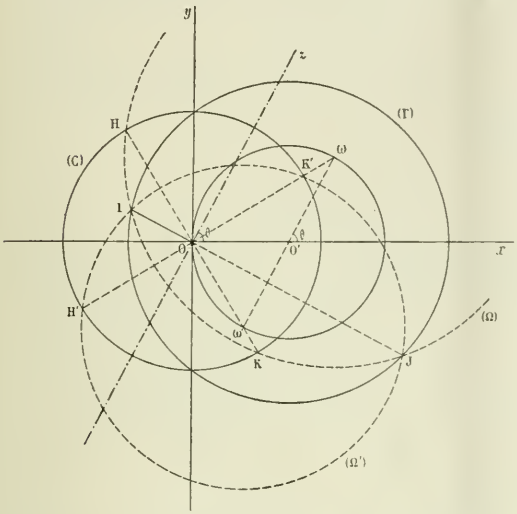
Cette corde, étant parallèle à $O'\omega$, et par conséquent à $O'\omega'$, coïncidera avec la corde des contacts du cercle (Ω').

D'après ce qui précède, on passe du cercle (Ω) au cercle (Ω') en changeant dans l'équation du premier,

$$\Gamma - 2d(x\cos\theta + y\sin\theta) = 0,$$

θ en $\theta + \pi$, ce qui donne

$$\Gamma + 2d(x\cos\theta + y\sin\theta) = 0.$$



La ligne des centres des deux cercles passe constamment par le point fixe O', et leur axe radical,

$$x\cos\theta + y\sin\theta = 0,$$

par le point O.

Enfin les points I et J communs aux deux cercles sont situés sur le cercle fixe

$$\Gamma \equiv x^2 + y^2 - 2dx - R^2 = 0,$$

concentrique au cercle O' lieu des centres, et passant aux points de rencontre du cercle (C) et de Oy.

On peut remarquer que la somme des carrés des rayons des cercles (Ω) et (Ω') est constante. En effet, la figure donne en désignant par r et r' ces rayons,

$$r^2 = \overline{\omega H}^2 = R^2 + \overline{O\omega}^2,$$

$$r'^2 = \overline{\omega' H'}^2 = R^2 + \overline{O\omega'}^2,$$

d'où

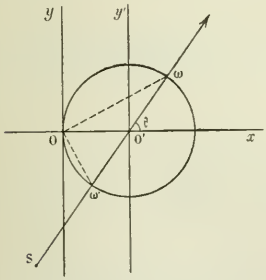
$$r^2 + r'^2 = 2R^2 + \overline{O\omega}^2 + \overline{O\omega'}^2 = 2R^2 + 4d^2.$$

Lieu des centres de similitude des deux cercles. — On trouve facilement, à l'aide des équations des cercles (Ω) et (Ω'),

$$r^2 = R^2 + 2d^2(1 + \cos\theta), \qquad r'^2 = R^2 + 2d^2(1 - \cos\theta).$$

Or, S étant un centre de similitude,

$$\frac{\overline{\omega S}^2}{\overline{\omega' S}^2} = \frac{r^2}{r'^2}.$$



Si l'on prend pour pôle le point O', on a, en posant $\overline{O'S} = \rho$, et en remarquant que les coordonnées polaires des points ω et ω' sont respectivement d, θ et $-d, \theta$,

$$\overline{\omega S} = \overline{O'S} - \overline{O'\omega} = \rho - d,$$

$$\overline{\omega' S} = \overline{O'S} - \overline{O'\omega'} = \rho + d,$$

d'où l'équation polaire du lieu des points S :

$$\frac{(\rho - d)^2}{(\rho + d)^2} = \frac{R^2 + 2d^2(1 + \cos\theta)}{R^2 + 2d^2(1 - \cos\theta)},$$

qui s'écrit, après simplifications,

$$(\rho^2 + d^2)\cos\theta + 2(d + p)\rho = 0, \qquad (R^2 = 2pd).$$

L'équation cartésienne de la courbe rapportée aux axes $O'x$, $O'y'$ est

$$(x^2 + y^2)(x + 2d + 2p) + d^2x = 0.$$

Le lieu est une cubique circulaire, aisée à construire en résolvant par rapport à y.

Elle est composée d'un ovale et de branches infinies asymptotes à la droite

$$x + 2d + 2p = 0.$$

3°. Nous avons trouvé, pour l'équation de la courbe (Σ) en coordonnées polaires,

$$\rho^2 - 2d(1 + \cos\theta)\rho - R^2 = 0.$$

Nous allons montrer que (Σ) est un *ovale de Descartes* ayant un foyer en O, et nous déterminerons en même temps la position des deux autres foyers sur l'axe de symétrie Ox.

Soit A un de ces foyers $(\overline{OA} = a)$. Pour tout point M de la courbe, on devra avoir une relation de la forme

$$AM + h.OM = k,$$

h et k étant des constantes positives ou négatives.

Cette relation devient, après élévation au carré,

$$\overline{AM}^2 - (k - h.OM)^2 = 0$$

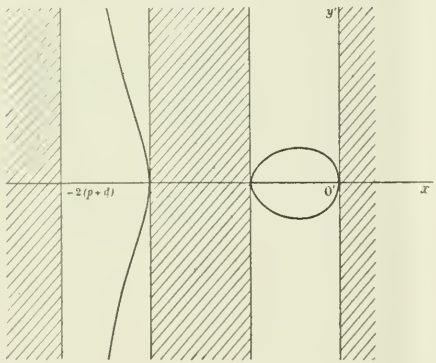
ou, comme $\quad OM = \rho \quad$ et $\quad \overline{AM}^2 = \rho^2 + a^2 - 2a\rho\cos\theta,$

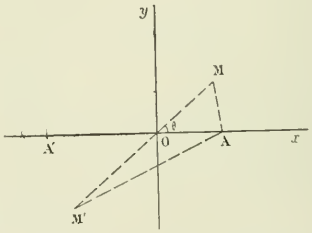
$$(1 - h^2)\rho^2 + 2(hk - a\cos\theta)\rho + a^2 - k^2 = 0.$$

Or l'identification de cette équation avec l'équation polaire de (Σ) est possible. Elle conduit aux conditions suivantes :

$$hk = -a, \qquad k^2 = R^2,$$

$$\text{avec} \left\{ \begin{array}{l} a^2 + \dfrac{R^2}{d}a - R^2 = 0, \\ \text{ou} \quad a^2 + 2pa - 2pd = 0. \end{array} \right.$$





On en tire $h = -\varepsilon\dfrac{a}{R}$ et $k = \varepsilon R$ $(\varepsilon = \pm 1)$, a étant une des racines de l'équation du second degré $a^2 + 2pa - R^2 = 0$. On obtient ainsi les deux systèmes

$$\varepsilon AM - \frac{a}{R}OM = R.$$

L'équation $a^2 + 2pa - R^2 = 0$ a une racine positive que nous désignerons par a et une racine négative a'. On constate facilement que $a < R$ et $a' < -R$. Le foyer A est donc situé à l'intérieur du petit ovale, et le foyer A' à l'extérieur du grand.

Cercles bitangents à (Σ). — Une première famille de cercles est formée par les cercles tangents à (Σ) et ayant leurs centres sur son axe de symétrie Ox. Tout cercle de cette famille tangent en M à la courbe lui est évidemment tangent au point M', symétrique de M par rapport à Ox. Les cordes de contact de ces cercles ont une direction fixe (Oy), et les pôles des cordes décrivent Ox.

Les cercles (Ω) forment la seconde famille de cercles bitangents à (Σ).

Nous allons vérifier l'existence de deux autres systèmes de cercles bitangents (Ω'), pour lesquels les foyers A et A' de l'ovale jouent le même rôle que le foyer O dans les cercles (Ω).

En tenant compte de la relation $a^2 + \frac{R^2}{d} a - R^2 = 0$, on peut écrire l'équation de (Σ)

$$\Gamma'^2 - 4 \frac{d^2 R^2}{a^2} [(x-a)^2 + y^2] = 0,$$

avec
$$\Gamma' \equiv x^2 + y^2 - 2d(x-a) + R^2.$$

Sous cette forme, on voit immédiatement que (Σ) est l'enveloppe des cercles

$$(5) \qquad \Gamma' - 2 \frac{dR}{a} [(x-a)\cos\theta + y \sin\theta] = 0,$$

où θ est un paramètre variable.

A chacune des racines a, a' de l'équation du second degré en a correspond une famille de cercles (Ω'). Le lieu des centres des cercles de chaque famille est un cercle

$$x^2 + y^2 - 2dx - \frac{R^2 d}{a} = 0,$$

de rayon $\frac{Rd}{a}$, concentrique au cercle O'.

L'enveloppe des cordes de contact avec (Σ),

$$(6) \qquad (x-a)\sin\theta - y\cos\theta = 0,$$

est l'un des points fixes A, A', et la puissance de ce point par rapport à tous les cercles (Ω') de la même famille est constante et égale à $a^2 + R^2$.

Pour déterminer le pôle de la droite (6) par rapport au cercle, [équation (5)] nous avons les équations

$$f'_x \cos\theta + f'_y \sin\theta = 0, \qquad a f'_x + f'_z = 0.$$

Ces équations, résolues par rapport à x et y, donnent

$$\left\{ \begin{aligned} x &= -\frac{Rd}{a^2}(R + a\cos\theta), \\ y &= \frac{dRa(1+\cos^2\theta) + (a^2 + R^2)\cos\theta}{a^2 \sin\theta}, \end{aligned} \right.$$

relations qui définissent une quartique unicursale.

Si, au contraire, entre les premières équations on élimine θ, on obtient l'équation cartésienne

$$y^2(a^2x + R^2 d - Rad)(a^2 x + R^2 d + Rad) + a^2 x^2 (ax + R^2)^2 = 0.$$

Si l'on remarque que a étant l'abscisse d'un foyer de l'ovale, l'abscisse de l'autre foyer est $-\frac{R^2}{a}$, on voit qu'en dehors du point double à l'infini sur Oy, la courbe a deux points doubles à distance finie, qui sont deux des foyers de l'ovale, $x = 0$, $y = 0$ et $x = -\frac{R^2}{a}$, $y = 0$. Les arcs réels sont compris entre les deux asymptotes

$$x = -\frac{Rd(R-a)}{a^2} \qquad \text{et} \qquad x = -\frac{Rd(R+a)}{a^2}.$$

Enfin, on vérifie aisément que pour la racine positive a comme pour la racine négative a' de l'équation $a^2 + \frac{R^2}{d} a - R^2 = 0$, un seul des points doubles est situé dans la région des arcs réels, l'autre étant par suite isolé. Les deux courbes, lieux des pôles des cordes de contact des cercles (Ω'), présentent donc la plus grande analogie de forme avec la courbe, lieu des pôles P des cordes de contact des cercles (Ω). La même définition géométrique leur est applicable : il n'y a qu'à remplacer, dans la génération du lieu de P, le cercle O' et la droite Δ, par le cercle lieu des centres de (Ω'),

$$x^2 + y^2 - 2dx - \frac{R^2 d}{a} = 0,$$

et la droite

$$x = -\frac{R^2}{2a} = -\frac{pd}{a}.$$

4° Les coordonnées du point M étant x_1, y_1, celles de M′ seront x_1, $-y_1$.

Pour avoir celles des points M_1, M_2, M_3, nous remarquerons que les cordes MM_1, MM_2, MM_3 passent respectivement par les foyers O, A, A′ de la courbe (Σ). Enfin, les puissances des points O, A, A′ par rapport aux cercles des trois familles étant $-R^2$, a^2+R^2, a'^2+R^2, on aura les points M_1, M_2, M_3 en prenant les inverses de M, les pôles d'inversion étant O, A, A′ et les modules correspondants $-R^2$, a^2+R^2, a'^2+R^2, (*).

$$M_1 \begin{cases} x'_1 = -\dfrac{R^2 x_1}{x_1^2+y_1^2}, \\ y'_1 = -\dfrac{R^2 y_1}{x_1^2+y_1^2}; \end{cases}$$

$$M_2 \begin{cases} x'_2 = a + \dfrac{(R^2+a^2)(x_1-a)}{(x_1-a)^2+y_1^2} = \dfrac{a\left(x_1^2+y_1^2+\dfrac{R^2}{d}x_1 - R^2\right)}{(x_1-a)^2+y_1^2}, \\ y'_2 = \dfrac{(R^2+a^2)y_1}{(x_1-a)^2+y_1^2}; \end{cases}$$

$$M_3 \begin{cases} x'_3 = \dfrac{a'\left(x_1^2+y_1^2+\dfrac{R^2}{d}x_1 - R^2\right)}{(x_1-a')^2+y_1^2}. \\ y'_3 = \dfrac{(R^2+a'^2)y_1}{(x_1-a')^2+y_1^2}. \end{cases}$$

De plus

$$x_1'^2 + y_1'^2 = \frac{R^4}{x_1^2+y_1^2},$$

$$x_2'^2 + y_2'^2 = \frac{a^2(x_1^2+y_1^2)+2R^2ax_1+R^4}{(x_1-a)^2+y_1^2},$$

$$x_3'^2 + y_3'^2 = \frac{a'^2(x_1^2+y_1^2)+2R^2a'x_1+R^4}{(x_1-a')^2+y_1^2},$$

résultats qui nous serviront plus loin.

Le cercle MM_1M_2 aura une équation de la forme

$$x^2+y^2+2\lambda x+2\mu y - R^2 = 0,$$

puisque la puissance du point O par rapport à ce cercle doit être $-R^2$. La puissance du point $A(x=a,\ y=0)$ devant être a^2+R^2, on a

$$a^2+2\lambda a - R^2 = a^2+R^2, \qquad \text{d'où} \qquad \lambda = \frac{R^2}{a} = -a'.$$

Enfin μ se détermine en écrivant que le point $M(x_1, y_1)$ est sur le cercle, de sorte que l'équation de ce dernier est

$$y_1(x^2+y^2-2a'x-R^2) - (x_1^2+y_1^2-2a'x_1-R^2)y = 0.$$

Il reste à vérifier que ce cercle passe par le point $M_3(x'_3, -y'_3)$. Cette vérification ne présente aucune difficulté ; on a seulement à tenir compte de la valeur de $x_3'^2+y_3'^2$, calculée plus haut, et de la condition $a'^2+\dfrac{R^2}{d}a' - R^2 = 0$.

(*) On retrouve en passant la triple anallagmatie de l'ovale (Σ), les pôles étant les trois foyers O, A et A′.

Les cercles $MM_1M_2M_3'$ forment un faisceau linéaire. Leurs centres sont sur la droite $x = a'$, et ils passent par les deux points fixes

$$x^2 - 2a'x - R^2 = 0, \qquad y = 0.$$

Conclusions analogues pour les cercles $MM_1M_3M_2'$ (il suffit d'échanger les lettres a et a' dans les résultats qu'on vient d'obtenir).

L'équation du cercle MM_2M_3 se trouve de la même manière. En écrivant que les puissances des points A et A' par rapport au cercle

$$x^2 + y^2 + 2\lambda x + 2\mu y + \nu = 0$$

sont $R^2 + a^2$, $R^2 + a'^2$, on a d'abord $\lambda = 0$, $\nu = R^2$. La valeur de μ se calcule ensuite par la condition que le point $M(x_1, y_1)$ soit sur le cercle. L'équation de ce dernier est alors

$$y_1(x^2 + y^2 + R^2) - (x_1^2 + y_1^2 + R^2)y = 0.$$

On voit sans peine que le point $M_1(x_1', -y_1')$ se trouve également sur le cercle.

Les cercles MM_2MM_1' forment un faisceau linéaire, le lieu des centres étant la droite $x = 0$.

VASNIER.

MÉCANIQUE

1383. — *On considère la courbe ayant pour équation* $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ *et on demande de construire cette courbe, de déterminer le point où la tangente est parallèle à* Ox *et la moitié de l'aire de la boucle de droite. Déterminer* a *de façon que cette portion d'aire soit égale à* 200^{mq}.

Cela posé, on considère un mobile M *qui parcourt l'arc correspondant depuis le sommet de la courbe jusqu'au point double* O, *avec une vitesse aérolaire constante et qui mette un jour solaire moyen à parcourir cet arc. Trouver les coordonnées polaires du point* M *au bout du temps* t.

Calculer la vitesse, l'accélération en partant de l'équation des forces vives, et l'accélération tangentielle. Comment aurait-on l'accélération normale et le rayon de courbure?

Trouver tous les résultats numériques qui correspondent à $t = 10$ *heures.*

Pour construire la courbe indiquée, le plus simple est de se servir des coordonnées polaires. L'équation devient alors

$$\rho^2 = 2a^2 \cos 2\omega.$$

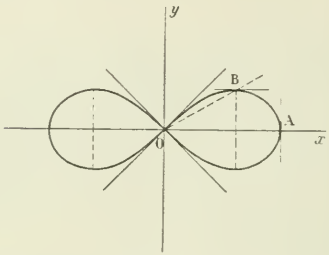
Elle montre immédiatement qu'il suffit de faire varier ω dans un intervalle d'étendue 2π; d'autre part, le changement de ω en $-\omega$ laisse ρ invariable, et, par suite, il suffit de faire varier ω de 0 à π; en outre, le changement de ω en $\pi - \omega$ laisse aussi invariable la fonction ρ, et il suffit finalement de faire varier ω de 0 à $\frac{\pi}{2}$. Au surplus, à cause des deux symétries par rapport à Ox et à Oy que nous venons de constater et qui sont évidentes sur l'équation cartésienne, nous nous bornerons à construire la portion de courbe qui correspond à la valeur positive de ρ,

$$\rho = a\sqrt{2 \cos 2\omega}.$$

Cette fonction n'est réelle que dans l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$; elle y décroît depuis $a\sqrt{2}$ jusqu'à 0. Nous obtenons ainsi une branche située dans le premier angle, qui part du point A $(0, a\sqrt{2})$ et qui aboutit à l'origine tangentiellement à la première bissectrice. En tenant compte des symétries signalées, il est alors facile d'achever la courbe.

Pour avoir le point B en lequel la tangente est parallèle à Ox, il faut écrire que $\operatorname{tg} V = -\operatorname{tg} \omega$; or $\operatorname{tg} V = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{\rho^2}{\rho\rho'}$, et, comme $\rho^2 = 2a^2 \cos 2\omega$, $\rho\rho' = -2a^2 \sin 2\omega$; par conséquent, nous avons

finalement pour déterminer ω



$$\cot 2\omega = \operatorname{tg}\omega,$$

puis $$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 2\omega\right) = \operatorname{tg}\omega,$$

et enfin $$\frac{\pi}{2} - 2\omega = \omega + k\pi.$$

La seule valeur de k qui donne un angle compris entre 0 et $\frac{\pi}{4}$ est $k = 0$; nous avons donc $\omega = \frac{\pi}{6}$, et les coordonnées du point B sont $\omega = \frac{\pi}{6}$, $\rho = a$.

Il y a donc quatre points en lesquels la tangente est parallèle à Ox et ces points sont situés sur un cercle ayant pour centre le point O et pour rayon a.

La différentielle de l'aire balayée par le rayon vecteur est $\frac{\rho^2}{2}d\omega$; l'aire envisagée a donc pour expression

$$A = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\omega\, d\omega = \frac{a^2}{2}(\sin 2\omega)_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{2}.$$

D'après la donnée numérique $A = 200$, $a^2 = 400$; par conséquent $a = 20^{\text{m}}$.

Nous prendrons pour unité de longueur le mètre et nous aurons $a = 20$; puis, dans ce qui suit, nous prendrons pour unité de temps l'heure, de sorte que la durée assignée soit égale à 24.

Cela posé, la vitesse aréolaire ayant pour expression $\frac{\rho^2}{2}\frac{d\omega}{dt}$, nous aurons

$$\frac{\rho^2}{2}\frac{d\omega}{dt} = C,$$

c'est-à-dire $$a^2 \cos 2\omega\, d\omega = C dt,$$

puis $$a^2 \sin 2\omega = 2Ct + C'.$$

Prenons pour origine des temps l'époque où le mobile est en A; pour $t = 0$, nous aurons $\omega = 0$, par suite, $C' = 0$; pour $t = 24$, nous aurons $\omega = \frac{\pi}{4}$, $2\omega = \frac{\pi}{2}$ et $a^2 = 48\,C$.

Or $a^2 = 400$; donc $C = \frac{25}{3}$.

Telle est la valeur constante de la vitesse aréolaire en mètres carrés.

La relation entre ω et t devient alors

$$\sin 2\omega = \frac{t}{24};$$

nous avons donc de suite $$\omega = \frac{1}{2}\arcsin\frac{t}{24},$$

puis $$\rho = \frac{10}{\sqrt{3}}\sqrt[4]{576 - t^2}.$$

Ce sont les coordonnées polaires du mobile à l'époque t.

Pour calculer la vitesse, nous commençons par former les composantes de cette vitesse, $\frac{d\rho}{dt}$ et $\rho\frac{d\omega}{dt}$. Nous avons d'abord

$$\rho^2\frac{d\omega}{dt} = 2C, \qquad \rho\frac{d\omega}{dt} = \frac{2C}{\rho};$$

puis $$\rho^2 = 2a^2\cos 2\omega,$$

$$\rho \frac{d\rho}{dt} = -2a^2 \sin 2\omega \frac{d\omega}{dt} = -\frac{4a^2 C \sin 2\omega}{\rho^2};$$

or

$$\rho^2 = 2a^2 \cos 2\omega,$$

donc

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{2C \operatorname{tg} 2\omega}{\rho}.$$

Par conséquent

$$v^2 = \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 = \frac{4C^2}{\rho^2 \cos^2 2\omega},$$

finalement

$$v^2 = \frac{16a^4C^2}{\rho^6}.$$

Ayant ainsi la valeur de la vitesse, il est aisé d'avoir l'accélération γ en appliquant l'équation des forces vives

$$dv^2 = 2\gamma . d\rho,$$

qui donne

$$2\gamma = \frac{dv^2}{d\rho};$$

$\frac{dv^2}{d\rho}$ s'obtient en effet immédiatement et l'on a

$$\gamma = -\frac{48a^4C^2}{\rho^7},$$

équation qui montre, en particulier, que l'action du point O sur le mobile est attractive.

D'autre part, l'accélération tangentielle a pour expression $\frac{dv}{dt}$ et, comme $v = \frac{4a^2C}{\rho^3}$,

nous avons

$$\gamma_t = -\frac{12a^2C}{\rho^4} \cdot \frac{d\rho}{dt};$$

donc

$$\gamma_t = \frac{24a^2C^2 \operatorname{tg} 2\omega}{\rho^5} = \frac{24a^2C^2 \sin 2\omega}{\rho^5 \cos 2\omega};$$

finalement

$$\gamma_t = \frac{48a^4C^2 \sin 2\omega}{\rho^7}.$$

L'accélération normale est alors fournie par l'équation $\gamma_n = \sqrt{\gamma^2 - \gamma_t^2}$, qui donne immédiatement

$$\gamma_n = \frac{48a^4C^2 \cos 2\omega}{\rho^7} = \frac{24a^2C^2}{\rho^5}.$$

Il suffit maintenant de s'appuyer sur la valeur théorique de γ_n, $\gamma_n = \frac{v^2}{R}$, pour obtenir de suite le rayon de courbure

$$R = \frac{2a^2}{3\rho}.$$

Résultats numériques. — Si nous remplaçons maintenant a et C par leurs valeurs et t par 10, nous aurons

$$\omega = \frac{1}{2} \arcsin \frac{5}{12}, \qquad \rho = \frac{10}{\sqrt{3}}\sqrt{476} = 10\sqrt[4]{\frac{476}{9}}, \qquad v = \frac{10}{119}\sqrt[4]{4284},$$

$$|\gamma| = \frac{1440}{\sqrt{476}^2}\sqrt{4284}, \qquad R = \frac{80}{\sqrt{4284}}.$$

Nous mettrons ρ aussi sous la forme $\frac{10}{3}\sqrt{4284}$. Cela posé, nous avons d'abord

$$\log 4284 = 3{,}63185,$$
$$\log \sqrt[4]{4284} = 0{,}90796,$$
$$\log 476 = 2{,}67761,$$
$$\log \overline{476}^2 = 5{,}35522,$$
$$\operatorname{colog} \overline{476}^2 = \overline{6}{,}64478;$$

puis

Calcul de ω :

$$\log 5 = 0{,}69940$$
$$\operatorname{colog} 12 = \overline{2}{,}92082$$
$$\log \sin 2\omega = \overline{1}{,}62022, \qquad 2\omega = 27^\circ 39'$$
$$\omega = 13^\circ 69';$$

Calcul de ρ :

$$\log 10 = 1$$
$$\operatorname{colog} 3 = \overline{1}{,}52288$$
$$\log \sqrt[4]{4284} = 0{,}90796$$
$$\log \rho = 1{,}43084 \qquad \Delta = 16$$
$$\text{pour } 1{,}43072 \qquad 26{,}96$$
$$12 \qquad 75$$
$$\rho = 26{,}9675;$$

Calcul de v :

$$\log 10 = 1,$$
$$\operatorname{colog} 119 = \overline{3}{,}92445$$
$$\log \sqrt[4]{4284} = 0{,}90796$$
$$\log v = \overline{1}{,}83241 \qquad \Delta = 7$$
$$\text{pour } \overline{1}{,}83238 \qquad 0{,}6798$$
$$3 \qquad 4$$
$$v = 0{,}67984;$$

Calcul de $|\gamma|$:

$$\log 1440 = 3{,}15836$$
$$\operatorname{colog} \overline{476}^2 = \overline{6}{,}64478$$
$$\log \sqrt[4]{4284} = 0{,}90796$$
$$\log |\gamma| = \overline{2}{,}71110 \qquad \Delta = 8$$
$$\text{pour } \overline{2}{,}71105 \qquad 0{,}05142$$
$$5 \qquad 6$$
$$\gamma = 0{,}051426;$$

Calcul de R :

$$\log 80 = 1{,}90309$$
$$\operatorname{colog} \sqrt[4]{4284} = \overline{1}{,}09204$$
$$\log R = 0{,}99513 \qquad \Delta = 4$$
$$\text{pour } 0{,}99511 \qquad 9{,}888$$
$$2 \qquad 5$$
$$R = 9{,}8885.$$

Bonnes solutions : MM. Parrod ; M. Laurence ; Dessimond, à Alger ; Bros, à Albi.

QUESTIONS PROPOSÉES

1468. — 1° Etudier, suivant les valeurs de k, les racines de l'équation

$$e^{2x} = \frac{k+x}{k-x}.$$

2° On considère l'équation

$$e^{2x} = \frac{k-a+x}{k+a-x},$$

k étant un nombre dont la valeur absolue est plus petite que 1. Montrer que cette équation a une racine réelle et une seule.

3° Etant donné un nombre quelconque x_0, on pose successivement

$$e^{2x_0} = \frac{k-a+x_1}{k+a-x_1},$$
$$e^{2x_1} = \frac{k-a+x_2}{k+a-x_2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

Montrer que x_n a une limite pour n infini et que cette limite est égale à la racine.

Interprétation géométrique.

CH. MICHEL.

1469. — Dans un plan (P), on trace une droite (A) et une courbe (B).

Un point a décrit (A) d'un mouvement uniforme, un point b est animé sur (B) d'un mouvement uniforme.

Soit c le milieu de ab.

On projette orthogonalement le mouvement de ce point c sur un plan (Q).

Démontrer que l'on obtient ainsi le mouvement plan le plus général à hodographe elliptique.

TH. CARONNET.

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

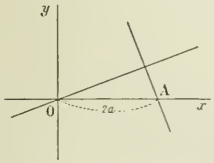
1400. — *On considère toutes les paraboles ayant pour foyer un point donné et vues d'un autre point également donné sous un angle droit.*

1° *Former l'équation générale de ces paraboles. Montrer qu'il en passe deux par tout point du plan. Trouver la région où doit être ce point pour qu'elles soient réelles et indiquer l'enveloppe de ce système de paraboles.*

2° *Donner l'équation du cercle de courbure au sommet de l'une de ces paraboles et le lieu de son centre.*

Solution analytique. — 1° Prenons le point donné comme foyer, pour origine, et deux axes rectangulaires Ox et Oy, Ox passant par le point A d'où l'on voit les paraboles sous un angle droit; posons $OA = 2a$.

L'équation générale des paraboles considérées s'obtient en exprimant que l'origine est foyer et que la directrice passe par A. C'est donc



$$x^2 + y^2 = [(x - 2a)\cos\theta + y\sin\theta]^2.$$

En un point (x_1, y_1) du plan passent toutes les paraboles pour lesquelles θ vérifie la relation

$$x_1^2 + y_1^2 = [(x_1 - 2a)\cos\theta + y_1\sin\theta]^2.$$

Remplaçons-y $\cos\theta$ et $\sin\theta$ par

$$\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}} \quad \text{et} \quad \frac{\operatorname{tg}\theta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}},$$

puis développons et ordonnons ; nous aurons

$$x_1^2 \operatorname{tg}^2\theta - 2(x_1 - 2a)y_1 \operatorname{tg}\theta + y_1^2 + 4ax_1 - 4a^2 = 0.$$

Par (x_1, y_1) passent donc deux paraboles pour lesquelles $\operatorname{tg}\theta$ est donné par cette relation.

Ces paraboles sont réelles en même temps que $\operatorname{tg}\theta$, c'est-à-dire si

$$(x_1 - 2a)^2 y_1^2 - x_1^2 y_1^2 + 4ax_1 - 4a^2) \geqslant 0;$$

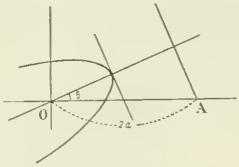
cette condition se réduit à

$$-4a(x_1 - a)(x_1^2 + y_1^2) \geqslant 0,$$

et l'on voit que x_1 doit être inférieur à a, en supposant toutefois $a > 0$.

L'enveloppe se compose de la droite $x - a = 0$
et des deux droites isotropes $x^2 + y^2 = 0$.

2° Pour obtenir l'équation du cercle de courbure au sommet, remarquons que ce cercle est une des coniques du faisceau déterminé par la parabole



$$x^2 + y^2 - [(x - 2a)\cos\theta + y\sin\theta]^2 = 0,$$

et par la conique singulière constituée par deux droites confondues avec la tangente au sommet de la parabole

$$(x - a)\cos\theta + y\sin\theta = 0.$$

Pour qu'une conique de ce faisceau,

$$x^2 + y^2 - [(x - 2a)\cos\theta + y\sin\theta]^2 + \lambda[(x - a)\cos\theta + y\sin\theta]^2 = 0,$$

soit un cercle il faut que $\lambda = 1$.

L'équation du cercle est donc

$$x^2 + y^2 + 2ax\cos^2\theta + 2ay\sin\theta\cos\theta - 3a^2\cos^2\theta = 0.$$

Eliminant θ entre les équations paramétriques de son centre,

$$x + a\cos^2\theta = 0,$$
$$y + a\sin\theta\cos\theta = 0,$$

on trouve le lieu demandé : $x^2 + y^2 + ax = 0$.

C'est un cercle passant par l'origine et ayant son centre sur Ox au point $\left(-\frac{a}{2},\ 0\right)$.

L'équation du cercle de courbure de la parabole en son sommet peut s'écrire

$$(x^2 + y^2)(1 + \operatorname{tg}^2\theta) + 2ax + 2ay\operatorname{tg}\theta - 3a^2 = 0.$$

Si on écrit qu'elle a une racine double en $\operatorname{tg}\theta$, on obtient l'enveloppe de ce faisceau de cercles. On trouve ainsi

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + 2ax - 3a^2) - a^2y^2 = 0,$$

ou

$$(x^2 + y^2)^2 + 2ax(x^2 + y^2) - 3a^2x^2 - 4a^2y^2 = 0.$$

En passant aux coordonnées polaires, on obtient de suite

$$\rho^2 + 2a\rho\cos\omega - 3a^2 - a^2\sin^2\omega = 0,$$

ou

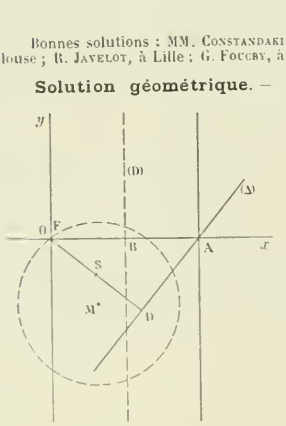
$$(\rho + a\cos\omega)^2 = 4a^2,$$
$$\rho = -a\cos\omega \pm 2a.$$

Cette enveloppe est donc un limaçon de Pascal aisé à placer.

E.-N. BARISIEN et DESSIMOND, à Alger.

Bonnes solutions : MM. Constandaki ; Amblard, à Ruines ; J. Yernaux, à Mons ; A. Darmon, à Alger ; G. Pélissier, à Toulouse ; R. Javelot, à Lille ; G. Foucby, à Roanne ; Quémeneur, à Rouen ; A. Dediu ; G. Cotty ; M. Grangier.

Solution géométrique. — La solution géométrique de ce problème est évidente. Du point A la parabole est vue sous un angle droit ; donc le point A appartient à la directrice. Alors la droite perpendiculaire à FA en son milieu est tangente à la parabole, et cette droite (D), jointe aux deux droites isotropes issues de F, constitue l'enveloppe des paraboles envisagées. Soit alors M un point d'une parabole du faisceau ; ce point est équidistant du foyer et de la directrice ; donc celle-ci est une des deux tangentes menées du point A au cercle ayant M pour centre et passant au point F. Il y a donc deux paraboles du faisceau qui passent en M. Si M est à gauche de la droite (D), ces paraboles sont réelles ; si M est à droite, elles sont imaginaires et enfin, si M est sur la droite (D), elles sont confondues. La droite (D) est donc la séparative demandée.



D'autre part, la directrice passant au point A, le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée du point F sur la directrice est le cercle décrit sur FA comme diamètre. En outre, le sommet S est le milieu de FD ; donc le lieu de S est le cercle homothétique du précédent et dans le rapport 1/2.

Le cercle de courbure de la parabole en son sommet a pour centre le point de rebroussement de la développée, c'est-à-dire le symétrique du point S par rapport au foyer. Le lieu de ce point est donc le symétrique par rapport au point F du cercle précédent.

A. SAINTE-LAGÜE.

MÉCANIQUE

1392. — *Un point matériel* M *est attiré vers un point fixe* O *par une force proportionnelle à la distance* MO. *Il est lancé avec une vitesse* v_0 *d'un point* A. *Quel doit être l'angle de cette vitesse avec* OA *pour que sa trajectoire passe par un point donné* B? *Montrer que le problème n'est possible que si le point* B *est intérieur à une ellipse qui a* O *pour centre et* A *pour foyer, ou s'il est situé sur cette ellipse. Dans ce cas limite, la vitesse* v_0 *doit être perpendiculaire à la tangente en* B *à l'ellipse.*

Posons $OA = a$, et prenons pour axe des x la droite OA et pour axe des y la perpendiculaire à OA menée par le point O.

Supposons la masse du mobile M égale à 1, et désignons par $k^2.OM$ la force attractive ; ses projections sur les axes sont $-k^2x$, $-k^2y$, en appelant x et y les coordonnées du point M.

Les équations différentielles du mouvement sont alors

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + k^2y = 0;$$

elles ont pour intégrales générales

$$x = A\cos kt + B\sin kt,$$
$$y = A'\cos kt + B'\sin kt.$$

Écrivons qu'au temps $t = 0$, on a $x = a$, $y = 0$, $\frac{dx}{dt} = v_0\cos\alpha$, $\frac{dy}{dt} = v_0\sin\alpha$, nous obtenons $A = a$, $A' = 0$, $B = \frac{v_0\cos\alpha}{k}$, $B' = \frac{v_0\sin\alpha}{k}$. Par suite, la trajectoire du mobile est définie par les équations

$$x = a\cos kt + \frac{v_0\cos\alpha}{k}\sin kt,$$

$$y = \frac{v_0\sin\alpha}{k}\cos kt.$$

Elles représentent une ellipse qui a pour équation

$$\frac{k^2y^2}{v_0^2\sin^2\alpha} + \frac{(x\sin\alpha - y\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha} - 1 = 0.$$

Cette courbe admet pour centre l'origine et pour diamètres conjugués la droite OA et une parallèle à la vitesse initiale menée par le point O.

Son équation écrite sous la forme

$$a^2k^2y^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + v_0^2(x\sin\alpha - y\cos\alpha)^2 = a^2v_0^2\sin^2\alpha$$

et divisée par $\cos^2\alpha$ donne l'équation du deuxième degré en $\operatorname{tg}\alpha$:

$$(1)\qquad \operatorname{tg}^2\alpha(v_0^2x^2 + a^2k^2y^2 - a^2v_0^2) - 2v_0^2xy\operatorname{tg}\alpha + y^2(a^2k^2 + v_0^2) = 0,$$

qui fait connaître l'angle α que doit faire v_0 avec Ox pour que l'ellipse décrite par le point M passe par un point $B(x, y)$.

Pour que le problème soit possible, il faut que l'équation (1) ait des racines réelles, c'est-à-dire que l'on ait

$$v_0^4x^2y^2 - y^2(a^2k^2 + v_0^2)(v_0^2x^2 + a^2k^2y^2 - a^2v_0^2) \geqslant 0$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2 + \frac{v_0^2}{k^2}} + \frac{y^2}{\frac{v_0^2}{k^2}} - 1 \leqslant 0.$$

Cette condition exprime que le point (x, y) est à l'intérieur de l'ellipse (E) qui est définie par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2 + \frac{v_0^2}{k^2}} + \frac{y^2}{\frac{v_0^2}{k^2}} - 1 = 0.$$

Cette ellipse est rapportée à ses axes et a pour foyer le point A.

Si le point B est à l'intérieur de cette ellipse, l'équation (1) a deux racines réelles, le problème a deux solutions.

Si le point B est sur l'ellipse (E), il n'y a plus qu'une solution. L'équation (1) a une racine double égale à

$$\frac{a^2k^2 + v_0^2}{v_0^2} \cdot \frac{x}{y};$$

c'est le coefficient angulaire de la vitesse v_0.

D'autre part, le coefficient angulaire de la tangente en $B(x, y)$ à l'ellipse (E) est

$$-\frac{v_0^2y}{(a^2k^2 + v_0^2)x}.$$

Le produit de ces deux quantités étant égal à -1, la vitesse initiale est bien perpendiculaire à la tangente au point B.

BROS, à Albi.

Solutions semblables par MM. Amblard, conducteur des ponts et chaussées à Ruines (Cantal); Darmon, lycée d'Alger; Dessimond, lycée d'Alger; M. Grangier, à Monbydier; Gabriel Pélissier, à Toulouse.

1401. — *On considère la courbe*

$$x = a\frac{\lambda^3 - \lambda^2}{\lambda + 1}, \qquad y = a(\lambda^2 - 1),$$

en coordonnées rectangulaires, et un point A *de cette courbe ayant pour paramètre* λ. *On lance en* O *un mobile* M *avec une vitesse initiale représentée par le vecteur* OA, *l'accélération du point* M *étant constante, parallèle à* Oy *et ayant pour projection sur cet axe* $-g$ $(g > 0)$. *Trouver et construire le lieu géométrique des sommets des trajectoires du point* M *quand* λ *varie.*

Les composantes du vecteur OA sont $a\frac{\lambda^3 - \lambda^2}{\lambda + 1}$ et $a(\lambda^2 - 1)$; ce sont les deux composantes de la vitesse initiale v_0. Cela posé, on a

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -g;$$

puis, en prenant pour origine du temps l'époque où le mobile quitte le point O,

$$\frac{dx}{dt} = a\frac{\lambda^3 - \lambda^2}{\lambda + 1}, \qquad \frac{dy}{dt} = -gt + a(\lambda^2 - 1),$$

et

$$(1) \qquad \begin{cases} x = at\,\dfrac{\lambda^3 - \lambda^2}{\lambda + 1}, \\ y = -g\,\dfrac{t^2}{2} + at(\lambda^2 - 1). \end{cases}$$

Quand t varie, ces équations représentent la parabole trajectoire du point M.

Le sommet est le point en lequel $\frac{dy}{dt} = 0$; d est donné par $t = \frac{a(\lambda^2 - 1)}{g}$. Nous aurons le lieu de ce sommet en portant cette valeur de t dans les équations (1) ; nous avons ainsi les deux équations paramétriques du lieu :

$$(2) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{a^2}{g}\lambda^2(\lambda - 1)^2, \\ y = \dfrac{a^2}{2g}(\lambda^2 - 1)^2. \end{cases}$$

Si nous prenons $\frac{a^2}{2g}$ pour unité dans l'échelle adoptée pour tracer la courbe, nous aurons plus simplement

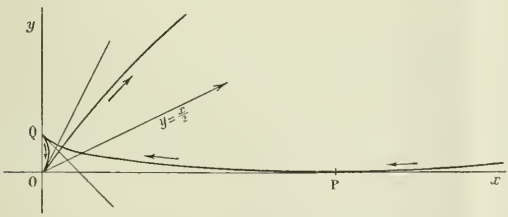
$$x = 2\lambda^2(\lambda - 1)^2, \qquad y = (\lambda^2 - 1)^2.$$

Pour $\lambda = -\infty$, x et y sont égaux à $+\infty$ et $\frac{y}{x}$ a pour limite $\frac{1}{2}$. Nous avons donc une branche infinie située dans le premier angle, avec $y = \frac{x}{2}$ pour direction asymptotique. D'ailleurs $y - \frac{x}{2} = 2\lambda^3 - 3\lambda^2 + 1$, et cette quantité devient égale à $-\infty$ pour $\lambda = -\infty$. La branche infinie est parabolique à l'infini au-dessous de la droite $y - \frac{x}{2} = 0$.

Pour $\lambda = -1$, $y = 0$, $x = 8$; on a un point P de Ox et, comme

$$x - 8 = (\lambda + 1)(2\lambda^3 - 6\lambda^2 + 8\lambda - 8),$$

on voit que $\frac{y}{x - 8}$ tend vers 0 quand λ tend vers -1 : la tangente au point P est l'axe des x.



Pour $\lambda = 0$, $x = 0$ et $y = 1$; d'ailleurs $y - 1 = \lambda^4 - 2\lambda^2$,

$$\frac{y - 1}{x} = \frac{\lambda^2 - 2}{2(\lambda - 1)^2}$$

et la limite de ce rapport est -1 pour $\lambda = 0$. Il en résulte que ce point Q de Oy est un point de rebroussement où la tangente est parallèle à la deuxième bissectrice.

Pour $\lambda = 1$, x et y sont nuls ; on a en outre $\frac{y}{x} = \frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda^2}$; la limite est 2. Autre point de rebroussement avec $y = 2x$ pour tangente. — Enfin, pour $\lambda = \infty$, on retrouve une autre branche parabolique ayant $y = \frac{x}{2}$ pour direction asymptotique et située au-dessus de cette droite.

La courbe est alors aisée à tracer.

On aurait de suite l'équation cartésienne, puisque

$$\frac{\lambda+1}{\lambda}=\sqrt{\frac{2y}{x}},$$

et, par suite,

$$\frac{\lambda+1}{\sqrt{2y}}=\frac{\lambda}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{2y}-\sqrt{x}}.$$

G. PÉLISSIER, à Toulouse et DESSIMOND, à Alger.

Bonnes solutions de MM. Grangier, à Monbydier; A. Dediu, à Bucarest.

ÉCOLE CENTRALE (1905).

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

Géométrie descriptive (M. Lévi.)

3275. — Intersection d'une verticale avec un plan défini par la ligne de terre et un point.

3276. — Distance de deux droites en géométrie cotée.

3277. — On donne trois points a, b, c, de cotes α, β, γ. — Centre du cercle circonscrit au triangle déterminé par ces trois points.

3278. — On considère deux plans P et Q invariablement liés; comment peut-on les amener au moyen de rotations à être simultanément verticaux? Peut-on par cette méthode trouver l'angle de deux plans?

3279. — Amener deux droites invariablement liées à être parallèles en projection horizontale.

3280. — On donne une droite verticale et une droite quelconque. — Lieu du milieu d'un segment de droite s'appuyant sur les deux droites données et parallèle au plan horizontal.

3281. — On donne un plan gradué et une droite dans ce plan. — Mener par la droite un plan à 45° sur le premier.

3282. — Mener par un point une droite passant à des distances données de deux droites données. — Choisir les plans de projection de manière à avoir une épure simple.

3283. — Contours apparents d'un cylindre de révolution, passant par un point, tangent à un plan de bout et à un plan vertical.

3284. — On considère un tétraèdre dont la base est dans le plan horizontal. Construire le contour apparent du cône de révolution circonscrit à ce tétraèdre et ayant pour sommet l'un des sommets de la base.

3285. — Trois droites graduées concourent en un point S de cote 35. — Elles sont les génératrices d'un cône de révolution. — Contour apparent de ce cône.

3286. — On donne trois points, dans le plan horizontal, qui appartiennent à une sphère tangente à un plan de bout donné. — Déterminer le contour apparent vertical et le contour apparent horizontal de la sphère.

3287. — Contours apparents horizontal et vertical d'une sphère tangente à un plan de bout, à un plan vertical, et dont on connaît deux points.

3288. — Plan tangent commun à deux cônes de même sommet et dont les bases sont dans des plans différents.

3289. — Mener une normale commune à deux cylindres de révolution dont l'un a un axe vertical, l'autre un axe de front.

3290. — Un cône a pour base un cercle dans un plan de profil. — Section par le plan bissecteur du premier dièdre.

3291. — Mener à un ellipsoïde de révolution à axe vertical un plan tangent parallèle à une direction $\Delta\Delta'$, tel que le point de contact soit sur un méridien donné.

3292. — Mener à un ellipsoïde de révolution un plan tangent par une droite de front.

3293. — On considère un ellipsoïde de révolution à axe de front. — On demande le contour apparent horizontal.

3294. — On donne un ellipsoïde de révolution à axe de front. — Déterminer l'ombre parallèlement à une direction donnée.

3295. — On donne un ellipsoïde de révolution à axe vertical. — On le coupe par un plan PzQ'; points de la section où la tangente est horizontale.

3296. — On donne un ellipsoïde de révolution à axe vertical. — Trouver les sommets en projection horizontale de la section par le bissecteur du premier dièdre.

3297. — Intersection d'une droite avec un ellipsoïde de révolution à axe de front.

3298. — On considère une surface de révolution à axe de front. — Déterminer un point du contour apparent horizontal.

3299. — On fait tourner autour de la ligne de terre une courbe située dans un plan de bout. — Trouver un point de la surface. — Plan tangent en ce point.

3300. — On considère un axe horizontal autour duquel on fait tourner une courbe du plan horizontal. — Soit s, s' un point lumineux ; déterminer la courbe d'ombre.

3301. — On donne un hyperboloïde de révolution à axe vertical engendré par une droite G, G' et un point S, S' ; point de contact du plan tangent à la surface qui passe par S, S' et a son contact sur la génératrice G, G'.

3302. — On considère deux cercles concentriques de cotes 8 et 0 ; l'un est le cercle de gorge, l'autre la trace horizontale d'un hyperboloïde de révolution. — Cet hyperboloïde est-il défini ? — Etant donnée la projection horizontale d'un point de l'hyperboloïde, trouver sa cote.

3303. — On donne un tétraèdre régulier SABC dont la base ABC est dans le plan horizontal. — On fait tourner SB autour de la verticale du point A ; intersection de l'hyperboloïde ainsi engendré et du plan SBC.

3304. — On considère une droite graduée tournant autour d'un axe horizontal. — Intersection de l'hyperboloïde ainsi engendré, par un plan donné par son échelle de pente.

3305. — Peut-on couper un hyperboloïde de révolution à axe vertical par un plan mené par une droite donnée, et de façon à avoir une parabole ?

3306. — On considère un hyperboloïde de révolution à axe vertical engendré par une droite de front. — On prend un point sur l'axe et par ce point on mène une droite quelconque. — Intersection de la droite avec l'hyperboloïde.

3307. — Intersection d'une droite et d'un hyperboloïde quand on connaît déjà un point.

3308. — Plans tangents à un hyperboloïde de révolution à axe vertical par une droite horizontale.

3309. — On considère un hyperboloïde engendré par la ligne de terre en tournant autour d'une droite de front. — Mener un plan tangent par une droite de bout.

3310. — On donne un axe de bout autour duquel on fait tourner une droite quelconque. Mener par une droite de front les plans tangents à l'hyperboloïde ainsi engendré.

3311. — Plans asymptotes parallèles de deux hyperboloïdes.

3312. — Intersection d'un cône et d'un cylindre ayant un plan de symétrie commun.

3313. — On donne un cône de révolution à axe de front et un point dans le plan de front de l'axe. Ce point est le centre d'une sphère dont on demande l'intersection avec le cône.

3314. — Une hyperbole dans le plan horizontal est la directrice commune à deux cylindres dont on donne les directions des génératrices par deux droites données. — Intersection des deux cylindres. — Trace sur le plan horizontal du plan de la seconde courbe plane.

3315. — On donne une ellipse dans le plan horizontal et deux points s et σ dans le plan vertical ; intersection des deux cônes ayant s et σ comme sommets et l'ellipse comme base commune.

3316. — On donne un cône de révolution à axe vertical : on le coupe par un plan de bout et la courbe obtenue est la base d'un cône ayant son sommet sur la ligne de terre. — Intersection des deux cônes.

3317. — On considère un cercle dans le plan horizontal et sur ce cercle un point s de cote 8 ; ce point est le sommet d'un cône ayant le cercle pour base. — On transporte le cône parallelement à lui-même de façon à lui donner pour sommet le point σ de cote 4. — Construire la trace horizontale du cône transporté. — Intersection des deux cônes.

3318. — On coupe une sphère par un plan et on considère un cylindre ayant pour directrice ce cercle et ses génératrices parallèles à la ligne de terre. — Intersection des deux surfaces.

3319. — On donne un ellipsoïde de révolution à axe vertical ; on considère une parallèle qui est la directrice d'un cône de sommet s, s'. — Intersection.

3320. — On considère un tétraèdre régulier dont la base ABC est dans le plan horizontal. — Intersection des cônes de révolution de sommets A et B inscrits dans le tétraèdre. — Plans tangents communs à ces deux cônes.

3321. — On considère un ellipsoïde de révolution à axe vertical ; dans un plan méridien à 45° sur le plan vertical, on prend deux points symétriques par rapport à l'axe. — On considère les deux cônes ayant ces points pour sommets et circonscrits à l'ellipsoïde. — Intersection de ces cônes.

3322. — On donne un tore à axe de front et un cône ayant pour sommet un point s, s' de l'axe et pour base une courbe C du plan horizontal. — Intersection.

3323. — Intersection de deux surfaces de révolution dont les axes se rencontrent. — *Application* : Soient A et B deux droites rectangulaires du plan horizontal, C un cercle dans ce plan ; intersection des deux tores engendrés par le cercle C tournant autour des droites A et B.

3324. — Intersection de deux hyperboloïdes de révolution ayant une génératrice commune. — Cas où les axes de révolution des deux surfaces sont dans un même plan de front.

3325. — Etant données quatre droites quelconques, est-il possible de mener une droite les rencontrant toutes les quatre ?

3326. — On considère un paraboloïde hyperbolique défini par une verticale et une autre droite donnée et admettant comme plan directeur un plan de bout donné. — Construire une génératrice de la surface.

3327. — On considère un paraboloïde hyperbolique ayant pour plan directeur un plan de bout et deux droites données comme génératrices de l'autre système. — Tracer une génératrice de la surface.

3328. — On considère un paraboloïde hyperbolique ayant pour plans directeurs les deux plans bissecteurs. — On

donne deux génératrices de la surface parallèles au premier bissecteur. — Connaissant la projection verticale d'un point, trouver sa projection horizontale et le plan tangent en ce point.

3329. — Un paraboloïde hyperbolique a un plan de bout pour plan directeur et deux droites de front pour directrices. — Trouver une génératrice. — Sommet du paraboloïde.

3330. — Étant donné un paraboloïde hyperbolique isocèle ayant pour plans directeurs les deux plans de projection, comment trouve-t-on son sommet ?

3331. — Paraboloïde ayant pour plans directeurs le bissecteur du premier dièdre et un plan de bout.

3332. — Contour apparent horizontal d'un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal. — Achever de le construire dès qu'on connaît deux points.

3333. — Contour apparent horizontal d'un paraboloïde hyperbolique dont un plan directeur est de bout.

3334. — On considère deux plans de bout rectangulaires R et S et deux droites G, H, parallèles au plan R. — On définit ainsi un paraboloïde hyperbolique dont on demande le contour apparent horizontal.

3335. — Étant donné un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal, trouver la courbe d'ombre de la surface éclairée par un point lumineux.

3336. — On considère un paraboloïde hyperbolique ayant comme plans directeurs deux plans de bout. — On éclaire par un point lumineux s, s'. — Courbe d'ombre.

3337. — On considère un paraboloïde hyperbolique ayant pour plan directeur le plan horizontal. — Peut-on construire des plans tangents à la surface à 45° sur le plan horizontal ? — Y a-t-il un lieu des points de contact de ces plans tangents ?

3338. — On considère un paraboloïde hyperbolique ayant pour plan directeur le plan horizontal. — Section par le plan bissecteur du premier dièdre.

3339. — Section d'un paraboloïde hyperbolique à plans directeurs, l'un horizontal, l'autre de front par le bissecteur du premier dièdre. — Nature de la section.

3340. — On considère un paraboloïde hyperbolique ayant comme plan directeur le plan horizontal et défini par deux génératrices. — Intersection de cette surface avec une droite de bout.

3341. — On considère un paraboloïde hyperbolique ayant pour plans directeurs un plan de bout et le plan horizontal. — On donne deux génératrices parallèles au plan de bout, (D, D'), (Δ, Δ') et on considère une droite (R, R') ayant sa projection verticale R' quelconque et sa projection horizontale R confondue avec Δ. — Intersection de cette droite avec le paraboloïde.

3342. — On donne un paraboloïde hyperbolique dont un plan directeur est horizontal et l'autre de bout ; lui mener un plan tangent par une droite dont la projection horizontale est confondue avec celle d'une génératrice.

QUESTIONS PROPOSÉES

1470. — Si on pose $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}}$

on a, en désignant par $y^{(m)}$ la dérivée m^e de y par rapport à x, $y^{(m)} = \dfrac{R_m(x)}{(1 - 2\alpha x + x^2)^{m-\frac{1}{2}}}$, $R_m(x)$ étant un polynome de degré m en x.

Prouver que l'équation $R_m(x) = 0$ a ses m racines réelles.

W. Mérigot, à Paris.

1471. — Soient MF, MF' deux rayons vecteurs variables d'une ellipse de foyers F et F'. La perpendiculaire élevée en F à FM, et la perpendiculaire élevée en F' à F'M se rencontrent en P, et rencontrent la première, F'M en Q' et la seconde, FM en Q. Construire les courbes : 1° lieu de P ; 2° lieux de Q et Q' ; 3° lieu du milieu de PM.

E.-N. Barisien.

1472. — Trois miroirs plans rectangulaires égaux entre eux sont disposés comme trois faces latérales consécutives d'un prisme hexagonal régulier. Un objet est situé près de l'axe de ce même prisme. Quelles images les miroirs en donnent-ils ?

Lugol.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

16e Année. N° 5. Février 1906.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LA SOMME DES PUISSANCES SEMBLABLES DES n PREMIERS NOMBRES,

par M. **L. Bickart.**

Soit
$$X_p = f_p(n) = 1^p + 2^p + \cdots + n^p.$$

Notre but est de donner une formule permettant de calculer X_p en fonction de X_{p-1} sans introduire les sommes d'ordres inférieurs $X_0, X_1, \ldots, X_{p-2}$.

Considérons n comme une variable continue, et écrivons
$$f_p(n) = f_p(n-1) + n^p. \tag{1}$$

Prenons les dérivées des deux membres :
$$f'_p(n) = f'_p(n-1) + pn^{p-1};$$
de même
$$f'_p(n-1) = f'_p(n-2) + p(n-1)^{p-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$f'_p(2) = f'_p(1) + p \times 2^{p-1},$$
$$f'_p(1) = f'_p(0) + p \times 1^{p-1}.$$

Ajoutons membre à membre ; il vient
$$f'_p(n) = f'_p(0) + pf_{p-1}(n).$$

Intégrons de 0 à n :
$$X_p = A + nX'_p(0) + p\int_0^n X_{p-1}dn. \tag{2}$$

Pour $n = 0$, $X = 0$, d'où $A = 0$. D'autre part, dans l'équation (1) faisons $n = 0$; il reste
$$f_p(-1) = 0,$$
d'où, en faisant $n = -1$ dans l'équation (2),
$$0 = -X'_p(0) + p\int_0^{-1} X_{p-1}dn,$$
d'où enfin
$$X_p = p\int_0^n X_{p-1}dn + np\int_0^{-1} X_{p-1}dn;$$

Telle est la formule que nous voulions établir.

Nous avons supposé plus haut $n = -1$ bien que X_p ne soit pas définie pour d'autres valeurs que des valeurs entières et positives de n. Il suffit, pour légitimer notre calcul, de considérer X_p comme définie par l'équation (1).

On peut montrer de plus que si p est un nombre pair, X_p est divisible par $(2n+1)$.

En effet, l'équation
$$f_p(n) = f_p(n-1) + n^p$$
donne successivement
$$f_p(0) = f_p(-1) + 0,$$
$$f_p(-1) = f_p(-2) + (-1)^p,$$

$$f_p(-2) = f_p(-3) + (-2)^p,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_p(-n+2) = f_p(-n+1) + (-n+2)^p,$$
$$f_p(-n+1) = f_p(-n) + (-n+1)^p.$$

Ajoutons membre à membre en remarquant que $f_p(0) = 0$.

Il vient

$$f_p(-n) + (-1)^p + (-2)^p + \cdots + (-n+1)^p = 0,$$

ou

$$f_p(-n) + (-1)^p[1 + 2^p + \cdots + (n-1)^p] = 0,$$
$$f_p(-n) + (-1)^p f_p(n-1) = 0,$$

formule qui peut servir de définition pour $n < 0$.

Si p est pair $\qquad f_p(-n) + f_p(n-1) = 0.$

Faisons dans cette formule $n = \frac{1}{2}$; il reste

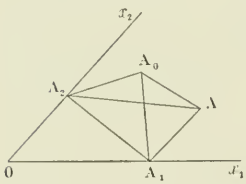
$$f_p\left(\frac{-1}{2}\right) = 0,$$

donc f_p est bien divisible par $(2n+1)$ quand p est pair.

SUR LE MOUVEMENT D'UNE FIGURE PLANE SEMBLABLE A UNE FIGURE DONNÉE ET DONT DEUX POINTS DÉCRIVENT DEUX DROITES CONCOURANTES

par M. **L. Bickart**.

Soient Ox_1, Ox_2 les deux droites données. Prenons le point O pour origine. Soient A_1, A_2 les deux points de la figure situés sur ces droites, A_0 un troisième point, situé sur une courbe quelconque donnée d'avance, et enfin A un quatrième point quelconque de la figure.



Les triangles A_0AA_1 et A_0AA_2 restent, par hypothèse, semblables à eux-mêmes.

On peut donc écrire, suivant des notations que nous avons déjà employées dans cette revue, $u = x + iy$, $v = x - iy$.

$$\left|\begin{array}{l} u_{A_1} = h_1 u_{A_0} + (1 - h_1) u_A, \\ v_{A_1} = k_1 v_{A_0} + (1 - k_1) v_A; \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} u_{A_2} = h_2 u_{A_0} + (1 - h_2) u_A, \\ v_{A_2} = k_2 v_{A_0} + (1 - k_2) v_A, \end{array}\right.$$

h_1, k_1, h_2, k_2 étant des constantes.

Pour la simplicité de l'écriture, supprimons l'indice A.

Puisque A_1 et A_2 décrivent des droites

$$\frac{u_1}{v_1} = c^{te} = m_1, \qquad \frac{u_2}{v_2} = c^{te} = m_2,$$

d'où

$$h_1 u_0 + (1 - h_1) u = m_1[k_1 v_0 + (1 - k_1) v],$$
$$h_2 u_0 + (1 - h_2) u = m_2[k_2 v_0 + (1 - k_2) v],$$

d'où enfin

$$(1)\quad \begin{cases} u_0 = \dfrac{[m_2k_2(1-h_1) - m_1k_1(1-h_2)]u + (m_1-m_2)(k_1-k_2)v}{m_1k_1h_2 - m_2k_2h_1}, \\[2ex] v_0 = \dfrac{(h_2-h_1)u + [m_2h_1(1-k_2) - m_1h_2(1-k_1)]v}{m_1k_1h_2 - m_2k_2h_1}, \end{cases}$$

équations qui définissent une transformation homographique dont un point double est à l'origine et les deux autres à l'infini.

Les différents points de la figure décrivent donc des courbes du même degré, transformées homographiques du lieu de l'un d'eux A_0 suivant des formules de la forme (1).

Il y a cependant exception pour les points tels que

$$\Delta = m_1k_1h_2 - m_2k_2h_1 = 0.$$

Cherchons à interpréter cette équation.

Remarquons que $h_1 = \dfrac{u_1 - u}{u_0 - u}$, $k_1 = \dfrac{v_1 - v}{v_0 - v}$;

l'équation $\Delta = 0$ devient

$$m_1(u-u_2)(v-v_1) = m_2(u-u_1)(v-v_2);$$

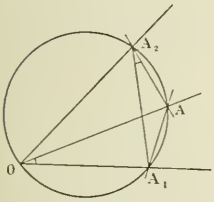
le point A est donc sur la courbe

$$m_1(U-u_2)(V-v_1) = m_2(U-u_1)(V-v_2),$$

laquelle est une circonférence passant aux points A_1, A_2 et passant à l'origine à cause des relations

$$u_1 = m_1v_1, \qquad u_2 = m_2v_2.$$

Cette circonférence A_1A_2O est d'ailleurs fixe dans la figure mobile puisqu'elle porte le segment capable de l'angle constant O décrit sur A_1A_2.

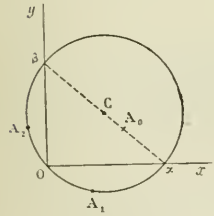


Dès lors, que décrit le point A ?

Le triangle A_1A_2A étant semblable à un triangle fixe, l'angle A_2 est constant et par suite aussi l'angle AOA_1. Donc la droite OA est fixe. Les points qui font exception à la règle énoncée plus haut sont donc ceux de la circonférence A_1OA_2. Ils décrivent des droites issues de l'origine.

Ces considérations peuvent servir à établir directement les formules (1).

Considérons la circonférence A_1OA_2 et le diamètre $\alpha\beta$ du point A_0. Ce diamètre la coupe en deux points α, β qui décrivent, d'après ce qu'on vient de voir, deux droites fixes Ox, Oy, lesquelles sont rectangulaires.



Prenons ces droites pour axes : soient ξ, η les coordonnées du centre C du cercle, et

$$\frac{A_0\alpha}{A_0\xi} = c^{te} = m;$$

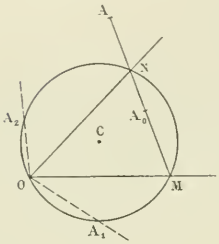
les coordonnées de A_0 seront

$$(2)\quad \begin{cases} x_0 = \dfrac{x_2 - mx_3}{1-m} = \dfrac{2\xi}{1-m}, \\[2ex] y_0 = \dfrac{y_2 - my_3}{1-m} = \dfrac{-2m\eta}{1-m}. \end{cases}$$

Le point A_0 décrit donc une courbe homographique au lieu du point C.

Les lieux de deux points A et A_0 sont donc deux courbes homographiques.

La droite A_0A coupe le cercle (C) en deux points M et N qui décrivent chacun une droite. Le point O est un des points doubles de l'homographie (A_0A). Les deux autres points doubles sont à l'infini sur OM et ON.

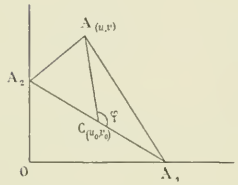


Avant d'aller plus loin, nous allons donner une forme simple aux formules (1).

Appelons u_0, v_0 les coordonnées du point C; nous pouvons remplacer les points A_1, A_2 donnés par deux points A_1, A_2 situés sur deux droites rectangulaires que nous prenons pour axes. Soit A un point quelconque de coordonnées (u, v).

On peut écrire:

$$\left| \begin{array}{l} u = \mathrm{H}u_2 + (1-\mathrm{H})u_1, \\ v = \mathrm{K}v_2 + (1-\mathrm{K})v_1, \end{array} \right.$$



mais
$$u_1 - v_1 = u_2 + v_2 = 0,$$
$$u_1 + u_2 = 2u_0, \qquad v_1 + v_2 = 2v_0,$$

d'où
$$u = \mathrm{H}(u_0 - v_0) + (1-\mathrm{H})(u_0 + v_0) = u_0 + (1-2\mathrm{H})v_0,$$
$$v = \mathrm{K}(v_0 - u_0) + (1-\mathrm{K})(u_0 + v_0) = v_0 + (1-2\mathrm{K})u_0,$$

expression de la forme

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} u = u_0 + hv_0, \\ v = v_0 + ku_0. \end{array} \right.$$

Si l'on pose $\alpha = \dfrac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CO}}$, $\varphi = \widehat{\mathrm{A_1CA}}$,

on vérifie aisément que

$$\left| \begin{array}{l} h = \varkappa e^{i\varphi}, \\ k = \varkappa e^{-i\varphi}. \end{array} \right.$$

Les formules (3) sont celles auxquelles nous voulions arriver.

Enveloppe d'une droite du plan de la figure. — Soient A, A′ deux points de la figure. La droite qui les joint a pour équation

$$\begin{vmatrix} \mathrm{U} & \mathrm{V} & 1 \\ u_0 + hv_0 & v_0 + ku_0 & 1 \\ u_0 + h'v_0 & v_0 + k'u_0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou
$$(k-k')u_0\mathrm{U} - (h-h')v_0\mathrm{V} + (k'-k)u_0^2 + (hk'-kh')u_0v_0 + (h-h')v_0^2 = 0.$$

Ecrivons cette équation sous la forme

$$\mathrm{PU} + \mathrm{QV} + \mathrm{R} = 0.$$

On trouve, par un calcul facile,

$$\frac{u_0}{(h-h')\mathrm{P}} = \frac{v_0}{(k'-k)\mathrm{Q}} = \frac{\mathrm{R}}{(h'-h)\mathrm{P}^2 - (hk'-kh')\mathrm{PQ} + (k-k')\mathrm{Q}^2},$$

formules d'après lesquelles, si le point u_0, v_0 décrit une courbe d'ordre n, les droites de la figure envelopperont en général des courbes de classe $2n$, tangentes à la droite de l'infini.

Pour que la droite AA′ passe par un point fixe (u, v) il faut que

$$(k'-k)\mathrm{U}_0^2 + (hk'-kh')\mathrm{U}_0\mathrm{V}_0 + (h-h')\mathrm{V}_0^2 + (k-k')u\mathrm{U}_0 - (h-h')v\mathrm{V}_0 = 0,$$

c'est-à-dire que le point C décrive une conique passant par O. Inversement, si le point C décrit une conique passant par l'origine, il existe une droite de la figure mobile qui passe par un point fixe.

Lieu d'un point de la figure situé hors du plan A_1OA_2. — Soient M ce point, A sa projection sur le plan A_1OA_2. Le diamètre AC coupe la circonférence C en α, β. Prenons pour axes $O\alpha$, $O\beta$. Les coor-

données de M seront, d'après les formules (2),

$$x = \frac{2}{1-m}\xi, \qquad y = \frac{-2m}{1-m}\eta, \qquad z = K.\overline{CO} = K\sqrt{\xi^2+\eta^2}.$$

Soit $\varphi(\xi, \eta) = 0$ le lieu du point C. Les équations du lieu de M seront

$$F(x, y) = \varphi\left(\frac{1-m}{2}x, \quad \frac{m-1}{2m}y\right) = 0,$$

$$z = \frac{k^2(m-1)^2}{4m^2}(m^2x^2+y^2).$$

La seconde équation est celle d'un cône du second degré dont l'intersection avec le cylindre $F(x, y) = 0$ est le lieu cherché.

Cas particuliers. — **1.** Si le point C décrit une droite, le point A décrira également une droite. Le cylindre $F = 0$ se réduit à un plan, et le point M décrit une conique.

2. Si le point C décrit une conique de foyer O, le point M décrit une conique, et ce cas est le seul, avec le précédent, où le point M décrive une courbe plane.

Si en effet M décrit une courbe plane, x, y, z seront liées par une équation linéaire,

$$z = Ax + By + C,$$

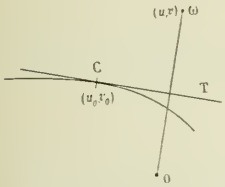
équation de la forme $\qquad z = \alpha\xi + \beta\eta + \gamma,$

d'où $\qquad k^2(\xi^2+\eta^2) = (\alpha\xi + \beta\eta + \gamma)^2,$

équation d'une conique de foyer O.

Centre instantané de similitude. — Soit u, v ce centre. Écrivons

$$u = u_0 + hv_0,$$
$$v = v_0 + ku_0.$$



Il faut que $du = dv = 0$, d'où

$$du_0 + hdv_0 = 0, \qquad dv_0 + kdu_0 = 0$$

et

$$u = \frac{u_0dv_0 - v_0du_0}{dv_0}, \qquad v = \frac{v_0du_0 - u_0dv_0}{du_0}.$$

Remarquons que l'équation de la tangente CT au lieu de C est

$$Udv_0 - Vdu_0 = u_0dv_0 - v_0du_0.$$

Les équations ci-dessus montrent que

$$vdu_0 + udv_0 = 0.$$

La droite qui joint l'origine au centre de similitude ω est donc perpendiculaire à la tangente CT.

De plus les mêmes équations montrent que

$$(u-u_0)(v-v_0) = u_0v_0,$$

le point ω est donc sur la circonférence de centre C qui passe en O. Ce point ω est donc le symétrique de l'origine par rapport à la tangente CT au lieu de C.

Il est également, d'après une propriété connue, le point de contact du cercle de centre C et de rayon CO avec son enveloppe, ou encore le foyer d'une parabole tangente à Ox, Oy et au lieu de C.

Ce point ω reste fixe si le point C décrit une droite et si par conséquent tout point de la figure décrit une droite. C'est un résultat connu.

Relation entre les surfaces des différentes trajectoires. — L'élément d'aire balayé par le vecteur OA est, en coordonnées polaires,

$$d\sigma = \frac{1}{2}\rho^2 d\theta;$$

des équations $\qquad u = \rho e^{i\theta}, \qquad v = \rho e^{-i\theta},$

on déduit

$$4id\sigma = vdu - udv.$$

Remplaçons u et v par $(u_0 + hv_0)$ et $(v_0 + ku_0)$ et appelons $d\sigma_0$ l'élément d'aire balayé par le vecteur OC.

Il vient

$$4id\sigma = (1 - hk)(v_0 du_0 - u_0 dv_0) = 4i(1 - hk)d\sigma_0.$$

Les surfaces σ et σ_0 des trajectoires de A et C sont donc liées par la relation

$$\sigma = (1 - hk)\sigma_0.$$

Donc les trajectoires de tous les points d'une même circonférence de centre C ont même surface.

Deux points dont les distances au point C sont proportionnelles à deux nombres α, α' décrivent des courbes dont les surfaces sont entre elles dans le rapport $\dfrac{1 - \alpha^2}{1 - \alpha'^2}$.

Exercice. — On suppose que le point C décrive un cercle

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Montrer que le point A décrit une ellipse.

En posant

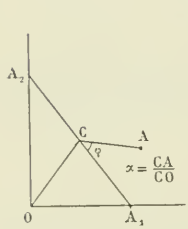
$$x \cos\frac{\varphi}{2} + y \sin\frac{\varphi}{2} - (1 + \alpha)\left(a \cos\frac{\varphi}{2} + b \sin\frac{\varphi}{2}\right) = X,$$

$$x \sin\frac{\varphi}{2} - y \cos\frac{\varphi}{2} - (1 - \alpha)\left(a \sin\frac{\varphi}{2} - b \cos\frac{\varphi}{2}\right) = Y,$$

l'équation de cette ellipse se met sous la forme

$$\frac{X^2}{(1 + \alpha)^2} + \frac{Y^2}{(1 - \alpha)^2} = R^2.$$

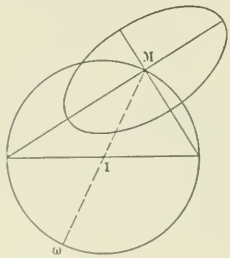
La somme ou la différence des axes de cette ellipse est constante et égale à 2R suivant que le point A est à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle de centre C qui passe en O.



Le centre de l'ellipse est l'homologue du centre du cercle lieu de C.

Si l'on prend pour axes de coordonnées ceux des formules (3), $\varphi = 0$. Ces axes sont donc parallèles à ceux de l'ellipse.

Si $\alpha = c^{te}$ et si φ varie, l'ellipse reste de grandeur constante. Son centre décrit une circonférence (1). Chacun de ses axes passe par un point fixe de cette circonférence. Un point quelconque de son plan décrit une conchoïde du cercle (1) par rapport à un point de ce cercle.



Une droite quelconque de son plan enveloppe un cercle dont le centre est sur (1).

Le centre instantané de rotation pour une position M du centre est le point diamétralement opposé à M sur (1).

Enfin l'ellipse elle-même enveloppe une quartique bicirculaire dont on peut mettre l'équation sous la forme

$$(x^2 + y^2 - k^2)^2 = (A^2 + B^2)(x^2 + y^2 + k^2) + 2k(A^2 - B^2)x - A^2B^2.$$

Si l'on écrit cette équation sous la forme

$$S^2 = S'$$

et que l'on pose

$$P = ux + vy + wz + k^2,$$

u, v, w étant arbitraires, puis que l'on considère les deux quadriques

$$f(x, y, z) = P^2 - S' = 0,$$
$$\varphi(x, y, z) = P + S = 0,$$

la quartique peut être considérée comme la projection de l'intersection des deux quadriques $f = 0$, $\varphi = 0$, ou encore comme l'enveloppe du contour apparent en projection des quadriques $f + \lambda\varphi = 0$.

ALGÈBRE

1396. — *Démontrer que l'on a identiquement, quels que soient* x, α *et* γ,

$$e^x = \frac{\dfrac{1}{\gamma} + \dfrac{1}{1}\,\dfrac{x}{\alpha+\gamma} + \dfrac{1}{1.2}\,\dfrac{x^2}{2\alpha+\gamma} + \dfrac{1}{1.2.3}\,\dfrac{x^3}{3\alpha+\gamma} + \cdots}{\dfrac{1}{\gamma} - \dfrac{\alpha x}{\gamma(\alpha+\gamma)} + \dfrac{\alpha^2 x^2}{\gamma(\alpha+\gamma)(2\alpha+\gamma)} - \cdots}.$$

La série e^x est absolument et uniformément convergente quel que soit x.

Pour étudier la série qui figure en dénominateur, formons le rapport $\dfrac{u_n}{u_{n-1}}$; nous aurons

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = -\frac{\alpha x}{n\alpha+\gamma},$$

et si nous écartons l'hypothèse $\alpha = 0$, nous pouvons écrire

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = -\frac{x}{n + \dfrac{\gamma}{\alpha}}.$$

Lorsque n croit indéfiniment, ce rapport a pour limite 0, quel que soit x; la série envisagée est donc convergente.

Multiplions alors la série e^x par la série $\dfrac{1}{\gamma} - \dfrac{\alpha x}{\gamma(\alpha+\gamma)} + \dfrac{\alpha^2 x^2}{\gamma(\alpha+\gamma)(2\alpha+\gamma)} - \cdots$; nous voyons facilement que le produit est la série

$$\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{1}\,\frac{x}{\alpha+\gamma} + \frac{1}{1.2}\,\frac{x^2}{2\alpha+\gamma} + \cdots;$$

or, d'après le théorème de Cauchy-Mertens, ce produit est convergent, et cela quel que soit x; comme ce produit est une série de puissances, la convergence est uniforme.

Dans l'hypothèse $\alpha = 0$, l'identité

$$e^x = \frac{\dfrac{1}{\gamma} + \dfrac{1}{1}\,\dfrac{x}{\gamma} + \dfrac{1}{1.2}\,\dfrac{x^2}{\gamma} + \dfrac{1}{1.2.3}\,\dfrac{x^3}{\gamma} + \cdots}{\dfrac{1}{\gamma}}$$

est évidente. DESSIMOND, à Alger.

Démonstration analogue de M. Jules Vernaux, étudiant à l'École des mines de Mons.

Remarque. — La multiplication des deux séries

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$\frac{1}{\gamma} - \frac{\alpha x}{\gamma(\alpha+\gamma)} + \frac{\alpha^2 x^2}{\gamma(\alpha+\gamma)(2\alpha+\gamma)} - \cdots \frac{+(-1)^n \alpha^n x^n}{\gamma(\alpha+\gamma)\cdots(n\alpha+\gamma)} + \cdots$$

exige quelques précautions. Les premiers termes du produit sont visiblement

$$\frac{1}{\gamma}, \qquad \frac{x}{\alpha+\gamma}, \qquad \frac{x^2}{1.2(2\alpha+\gamma)},$$

mais le calcul des suivants présente quelques difficultés. Considérons le terme en x^n ; il a pour expression

$$\frac{x^n}{\gamma.n!}\left[1-\frac{n\alpha}{\alpha+\gamma}+\frac{n(n-1)\alpha^2}{(\alpha+\gamma)(2\alpha+\gamma)}-\cdots\right],$$

et le précédent,

$$\frac{x^{n-1}}{\gamma.(n-1)!}\left[1-\frac{(n-1)\alpha}{\alpha+\gamma}+\frac{(n-1)(n-2)\alpha^2}{(\alpha+\gamma)(2\alpha+\gamma)}-\cdots\right].$$

Si l'on admet la loi du produit jusque-là, on voit que le second crochet est égal à $\frac{\gamma}{(n-1)\alpha+\gamma}$.

Or le premier peut s'écrire

$$1-\frac{n\alpha}{\alpha+\gamma}\left[1-\frac{(n-1)\alpha}{2\alpha+\gamma}+\frac{(n-1)(n-2)\alpha^2}{(2\alpha+\gamma)(3\alpha+\gamma)}-\cdots\right],$$

et le nouveau crochet se déduit du précédent en changeant γ en $\alpha+\gamma$. La valeur du premier crochet est donc $1-\frac{n\alpha}{\alpha+\gamma}\,\frac{\alpha+\gamma}{(n-1)\alpha+\alpha+\gamma}=1-\frac{n\alpha}{n\alpha+\gamma}$ ou enfin $=\frac{\gamma}{n\alpha+\gamma}$. Par conséquent le terme en x^n est bien $\frac{x^n}{n!(n\alpha+\gamma)}$.

Bonnes solutions : MM. Quéméneur, lycée de Rouen ; M. Grangier.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1385. — *On considère un paraboloïde de révolution et un plan* P.

1° *Former l'équation générale des quadriques qui contiennent la section faite dans le paraboloïde par le plan* P *et qui touchent ce paraboloïde en son sommet. Trouver leurs plans cycliques et l'enveloppe des diamètres conjugués de ces plans.*

2° *Trouver l'équation générale des sphères inscrites dans le paraboloïde et le lieu des pôles du plan fixe* P *par rapport à ces sphères.*

3° *Trouver le lieu des cercles d'intersection du cône circonscrit au paraboloïde le long du parallèle de contact de chacune de ces sphères avec les plans tangents à cette sphère et perpendiculaires à l'axe du paraboloïde.*

Voir ce qui arrive quand on prend pour plan P *un plan tangent au paraboloïde et faisant avec l'axe un angle de 45°.*

Soit $y^2+z^2-2px=0$ l'équation d'un paraboloïde de révolution rapporté à son axe Ox et à son plan tangent au sommet yOz, et soit $ux+vy+wz+h=0$ l'équation du plan P.

En désignant par λ un paramètre variable, l'équation générale des quadriques satisfaisant aux conditions énoncées est

$$\lambda(y^2+z^2-2px)+2x(ux+vy+wz+h)=0,$$

ou bien

$$\lambda(x^2+y^2+z^2-2px)+x\{x(2u-\lambda)+2vy+2wz+2h\}=0.$$

Sous cette forme on reconnaît immédiatement que les plans parallèles au plan yOz et au plan $x(2u-\lambda)+2vy+2wz+2h=0$ sont des plans de sections circulaires.

Les équations du diamètre conjugué du plan $x=0$ sont

$$\frac{1}{2}f'_y=\lambda y+vx=0,\qquad \frac{1}{2}f'_z=\lambda z+wx=0.$$

Lorsque λ varie, ce diamètre tourne autour de l'origine en restant dans le plan $\frac{y}{v}-\frac{z}{w}=0$.

Les équations du diamètre conjugué de la seconde direction de plans de sections circulaires sont

$$\frac{-p\lambda + ux + vy + wz + h + ux}{2u - \lambda} = \frac{\lambda y + vx}{2v} = \frac{\lambda z + wx}{2w}.$$

La considération des deux derniers rapports donne

$$\text{(Q)} \qquad \frac{y}{v} - \frac{z}{w} = 0.$$

Le diamètre conjugué demeure aussi dans ce plan Q.

Les deux premiers rapports donnent l'équation du second degré en λ :

$$\lambda^2 y + \lambda(vx - 2uy - 2pv) + 2v(ux + vy + wz + h) = 0.$$

Le plan représenté par cette équation enveloppe le cône du second ordre

$$(vx - 2uy - 2pv)^2 - 8vy(ux + vy + wz + h) = 0.$$

Le diamètre conjugué enveloppe donc une conique située dans le plan Q.

2. Les sphères inscrites dans le paraboloïde ont leurs centres sur Ox : leur équation générale est donc

$$(x - \alpha)^2 + y^2 + z^2 - \beta^2 = 0,$$

β étant un paramètre variable qu'il faut déterminer en fonction de α.

L'équation des plans sécants communs à la sphère et au paraboloïde est

$$(x - \alpha)^2 + 2px - \beta^2 = 0 \ ;$$

ces deux plans seront confondus si l'équation précédente considérée comme une équation du second degré en x a ses deux racines égales, c'est-à-dire si

$$\beta^2 = 2\alpha p - p^2.$$

L'équation cherchée est donc

$$(x - \alpha)^2 + y^2 + z^2 + p^2 - 2\alpha p = 0.$$

Désignons par x_0, y_0, z_0 les coordonnées du pôle du plan P par rapport à cette sphère.

Le lieu de ce pôle s'obtient en éliminant λ entre les équations

$$\frac{x_0 - \alpha}{u} = \frac{y_0}{v} = \frac{z_0}{w} = \frac{(\alpha - p)^2 - \alpha x_0}{h}.$$

Le lieu cherché est donc une courbe plane située dans le plan Q.

D'ailleurs $\alpha = \dfrac{vx_0 - uy_0}{v}$.

Portons cette valeur de α dans le dernier rapport en remplaçant x_0, y_0, z_0 par les coordonnées courantes ; nous trouvons que le pôle du plan P est situé sur la surface

$$hv^2 z = w\{(vx - uy - pv)^2 - vx(vx - uy)\},$$

dont l'équation peut s'écrire sous la forme

$$uwy(vx - uy) + 2pw(vx - uy) + hv^2 z - p^2 v^2 w = 0.$$

On reconnait ainsi un paraboloïde hyperbolique.

Le pôle du plan P décrit donc l'hyperbole intersection de cette quadrique et du plan Q.

3. La sphère est inscrite au paraboloïde le long d'un cercle dont le plan a pour équation

$$x = \alpha - p.$$

Le sommet du cône circonscrit au paraboloïde le long de ce cercle est situé sur Ox et a pour abscisse $p - \alpha$.

Son équation est donc

$$(1) \qquad 2(\alpha - p)(y^2 + z^2 - 2px) - p(x + p - \alpha)^2 = 0.$$

L'axe Ox coupe la sphère en deux points dont les abscisses sont données par l'équation du second degré

$$(x - \alpha)^2 + p^2 - 2p\alpha = 0,$$

ou bien

$$(2) \qquad (x+p-\alpha)^2-2px=0.$$

Cette équation représente aussi les plans tangents à la sphère perpendiculaires à l'axe du paraboloïde.

Le lieu cherché s'obtient donc en éliminant $p-\alpha$ entre (1) et (2).

Nous trouvons d'abord

$$\alpha-p=\frac{p^2x}{y^2+z^2-2px};$$

puis, en portant cette expression dans l'équation (2),

$$x\{y^2+z^2-2px-p^2\}^2-2p(y^2+z^2-2px)^2=0.$$

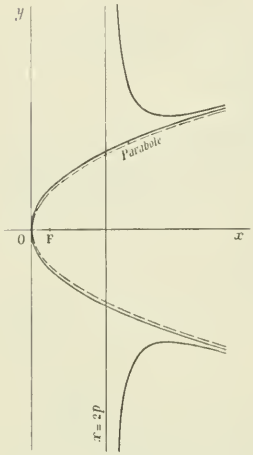
C'est l'équation d'une surface du cinquième degré. Cette surface est de révolution autour de Ox et son équation peut s'écrire ainsi

$$y^2+z^2=2px+\frac{p^2}{1\pm\sqrt{\frac{2p}{x}}};$$

la méridienne a pour équation

$$y^2=2px+\frac{p^2}{1\pm\sqrt{\frac{2p}{x}}};$$

elle est aisée à construire ; nous donnons sa forme à côté.



Le plan Q est le plan méridien perpendiculaire au plan P ; en supposant qu'on le prenne pour plan des xy, les calculs précédents se simplifient un peu : il faut y faire partout $w=0$.

En se plaçant ensuite dans le cas particulier signalé, l'équation du plan P devient $y=x+\frac{p}{2}$ et les valeurs de u, v et h deviennent $u=1$, $v=-1$, $h=\frac{p}{2}$.

Les résultats obtenus sont alors les suivants

$$x=0 \qquad \text{et} \qquad x(2-\lambda)-2y+p=0 \text{ (plans cycliques).}$$

Les diamètres conjugués des plans de la deuxième série enveloppent la conique

$$(x+2y-2p)^2+8y\left(x-y+\frac{p}{2}\right)=0;$$

et le lieu des pôles du plan P par rapport aux sphères inscrites est la conique

$$2y(x+y)-4p(x+y)+py+2p^2=0.$$

PARROD, à Vesoul et BROS, à Albi.

Bonnes solutions: MM. M. Laurence ; M. Grangier, à Mouleydier.

1390. — *On considère les sections planes d'un paraboloïde elliptique passant par le sommet et telles que la somme des carrés de leurs axes soit constante.*

Trouver le lieu de leurs centres et l'enveloppe de leur plan.

Soit $\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}-2x=0$ l'équation du paraboloïde rapporté à ses axes habituels, et $ux+vy+wz=0$ l'équation d'un plan P passant par le sommet. Ce plan coupe le paraboloïde suivant une ellipse E, dont nous allons calculer la somme des carrés des demi-axes, ou ce qui revient au même, d'après un des théorèmes d'Apollonius, la somme des carrés de deux demi-diamètres conjugués quelconques.

La tangente OT à l'ellipse E au point O est l'intersection du plan P et du plan $x = 0$, qui est tangent au paraboloïde à l'origine. Les équations de cette tangente sont donc $ux + vy + wz = 0$, $x = 0$, et par suite ses cosinus directeurs sont 0, $\frac{w}{\sqrt{v^2 + w^2}}$, $-\frac{v}{\sqrt{v^2 + w^2}}$.

Soit ω le centre de l'ellipse ; le diamètre conjugué de ωO est parallèle à OT ; il rencontre l'ellipse en deux points A et A' symétriques par rapport au point ω, et tout revient à calculer $\overline{\omega O}^2 + \overline{\omega A}^2$.

Le point ω est le point de rencontre du plan P et du diamètre conjugué de ce plan par rapport au paraboloïde ; par conséquent, les coordonnées du point ω sont les solutions des équations

(1) $$ux + vy + wz = 0,$$

(2) $$-\frac{1}{u} = \frac{y}{pv} = \frac{z}{qw},$$

d'où l'on tire aisément

$$x = \frac{pv^2 + qw^2}{u^2}, \qquad y = -\frac{pv}{u}, \qquad z = -\frac{qw}{u}.$$

On en déduit

$$\overline{\omega O}^2 = \frac{(pv^2 + qw^2)^2}{u^4} + \frac{p^2v^2 + q^2w^2}{u^2}.$$

D'autre part, un point quelconque M de la droite ωA, parallèle à OT, a pour coordonnées

$$x = \frac{pv^2 + qw^2}{u^2},$$

$$y = -\frac{pv}{u} + \rho\frac{w}{\sqrt{v^2 + w^2}},$$

$$z = -\frac{qw}{u} - \rho\frac{v}{\sqrt{v^2 + w^2}},$$

ρ désignant au signe près la longueur ωM.

Remplaçons x, y, z par ces valeurs dans l'équation du paraboloïde, nous obtenons une équation du deuxième degré en ρ, qui admet pour racines les ρ des points A et A'. Un calcul facile montre que cette équation se réduit à

$$\rho^2 = \frac{pq(v^2 + w^2)}{u^2};$$

on a donc $\overline{\omega A}^2 = \frac{pq(v^2 + w^2)}{u^2}$, et par suite

$$\overline{\omega O}^2 + \overline{\omega A}^2 = \frac{(pv^2 + qw^2)^2}{u^4} + \frac{p^2v^2 + q^2w^2 + pq(v^2 + w^2)}{u^2},$$

ou

$$\overline{\omega O}^2 + \overline{\omega A}^2 = \frac{(pv^2 + qw^2)^2}{u^4} + \frac{(p + q)(pv^2 + qw^2)}{u^2}.$$

Il nous faut écrire maintenant que cette somme est égale à une constante donnée a^2 ; nous avons

$$\frac{(pv^2 + qw^2)^2}{u^4} + \frac{(p + q)(pv^2 + qw^2)}{u^2} - a^2 = 0.$$

Cette égalité montre que $\frac{pv^2 + qw^2}{u^2}$ doit être égale à l'une des racines de l'équation $X^2 + (p + q)X - a^2 = 0$. Celle-ci admet une racine positive α et une racine négative $-\beta$. En nous bornant aux valeurs réelles de u, v, w, nous devons avoir

$$\frac{pv^2 + qw^2}{u^2} = \alpha,$$

ou

(3) $$pv^2 + qw^2 - \alpha u^2 = 0.$$

Telle est la condition que doivent vérifier u, v, w pour que dans l'ellipse E la somme des carrés des demi-axes soit égale à a^2 ; α désigne la quantité $\frac{-(p+q)+\sqrt{(p+q)^2+4a^2}}{2}$.

Il en résulte immédiatement que le plan P enveloppe un cône du deuxième degré dont les équations tangentielles sont

$$pv^2+qw^2-\alpha u^2=0, \qquad r=0,$$

et qui a pour équation ponctuelle

$$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}-\frac{x^2}{\alpha}=0.$$

D'autre part, pour avoir le lieu du centre de l'ellipse E, il faut éliminer u, v, w entre les équations (1), (2) et (3).

Les équations (2) montrent que u, v, w sont proportionnels à $-1, \frac{y}{p}, \frac{z}{q}$; remplaçons u, v, w par ces valeurs dans les équations homogènes (1) et (3), nous obtenons

$$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}-x=0, \qquad \frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}-\alpha=0.$$

Ce sont les équations du lieu du point ω.

On peut les remplacer par les équations

$$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}-\alpha=0, \qquad x-\alpha=0,$$

qui représentent une ellipse ayant son centre sur Ox, au point qui a pour abscisse α, et dont les axes sont parallèles à Oy et Oz et ont respectivement pour demi-longueurs $\sqrt{\alpha p}$ et $\sqrt{\alpha q}$.

GABRIEL PÉLISSIER, à Toulouse.

Ont résolu la même question : MM. BROS, à Albi ; DESSIMOND, à Alger ; M. GRANGIER, à Mouleydier.

MÉCANIQUE

1391. — *Une parabole roule sans glissement sur une parabole égale $y^2-2px=0$, de façon qu'à l'origine des temps les sommets soient confondus avec le point de contact des deux paraboles et que la vitesse de rotation de l'axe de la parabole mobile soit égale à $\frac{-2}{1+t^2}$, t désignant le temps écoulé depuis l'origine des temps jusqu'à l'époque envisagée.*

Étudier le mouvement du foyer.

Étudier le mouvement du sommet et construire l'hodographe de ce mouvement.

Trouver le point de l'axe dont la vitesse est minimum, le lieu de ce point et l'enveloppe de l'axe.

Les deux paraboles sont constamment symétriques par rapport à la tangente au point où elles se touchent, leurs axes sont donc aussi symétriques et, si l'on désigne par θ l'angle que fait la tangente commune avec l'axe des x, l'angle des deux axes sera 2θ ; de sorte que la vitesse angulaire de rotation de l'axe mobile est $2\frac{d\theta}{dt}$. Nous avons donc

$$2\frac{d\theta}{dt}=-\frac{2}{1+t^2}, \qquad d\theta=\frac{-dt}{1+t^2},$$

et, en intégrant,

$$\theta=-\operatorname{arc\,tg} t+\text{C}^{\text{te}}.$$

Or pour $t = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$; donc $C^{te} = \frac{\pi}{2}$

et
$$\text{arc tg}\, t = \frac{\pi}{2} - \theta,$$
$$t = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot \theta.$$

Telle est la relation qui existe entre t et θ.

D'autre part, si nous désignons par m le coefficient angulaire de la tangente au point où se touchent les deux paraboles, nous avons $m = \text{tg}\,\theta = \frac{1}{t}$, et l'équation de cette tangente devient
$$y = mx + \frac{p}{2m},$$
ou
$$y = \frac{x}{t} + \frac{pt}{2}.$$

Cela posé, nous allons regarder la seconde figure comme étant une transformée de la première par une symétrie ayant cette dernière droite pour axe, et chercher les formules de transformation. Soient (x, y) un point M de la première figure et (x', y') le correspondant M′ de la seconde ; nous avons à écrire que la droite MM′ est perpendiculaire à l'axe de symétrie et que le milieu de MM′ est sur cet axe. Ceci nous donne
$$y - y' = -t(x - x'),$$
$$y + y' = \frac{x + x'}{t} + pt;$$
la seconde équation donne d'abord
$$y' = \frac{x + x'}{t} - y + pt,$$
et la première devient ensuite
$$2y - \frac{x + x'}{t} - pt = -t(x - x');$$
d'où nous déduirons la valeur de x' :
$$x'\left(t + \frac{1}{t}\right) = 2y - \frac{x}{t} + tx - pt.$$

Nous aurons alors aisément y' et nous possèderons les formules de transformation, c'est-à-dire les formules qui donnent x' et y' en fonction de x et y, ou x et y en fonction de x' et y'. Ces deux systèmes sont d'ailleurs les mêmes à cause de la parfaite symétrie qui existe entre les points M et M′. Nous nous bornons à donner le premier :

$$(1) \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{2ty + x(t^2 - 1) - pt^2}{t^2 + 1}, \\[2ex] y' = \dfrac{y(1 - t^2) + 2tx + pt^3}{t^2 + 1}. \end{cases}$$

Les coordonnées du foyer dans le premier système sont $x = \frac{p}{2}$, $y = 0$, et, par suite, dans le second, elles sont

$$(2) \qquad x' = -\frac{p}{2}, \qquad y' = pt;$$

nous voyons donc que le foyer décrit la directrice d'un mouvement uniforme avec la vitesse p. La trajectoire de ce point était évidente *a priori*.

Les coordonnées du sommet dans le premier système sont $x = 0$, $y = 0$ et, par suite, dans le

second système,

$$(3) \qquad x' = -\frac{pt^2}{t^2+1}, \qquad y' = \frac{pt^3}{t^2+1}.$$

La trajectoire de ce point a pour équation cartésienne $x'(x'^2+y'^2)+py'^2=0$; c'est une cissoïde droite ayant Ox pour axe, pour point de rebroussement l'origine ou sommet de la parabole et pour asymptote la droite $x=-p$. Ce résultat était évident aussi *a priori*.

Les composantes de la vitesse s'obtiennent immédiatement ; ce sont :

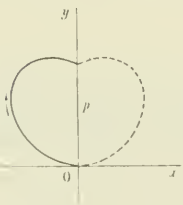
$$\frac{dx'}{dt} = \frac{-2pt}{(1+t^2)^2}, \qquad \frac{dy'}{dt} = p\,\frac{t^4+3t^2}{(1+t^2)^2};$$

par conséquent, les équations paramétriques de l'hodographe sont :

$$(4) \qquad \begin{cases} X = \dfrac{-2pt}{(1+t^2)^2}, \\[2ex] Y = p\,\dfrac{t^4+3t^2}{(1+t^2)^2}. \end{cases}$$

Pour construire cette courbe, nous remarquerons qu'en changeant t en $-t$, X change simplement de signe et Y ne change pas ; la courbe est donc symétrique par rapport à Oy. D'autre part, pour $t=0$, X et Y sont nuls, $\frac{Y}{X}$ est nul ; pour $t=+\varepsilon$, X est négatif et Y positif ; nous connaissons donc un arc de courbe au voisinage du point O. Pour $t=1$, $X=-\frac{p}{2}$, $Y=p$. Enfin, pour $t=+\infty$, X est nul et Y égal à p ; le coefficient angulaire de la tangente en ce point est $\frac{Y-p}{X}=\frac{1-t^2}{2t}$; sa valeur est égale à $-\infty$.

Il résulte de cette étude rapide que Y a nécessairement un maximum et X un minimum. Un calcul très simple montre que le minimum de X a lieu pour $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$ et le maximum de Y pour $t=\sqrt{3}$. Il est alors aisé de construire entièrement la courbe (4), qui est la courbe des vitesses du mouvement du sommet.



L'intérêt de la dernière partie réside surtout dans ce fait qu'elle découle d'une façon évidente de la théorie du centre instantané de rotation. Si on regarde en effet le plan comme étant attaché à la parabole mobile, le mouvement de glissement de ce plan sur le plan de la parabole fixe, admet à chaque instant pour centre instantané de rotation le point de contact des deux paraboles, c'est-à-dire le point de coordonnées $\frac{pt^2}{2}$ et pt ; par conséquent, le point de l'axe qui a la vitesse minimum est le pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'axe mobile et le lieu de ce point est l'enveloppe de l'axe lui-même.

Nous allons retrouver tous ces résultats directement. Soient x et 0 les coordonnées d'un point de l'axe de la parabole fixe ; les coordonnées du point symétrique situé sur l'axe de la parabole mobile sont

$$x' = \frac{x(t^2-1)-pt^2}{t^2+1},$$

$$y' = \frac{2tx+pt^3}{t^2+1},$$

et les composantes de la vitesse,

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{4tx - 2pt}{(t^2+1)^2},$$
$$\frac{dy'}{dt} = \frac{2x(1-t^2) + pt^2(t^2+3)}{(t^2+1)^2};$$

elles nous montrent que le point dont la vitesse est parallèle à Oy est le symétrique du foyer, ce que nous savions déjà. La vitesse est alors donnée par

$$v^2 = \frac{4x^2 - 4pt^2x + p^2t^2(t^2+4)}{(t^2+1)^2}. \tag{5}$$

La plus petite valeur, quand x varie, correspond à $x = \frac{pt^2}{2}$, ce qui justifie le résultat annoncé.

Portons cette valeur dans x' et dans y' ; nous aurons les coordonnées du point de l'axe mobile dont la vitesse est minimum ; ce sont

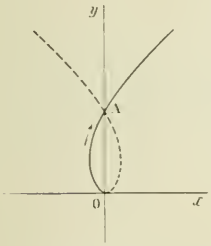
$$\left\{\begin{aligned} x' &= \frac{pt^2(t^2-3)}{2(t^2+1)}, \\ y' &= \frac{2pt^3}{t^2+1}. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Ces équations sont aussi les équations paramétriques du lieu demandé.

Pour avoir l'équation de l'axe, remarquons que les formules directes de transformation sont identiques aux formules (1), pourvu qu'on échange x et y respectivement avec x' et y'. L'axe mobile, étant le correspondant de $y = 0$, son équation est

$$2tx' + y'(1-t^2) + pt^3 = 0,$$

et nous aurons les équations paramétriques de son enveloppe en prenant la dérivée de cette équation par rapport à t et résolvant les deux équations obtenues par rapport à x' et à y'. Les deux équations indiquées sont :



$$2tx' + y'(1-t^2) + pt^3 = 0,$$
$$2x' - 2ty' + 3pt^2 = 0;$$

elles donnent successivement

$$y' = \frac{2pt^3}{1+t^2},$$

et

$$x' = \frac{pt^2(t^2-3)}{1+t^2},$$

ce qui nous montre bien que l'enveloppe de l'axe coïncide avec le lieu précédent.

Reste à construire cette courbe. Pour cela, nous remarquons encore que le changement de t en $-t$ change y en $-y$ et n'altère pas x ; il y a donc symétrie par rapport à Ox et il suffit de faire varier t de 0 à $+\infty$. Pour $t = 0$, x et y sont nuls, $\frac{y}{x}$ aussi ; pour $t = +\varepsilon$, x est négatif et y positif. Nous connaissons donc l'arc infiniment petit qui part de l'origine. Pour $t = \sqrt{3}$, x redevient nul ; il a passé avant par un minimum négatif, pour une valeur de t comprise entre 0 et 1, tandis que y croît constamment. Enfin pour $t = +\infty$, x et y sont infinis et l'on a $\frac{y}{x} = 0$; il y a donc une branche parabolique dans la direction Ox.

Bonnes solutions de MM. Laurence ; G. Cotty.

PHYSIQUE

1318. — *Calculer la capacité électrique d'un condensateur sphérique dont le noyau, formé d'une sphère métallique de rayon* R_1, *est recouvert d'une couche de substance diélectrique de pouvoir inducteur spécifique* k *et d'épaisseur uniforme* $R - R_1$; *autour de ce noyau se trouve une enveloppe concentrique de rayon intérieur* R_2 *plus grand que* R.

Désignons par Q la charge du noyau.

En un point situé à l'intérieur du diélectrique, à une distance x du centre, le champ a pour expression, en unités électrostatiques,

$$\frac{1}{k} \cdot \frac{Q}{x^2}.$$

La variation de potentiel correspondant à une variation dx est donc, par définition, donnée par la formule

$$dV = -\frac{1}{k}\frac{Q}{x^2}\,dx.$$

Intégrons entre $x = R_1$ et $x = R$. Si nous appelons V_1 le potentiel du noyau et V le potentiel à la surface du diélectrique, il vient

$$(1) \qquad V - V_1 = -\frac{Q}{k}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R}\right).$$

Entre le diélectrique et l'enveloppe, le champ a pour expression

$$\frac{Q}{x^2},$$

et la variation de potentiel

$$dV = -\frac{Q}{x^2}\,dx.$$

On en déduit, en appelant V_2 le potentiel de l'enveloppe,

$$(2) \qquad V_2 - V = -Q\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Ajoutons (1) et (2) et changeons les signes

$$V_1 - V_2 = Q\left\{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R}\right) + \frac{1}{R} - \frac{1}{R_2}\right\}.$$

La capacité est donc

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{kR}{\dfrac{R}{R_1} - 1 + k\left(1 - \dfrac{R}{R_2}\right)}.$$

Cas particuliers, où l'on retrouve des expressions faciles à prévoir :

$$R = R_1, \qquad C = \frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}, \qquad k = 1, \qquad C = \frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}.$$

$$R = R_2, \qquad C = k\frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}, \qquad k = \infty, \qquad C = \frac{RR_2}{R_2 - R}.$$

Remarque. — Le potentiel varie d'une manière continue au travers de la surface du diélectrique. Il n'en est pas de même du champ, qui passe brusquement de la valeur $\frac{1}{k}\frac{Q}{R^2}$ à la valeur $\frac{Q}{R^2}$, subis-

sant une augmentation égale à $\frac{Q}{R^2}\left(1-\frac{1}{k}\right)$. Cette variation serait produite, en l'absence du diélectrique, par une charge q répartie sur la sphère de rayon R et telle que $q = Q\left(1-\frac{1}{k}\right)$. D'autre part, en un point quelconque du diélectrique, le champ est le même que celui que produirait, sans diélectrique, la charge Q diminuée de $Q\left(1-\frac{1}{k}\right)$. Tout se passe donc comme si le diélectrique était chargé sur ses deux faces de quantités d'électricité égales à q et de signes contraires.

QUESTIONS PROPOSÉES

1473. — On considère la fonction

$$y = \operatorname{ch} x \cos x.$$

1° Étudier ses variations.

2° Calculer $\int y dx$.

3° Développer y en série.

Retrouver le terme général de cette série en considérant y comme intégrale particulière d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

4° Calculer la valeur numérique de y pour $x = 1$ avec 5 chiffres décimaux exacts.

5° Intégrer l'équation différentielle

$$y'' + 2y' \operatorname{tg} x + 2y \operatorname{tg}^2 x = 0.$$

T. L.

1474. — Soient z et z' deux quantités imaginaires et u une racine carrée de leur produit. Montrer que l'on a

$$\text{mod. } z + \text{mod. } z' = \text{mod. } \left(\frac{z+z'}{2} - u\right) + \text{mod. } \left(\frac{z+z'}{2} + u\right).$$

Ch. Michel.

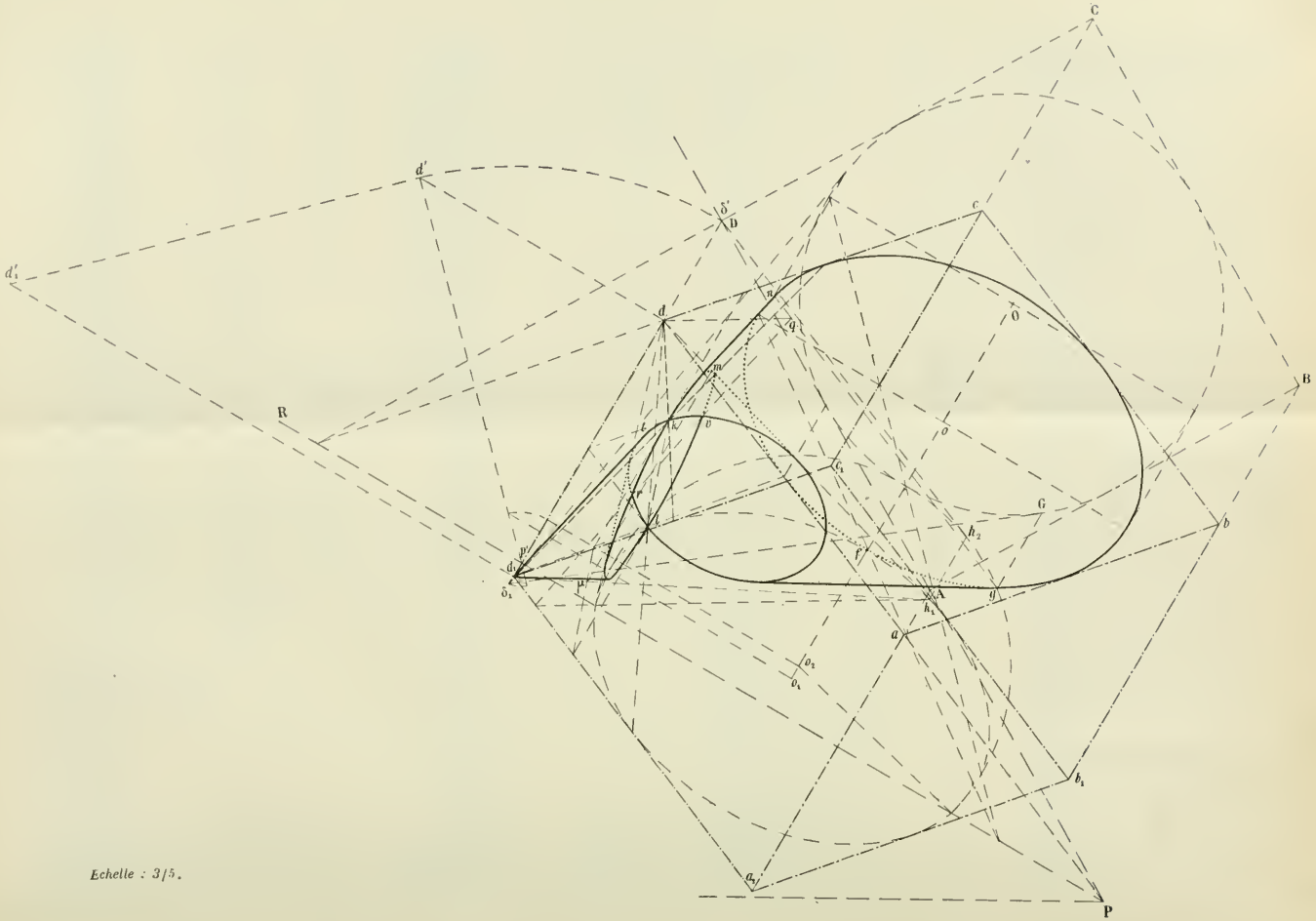
1475. — Vis-à-vis d'un miroir sphérique de petite ouverture, on place un quadrillage vivement éclairé, dans une position telle que la droite joignant le centre du quadrillage au sommet du miroir fasse avec l'axe de celui-ci un angle de 45°. Le plan du quadrillage est normal à cette droite et les traits sont les uns normaux, les autres parallèles au plan d'incidence moyen. Que doit-on trouver en explorant le faisceau réfléchi à l'aide d'un écran ?

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE CENTRALE (*Concours de 1905.*)

Intersection de deux cônes circulaires.

1425. — *On donne dans le plan horizontal de projection le carré* ABCD *qui est la base d'un cube dont les autres sommets sont respectivement* A_1, B_1, C_1, D_1. *On demande de représenter la projection horizontale* ($abcda_1b_1c_1d_1$) *de ce cube, après une rotation de* 45° *autour d'une droite* PR *donnée du plan horizontal.* (La rotation s'effectue au-dessus du plan horizontal.)



Echelle : 3/5.

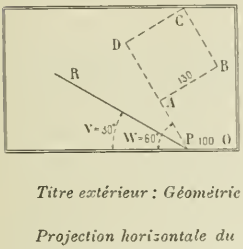
Cela étant, on considère dans cette seconde position du cube :

1° *Le cône ayant* D_1 *comme sommet et le cercle inscrit dans la face* ABCD *comme base ;*

2° *Le cône ayant* D *comme sommet et le cercle inscrit dans la face* $A_1B_1C_1D_1$ *comme base.*

On demande de déterminer l'intersection des deux cônes.

Dans le tracé à l'encre, on figurera le cube en traits bleus (¹) *et on représentera le cône de sommet* D_1 *avec l'entaille produite par le passage du cône de sommet* D.



Données numériques : OP = 100^{mm}, PA = 110^{mm}, *côté du cube* = 130^{mm}, *angle* V = 30°, *angle* W = 60°. — *Cadre de* 270^{mm} *sur* 450^{mm}.

Titre extérieur : Géométrie descriptive. — Titre intérieur : Intersection de deux cônes circulaires.

Projection horizontale du cube. — Si nous prenons comme plan vertical auxiliaire de projection le plan mené par D et perpendiculaire à PR, nous obtenons en d', d le relèvement du sommet D ; puis, au moyen des points où les prolongements des côtés du carré rencontrent la charnière, la projection horizontale de la base *abcd*. La projection verticale auxiliaire d'_1d_1 de l'arête DD_1 nous fait connaître la projection horizontale d_1 du sommet de la base supérieure et par suite celle de cette base elle-même $a_1b_1c_1d_1$.

Contours apparents des deux cônes. — Le cercle base du cône de sommet D_1 se projette suivant une ellipse dont le centre est l'intersection des diagonales de la base *abcd* ; le grand axe parallèle à PR a pour longueur le diamètre du cercle, 130^{mm}, et le petit axe s'obtient en relevant l'extrémité du diamètre perpendiculaire à PR en *f*. Cette ellipse touche les quatre côtés de la base *abcd* en leurs milieux. Les génératrices de contour apparent horizontal s'obtiennent en considérant le point du plan de base qui se projette en d_1 et menant par ce point des tangentes à la base. A cet effet, on rabat ce point en δ_1 sur le plan horizontal qui passe par PR et on mène par δ_1 les tangentes à la circonférence O. Les points de contact tels que G donnent pour relèvement les points tels que *g* où chaque génératrice de contour apparent, telle d_1g, touche la base.

La base du second cône se projette suivant une ellipse égale à la première. Pour obtenir les génératrices de contour apparent, on peut regarder PR comme la projection d'une horizontale du plan de la base supérieure du cube et rabattre ce plan autour de cette horizontale dont nous imaginons que la projection verticale auxiliaire est le point p'. Le point du plan de base qui se projetait en *d* se rabat alors en δ' et le centre de la base en o_2, de sorte qu'il suffit de mener par δ' les tangentes à la circonférence de centre o_2 et de diamètre égal à 130^{mm} pour obtenir les points de contact qui déterminent après relèvement les deux génératrices cherchées, telle est dh_1.

Intersection des deux cônes. — On sait que deux quadriques bitangentes se coupent suivant des courbes planes. Ici les cônes ont des plans tangents communs : les faces du cube contiguës à l'arête DD_1 ; ils se touchent en chacun des points d'intersection *k* et *l* des génératrices de contact de ces deux faces avec chaque cône. Leur intersection se compose donc de deux courbes planes dont les plans passent par la droite *kl*.

D'ailleurs ce fait résulte encore de ce que les deux cônes sont symétriques l'un de l'autre par rapport au plan mené par le milieu de l'arête DD_1, parallèlement aux plans des bases. Ce plan les coupe donc suivant la même courbe ; l'autre partie de la section étant dans un second plan perpendiculaire à celui-ci, c'est-à-dire parallèle à DD_1. On peut remarquer que ces deux plans divisent harmoniquement la ligne des sommets DD_1. La première partie de la section est un cercle homothétique de chaque base par rapport au sommet correspondant, le rapport d'homothétie étant $\frac{1}{2}$. Ce cercle se projette donc suivant une ellipse homothétique de chacune des ellipses *o* et o_1 et dont on a immédiatement les points sur chacun des contours apparents. Les tangentes en *k* et *l* sont parallèles à d_1c_1 et d_1a_1.

La seconde courbe plane est aussi une ellipse, puisque son plan est parallèle à DD_1 et *kl*, c'est-à-dire au plan diagonal ACA_1C_1 du cube.

On en connaît les points *k* et *l* et les tangentes en ces points, qui sont parallèles à dd_1, car ce sont les intersections du plan de l'ellipse avec les deux plans tangents passant par DD_1. On en peut construire directement les points sur les génératrices de contour apparent : ainsi le plan auxiliaire DD_1H_1 coupe le plan de l'ellipse suivant μm, parallèle à dd_1, d'où le point *m* sur dh_1.

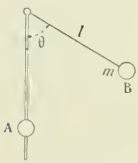
(¹) Ici nous l'avons figuré en trait mixte.

Points doubles en projection. — On peut aussi trouver les points où les projections des deux courbes se croisent en déterminant la ligne des points doubles de la projection horizontale de l'intersection des deux cônes. C'est la droite commune aux deux plans diamétraux conjugués des cordes verticales dans chaque cône. On connaît les traces de chacun de ces plans sur les plans des bases.

Il suffit donc de prendre l'intersection de ces traces, telles que gn et dq et de joindre les deux points ainsi obtenus pour avoir la ligne des points doubles ; elle coupe la première ellipse aux points cherchés v, r. Tous ces points suffisent pour tracer la courbe; on pourrait d'ailleurs avoir facilement la longueur du diamètre parallèle à dd_1 et qui est conjugué de kl en menant un plan auxiliaire par ce diamètre dd_1 et prenant sa trace sur l'un des plans de base.

Cône entaillé — Si l'on enlève le cône de sommet D, les portions des génératrices de contour apparent du cône D_1 qui lui étaient intérieures disparaissent avec toute la portion de surface comprise entre les deux ellipses et sur laquelle se trouvaient ces génératrices. Les seules parties cachées de l'intersection sont donc les arcs de chaque ellipse projetés à l'intérieur de l'angle curviligne tkr et de son opposé par le sommet. La ponctuation n'offre aucune difficulté.

1424. — *Un appareil est formé, comme le montre la figure, de deux boules conductrices égales, l'une fixe* A, *l'autre mobile* B *de masse* $m = 2^{gr},3$ *attachée au bout d'un fil de longueur* $l = 12^{cm}$.



Ces boules, qui au début se touchent, reçoivent chacune une charge q *qui produit une déviation* $\theta = 60°$.

Calculer cette charge.

Établir la formule algébrique définitive avant tout calcul numérique.

Entre les deux boules s'exerce une action répulsive

$$F = \frac{q^2}{\overline{AB}^2} = \frac{q^2}{4l^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}.$$

D'autre part, la boule B est soumise, en outre, à son poids mg et à la tension du fil.

Écrivons que la somme des moments des forces par rapport à l'axe de suspension est nulle; il vient

$$mg\, l \sin \theta = \frac{q^2}{4l^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \times l \cos \frac{\theta}{2},$$

d'où

$$q = 2l \sin \frac{\theta}{2} \sqrt{2mg \sin \frac{\theta}{2}}.$$

Remplaçons les lettres par les valeurs numériques qu'elles représentent en unités C.G.S. :

$$q = 2 \times 12 \times 0{,}5 \sqrt{2 \times 2{,}3 \times 9{,}81 \times 0{,}5} = 570.$$

Cette charge représente une fraction de coulomb égale à

$$\frac{570}{3 \times 10^9} = 19 \times 10^{-8}.$$

G. FOUCRY, à Roanne.

Bonne solution de M. Croze : assez bonne solution de M. Henry Helmer.

MÉCANIQUE

1393. — *Un point matériel* M *est attiré vers un point fixe* O *par une force inversement proportionnelle au carré de la distance* MO. *Il est lancé d'un point* A *avec une vitesse* v_0 *dont la grandeur est choisie de manière que la trajectoire soit une ellipse. Quel doit être l'angle de cette vitesse avec* OA *pour que le mobile atteigne un point* B *donné? Montrer que le problème n'est possible que si le point* B *est intérieur à une ellipse de foyers* O *et* A, *ou s'il est situé sur cette ellipse. Solution géométrique. Construire la direction de* v_0.

Nous traiterons la question en utilisant les coordonnées polaires, le pôle étant le point O, et l'axe polaire la droite OA.

Posons $OA = r_0$, et soit α l'angle de la vitesse initiale avec l'axe polaire Ox, r et θ les coordonnées polaires du point M, m la masse de ce point, et enfin $\frac{m\mu}{r^2}$ la force attractive.

Comme cette force est centrale, le théorème des aires s'applique et nous donne

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = C,$$

et nous avons

$$C = r_0 v_0 \sin \alpha.$$

D'autre part, d'après le théorème des forces vives, nous pouvons écrire

$$\frac{dmv^2}{2} = -\frac{m\mu}{r^2}\, dr$$

et, en intégrant,

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} + h,$$

où

$$h = v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0^2}.$$

h est donc indépendant de α.

On sait d'ailleurs que

$$v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dr^2}{dt^2} + r^2 \frac{d\theta^2}{dt^2},$$

ou, en remplaçant dt par $\frac{r^2 d\theta}{C}$,

$$v^2 = \frac{C^2}{r^4} \cdot \frac{dr^2}{d\theta^2} + \frac{C^2}{r^2} = C^2 \left[\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right],$$

et, en remplaçant v^2 par sa valeur $\frac{2\mu}{r} + h$

$$\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{C^2} \left(\frac{2\mu}{r} + h \right),$$

ou

$$\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta} \right)^2 = -\left(\frac{1}{r} - \frac{\mu}{C^2} \right)^2 + \frac{\mu^2}{C^4} + \frac{h}{C^2}.$$

Posons $\frac{1}{r} - \frac{\mu}{C^2} = \rho\sqrt{\frac{\mu^2}{C^4} + \frac{h}{C^2}}$, l'équation différentielle devient

$$\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 = 1 - \rho^2 \qquad \text{ou} \qquad d\theta = \pm\frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}},$$

d'où l'on tire en intégrant

$$\theta - \varphi = \pm \text{arc} \cos \rho,$$
$$\rho = \cos(\theta - \varphi),$$

φ désignant une constante que nous déterminerons plus loin.

Remplaçons ρ par sa valeur ; nous obtenons l'équation de la trajectoire

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{C^2} + \sqrt{\frac{\mu^2}{C^4} + \frac{h}{C^2}}\cos(\theta - \varphi).$$

Cette équation représente une conique ayant pour foyer l'origine, pour axe focal l'axe polaire et dont le paramètre p et l'excentricité e ont respectivement pour valeurs

$$p = \frac{C^2}{\mu}, \qquad e = \sqrt{1 + \frac{hC^2}{\mu^2}}.$$

Pour que cette conique soit une ellipse, il faut que e soit inférieur à 1 ; il faut donc que h soit négatif, ou

$$v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} < 0.$$

Nous supposerons cette condition remplie ; elle est indépendante de la direction de la vitesse initiale.

Soient a et b les demi-axes de cette ellipse ; nous avons

$$\frac{b^2}{a} = \frac{C^2}{\mu}. \qquad \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{hC^2}{\mu}},$$

et nous en tirons aisément

$$a = -\frac{\mu}{h}, \qquad b = -\frac{C^2}{h}.$$

Nous voyons ainsi que le grand axe est indépendant de α.

Revenons à l'équation de la trajectoire :

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{C^2} + \sqrt{\frac{\mu^2}{C^4} + \frac{h}{C^2}}\,(\cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi),$$

et, pour déterminer φ, écrivons que cette équation est vérifiée par $\theta = 0$, $r = r_0$; nous obtenons

$$\cos\varphi = \frac{\frac{1}{r_0} - \frac{\mu}{C^2}}{\sqrt{\frac{\mu^2}{C^4} + \frac{h}{C^2}}}$$

et, par suite,

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{\frac{\mu^2}{C^4} + \frac{h}{C^2} - \left(\frac{1}{r_0} - \frac{\mu}{C^2}\right)^2}}{\sqrt{\frac{\mu^2}{C^4} + \frac{h}{C^2}}} = \frac{\sqrt{\frac{h}{C^2} - \frac{1}{r_0^2} + \frac{2\mu}{r_0 C^2}}}{\sqrt{\frac{\mu^2}{C^4} + \frac{h}{C^2}}} = \frac{\sqrt{\frac{v_0^2}{C^2} - \frac{1}{r_0^2}}}{\sqrt{\frac{\mu^2}{C^4} + \frac{h}{C^2}}}.$$

L'équation de la trajectoire devient alors

$$\frac{1}{r} - \frac{\mu}{C^2} = \cos\theta\left(\frac{1}{v_0} - \frac{\mu}{C^2}\right) + \sin\theta\sqrt{\frac{v_0^2}{C^2} - \frac{1}{r_0^2}}.$$

Il s'agit maintenant de déterminer α de façon que cette courbe passe par le point B (r, θ).

Remplaçons C par $r_0 v_0 \sin\alpha$; nous avons d'abord

$$\frac{v_0^2}{C^2} - \frac{1}{r_0^2} = \frac{v_0^2 r_0^2 - C^2}{C^2 r_0^2} = \frac{v_0^2 r_0^2 \cos^2\alpha}{r_0^4 v_0^2 \sin^2\alpha} = \frac{\operatorname{cotg}^2\alpha}{r_0^2},$$

donc le coefficient de $\sin\theta$ est $\dfrac{\operatorname{cotg}\alpha}{r_0}$.

Posons $\operatorname{cotg}\alpha = u$; $\dfrac{1}{C^2}$ est égal à $\dfrac{u^2+1}{v_0 r_0^2}$ et, en portant cette valeur dans l'équation de la trajectoire, nous obtenons

$$\frac{1}{r} - \frac{\mu(u^2+1)}{r_0^2 v_0^2} = \cos\theta\left(\frac{1}{r_0} - \frac{\mu(u^2+1)}{r_0^2 v_0^2}\right) + \frac{u}{r_0}\sin\theta,$$

ou, en ordonnant par rapport à u,

$$\frac{\mu(1-\cos\theta)}{r_0^2 v_0^2}u^2 + \frac{u}{r_0}\sin\theta - \frac{1}{r} + \frac{\cos\theta}{r_0} + \frac{\mu}{r_0^2 v_0^2}(1-\cos\theta) = 0.$$

Il n'y a plus qu'à écrire que cette équation a ses racines réelles, ce qui nous donne

$$\frac{\sin^2\theta}{r_0^2} - \frac{\mu(1-\cos\theta)}{r_0^2 v_0^2}\left[-\frac{1}{r} + \frac{\cos\theta}{r_0} + \frac{\mu}{r_0 v_0}(1-\cos\theta)\right] \geqslant 0 ;$$

remplaçons $\sin^2\theta$ par $1-\cos^2\theta$, puis divisons par $1-\cos\theta$; nous obtenons

$$\frac{4\mu v_0^2}{r} + \cos\theta\left(v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}\right)^2 + v_0^4 - \frac{4\mu^2}{r_0^2} \geqslant 0.$$

Pour interpréter géométriquement cette condition, considérons l'équation

$$(1) \qquad \frac{4\mu v_0^2}{r} + \cos\theta\left(v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}\right)^2 + v_0^4 - \frac{4\mu^2}{r_0^2} = 0,$$

qui peut s'écrire

$$(E) \qquad \frac{1}{r} = \frac{\dfrac{4\mu^2}{r_0^2} - v_0^4 - \cos\theta\left(v_0^2 - \dfrac{2\mu}{r_0}\right)^2}{4\mu v_0^2}.$$

Elle représente une conique ayant le pôle pour foyer, l'axe polaire pour axe focal.

Comme nous avons supposé $v_0^2 - \dfrac{2\mu}{r_0} < 0$, le paramètre p et l'excentricité e ont pour valeurs

$$p = \frac{4\mu v_0^2}{\dfrac{4\mu^2}{r_0^2} - v_0^4}, \qquad e = \frac{\left(v_0^2 - \dfrac{2\mu}{r_0}\right)^2}{\dfrac{4\mu^2}{r_0^2} - v_0^4} = \frac{\dfrac{2\mu}{r_0} - v_0^2}{\dfrac{2\mu}{r_0} + v_0^2}.$$

On a $e < 1$, donc la conique est une ellipse (E).

La distance focale $2c$ est facile à calculer, on a $2c = \dfrac{2pe}{1-e^2}$, et en remplaçant p et e par leurs valeurs, on voit aisément que $2c = r_0$.

Il en résulte que l'ellipse (E) a pour foyers les points O et A.

Cela posé, l'inégalité (1) exprime que le rayon vecteur du point B est inférieur ou égal aux rayons vecteurs des points de l'ellipse (E) qui sont situés sur la droite OB ; par suite, pour que l'équation en

u ait ses racines réelles, il faut que le point B soit situé à l'intérieur de l'ellipse (E) ou sur cette ellipse.

Pour résoudre la question géométriquement, il faut construire une ellipse ayant pour foyer le point O, passant par les points A et B et connaissant la longueur du grand axe $2a$, puisque nous avons vu que cette longueur est indépendante de l'angle α.

Soit O' le deuxième foyer ; nous avons

$$OA + O'A = OB + OB = 2a,$$

d'où

$$O'A = 2a - OA, \qquad O'B = 2a - OB.$$

Par suite, le point O' est à l'intersection des deux cercles ayant pour centres les points A et B et pour rayons $2a - OA$ et $2b - OB$.

Il y a deux solutions.

Pour que le problème soit possible, il faut que la distance des centres soit comprise entre la somme et la différence des rayons. On doit donc avoir

$$|OA - OB| < AB < 4a - OA - OB.$$

La première inégalité $|OA - OB| < AB$ est toujours vérifiée, puisque O, A, B sont les sommets d'un triangle. La seconde peut s'écrire

$$AB + OB < 4a - OA.$$

Elle exprime que le point B est intérieur à une ellipse qui a pour foyers O et A, et dont le grand axe est égal à $4a - OA$.

Pour construire la direction de v_0, il suffit de mener la tangente au point A à l'ellipse qui passe par ce point et qui a pour foyers O et O'.

BROS, à Albi.

Bonne solution par M. Grangier, à Mouleydier.

QUESTIONS PROPOSÉES

1476. — Etant donnée une cubique circulaire à point double, on joint un point M de cette courbe au point double, O, et on prend la symétrique, Δ, de cette droite par rapport à la parallèle à l'asymptote menée par le point M.

Trouver l'enveloppe de cette droite lorsque le point M décrit la cubique.

J. Haag, élève à l'École normale supérieure.

1477. — On considère la cissoïde droite $(x^2 + y^2)x - ay^2 = 0$ rapportée à deux axes rectangulaires Ox, Oy et le cercle générateur $x^2 + y^2 - ax = 0$. On prend un point variable M sur la cissoïde et la polaire Δ de ce point par rapport au cercle.

1° Lieu du point de rencontre de la droite OM et de la droite Δ quand le point M décrit la cissoïde.

2° Par un point P quelconque du plan passent trois droites Δ correspondant à trois points M_1, M_2, M_3 de la cissoïde. Démontrer que ces trois points sont en ligne droite, et construire la courbe que doit décrire le point P pour que, des trois droites OM_1, OM_2, OM_3, l'une soit bissectrice de l'angle des deux autres.

G. P.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

16e Année. N° 6. Mars 1906.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LE RAPPORT ANHARMONIQUE DE QUATRE POINTS D'UN CERCLE

par M. **Ch. Michel**, professeur de mathématiques spéciales au lycée de Dijon.

1. Soient dans un plan deux axes de coordonnées rectangulaires $x'Ox$ et $y'Oy$ et quatre points quelconques A_1, A_2, A_3, A_4 ayant pour affixes les quatre nombres imaginaires z_1, z_2, z_3, z_4. Je me propose d'établir le théorème suivant :

Pour que le rapport anharmonique des quatre nombres z_1, z_2, z_3, z_4 soit réel, il faut et il suffit que les quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 soient sur un même cercle ou une même droite.

En effet, le rapport anharmonique ρ des quatre nombres z_1, z_2, z_3, z_4 qui, par définition, est égal à

$$\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}$$

apparaît comme le quotient des deux quantités

$$u = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}, \qquad v = \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}.$$

Pour que ρ soit réel, il faut et il suffit que les arguments de u et de v aient une différence égale à un multiple de π. Or, on a

$$\arg.\ u = \arg.\ (z_3 - z_1) - \arg.\ (z_3 - z_2),$$
$$\arg.\ v = \arg.\ (z_4 - z_1) - \arg.\ (z_4 - z_2).$$

Mais les imaginaires $z_3 - z_1$, $z_3 - z_2$, $z_4 - z_1$, $z_4 - z_2$ sont représentées par des vecteurs équipollents respectivement à A_1A_3, A_2A_3, A_1A_4, A_2A_4. Donc, on a

$$\arg.\ u = (A_2A_3,\ A_1A_3), \quad \text{à } 2k\pi \text{ près},$$
$$\arg.\ v = (A_2A_4,\ A_1A_4), \quad \text{à } 2k\pi \text{ près},$$

et, pour que ρ soit réel, il faut et il suffit que l'on ait

$$(A_2A_3,\ A_1A_3) = (A_2A_4,\ A_1A_4), \quad \text{à } k\pi \text{ près},$$

c'est-à-dire

$$(A_3A_2,\ A_3A_1) = (A_4A_2,\ A_4A_1), \quad \text{à } k\pi \text{ près}.$$

Cette relation exprime que les points A_3 et A_4 sont sur un cercle passant par A_1 et A_2, lieu des sommets des angles de grandeur donnée, dans un sens donné, dont les côtés passent par A_1 et A_2. Toutefois, si A_3 est sur la droite A_1A_2, A_4 est aussi nécessairement sur cette droite. Le théorème est ainsi démontré.

2. Supposons que les quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 soient sur un même cercle. D'après le théorème précédent, ρ est réel et on a ainsi

$$\rho = \pm \text{ mod. } \rho.$$

Evaluons d'abord le module de ρ. Comme les imaginaires $z_3 - z_1$, $z_3 - z_2$, $z_4 - z_1$, $z_4 - z_2$ ont pour modules les mesures des distances A_1A_3, A_2A_3, A_1A_4, A_2A_4, ρ a évidemment pour module

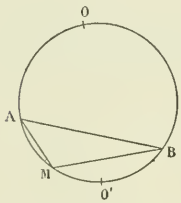
$$\frac{A_1A_3}{A_2A_3} : \frac{A_1A_4}{A_2A_4}$$

et ainsi on a

$$\rho = \pm \left[\frac{A_1A_3}{A_2A_3} : \frac{A_1A_4}{A_2A_4} \right].$$

Quant au signe de ρ, il s'agit de savoir dans quel cas on a le signe $+$ et dans quel cas on a le signe $-$. Nous voyons que ρ est positif si la différence entre les arguments de u et de v est un multiple *pair* de π, négatif si cette différence est un multiple *impair* de π. Pour que ρ soit positif, il faut donc et il suffit que les angles (A_3A_2, A_3A_1) et (A_4A_2, A_4A_1) soient égaux, à $2k\pi$ près, ce qui revient à dire qu'il faut et il suffit que les points A_3 et A_4 soient sur *un seul* des deux arcs de la circonférence qui ont pour extrémités A_1 et A_2 ou encore que les deux cordes A_1A_2 et A_3A_4 se coupent à l'extérieur de la circonférence. Pour que ρ soit négatif, il faut et il suffit que les deux cordes A_1A_2 et A_3A_4 se coupent à l'intérieur de la circonférence ou encore que l'un quelconque des deux arcs A_1A_2 empiète sur l'un quelconque des deux arcs A_3A_4.

3. Il convient de donner à ρ une expression indépendante, dans sa forme, des positions relatives des quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 sur la circonférence qui passe par ces points. Or, il est possible d'adopter pour l'évaluation des cordes d'une même circonférence une convention de signes analogue à celle qu'on emploie dans l'évaluation des distances sur une même droite. C'est ce que je me propose de faire voir.



Sur la circonférence, désignons l'un des deux sens dans lesquels peut se mouvoir un point comme sens positif et l'autre comme sens négatif. Choisissons en outre sur cette circonférence un point O, de manière à effectuer une *coupure*. Cela posé, nous représenterons par AB le nombre algébrique qui a pour valeur absolue la mesure de la corde qui a pour extrémités A et B et pour signe le signe $+$ si un point mobile sur la circonférence doit, pour aller de A en B, en se déplaçant toujours dans le même sens et *sans passer par le point* O, se déplacer dans le sens positif, le signe $-$, si ce point mobile, dans les mêmes conditions, doit se déplacer dans le sens négatif. Nous supposons essentiellement que ni l'un ni l'autre des points A et B ne coïncide avec O.

Si on prend comme sens positif sur la circonférence, au lieu du sens choisi, le sens contraire, le nombre AB change de signe.

De la définition précédente, il résulte immédiatement qu'on a $AB = -BA$.

Soient sur la circonférence deux points fixes A et B et un point mobile M. Considérons le rapport $\frac{MA}{MB}$. Remarquons d'abord que ce rapport ne change pas si on prend comme sens positif sur la circonférence, au lieu du sens choisi, le sens contraire. D'autre part, des deux arcs de la circonférence qui ont pour extrémités A et B, l'un contient le point O et est le lieu des points M de la circonférence pour lesquels $\frac{MA}{MB}$ est positif, l'autre ne contient pas le point O et est le lieu des points M de la circonférence pour lesquels $\frac{MA}{MB}$ est négatif. Si, fixant M, on remplace le point O situé sur l'un des deux arcs ayant pour extrémités A et B par un point O′ situé sur l'autre arc, le rapport $\frac{MA}{MB}$ change de signe.

Cela posé, revenons aux quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 primitivement donnés sur la circonférence et considérons le double rapport, défini, conformément à la convention précédente, en grandeur et en signe,

$$\frac{A_1A_3}{A_2A_3} : \frac{A_1A_4}{A_2A_4} = \frac{A_3A_1}{A_3A_2} : \frac{A_4A_1}{A_4A_2}.$$

Quelle que soit la position du point O sur la circonférence et quel que soit le sens choisi sur cette cir-

conférence comme sens positif, si A_3 et A_4 sont sur un seul des deux arcs qui ont pour extrémités A_1 et A_2, les deux rapports $\frac{A_3A_1}{A_3A_2}$ et $\frac{A_4A_1}{A_4A_2}$ sont de même signe, et le double rapport est positif, aussi bien ρ est positif; si A_3 et A_4 sont l'un sur l'un, l'autre sur l'autre des deux arcs qui ont pour extrémités A_1 et A_2, $\frac{A_3A_1}{A_3A_2}$ et $\frac{A_4A_1}{A_4A_2}$ sont de signes contraires, le double rapport est négatif, ainsi d'ailleurs que ρ. Et réciproquement.

Finalement, grâce à la convention adoptée, on peut écrire, dans tous les cas, l'égalité suivante, valable en grandeur et en signe,

$$\rho = \frac{A_3A_1}{A_3A_2} : \frac{A_4A_1}{A_4A_2}.$$

4. Entre les quatre nombres z_1, z_2, z_3, z_4, on a l'identité

$$(z_1 - z_2)(z_3 - z_4) + (z_1 - z_3)(z_4 - z_2) + (z_1 - z_4)(z_2 - z_3) = 0.$$

Divisons les deux membres par $(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)$; il vient

$$\frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)} + \frac{(z_1 - z_3)(z_4 - z_2)}{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)} - 1 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4} : \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_4} + \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} - 1 = 0.$$

On a donc, d'après ce qui précède, la relation suivante :

$$\frac{A_1A_2}{A_1A_4} : \frac{A_3A_2}{A_3A_4} + \frac{A_1A_3}{A_1A_4} : \frac{A_2A_3}{A_2A_4} - 1 = 0;$$

c'est-à-dire

$$\frac{A_1A_2 . A_3A_4}{A_1A_4 . A_3A_2} + \frac{A_1A_3 . A_2A_4}{A_1A_4 . A_2A_3} - 1 = 0,$$

c'est-à-dire enfin

$$A_1A_2 . A_3A_4 + A_1A_3 . A_4A_2 + A_1A_4 . A_2A_3 = 0.$$

On obtient ainsi le théorème de Ptolémée sur le quadrilatère inscriptible.

Pour lui donner la forme habituelle, supposons qu'un point mobile sur la circonférence partant du point O et se déplaçant dans le sens positif rencontre les quatre points dans l'ordre $A_1A_2A_3A_4$ et considérons le contour polygonal $A_1A_2A_3A_4A_1$. C'est un quadrilatère convexe qui a pour côtés opposés A_1A_2, A_3A_4 et A_2A_3, A_4A_1 et qui a pour diagonales A_1A_3 et A_2A_4. Désignons par a, b, c, d, m et n les mesures des longueurs A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1, A_1A_3 et A_2A_4. En vertu des conventions précédentes, on reconnait que l'on a

$$A_1A_2 = a, \quad A_3A_4 = c, \quad A_1A_3 = m, \quad A_4A_2 = -n, \quad A_1A_4 = d, \quad A_2A_3 = b.$$

Par suite, on a

$$mn = ac + bd.$$

5. Le cercle qui passe par les quatre points A_1, A_2, A_3, A_4, est une courbe unicursale ; il est possible d'exprimer les coordonnées x et y d'un point réel de cette courbe par des fonctions rationnelles à coefficients réels d'un paramètre réel λ. Soient alors $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ les paramètres des quatre points A_1, A_2, A_3, A_4. On sait que, si la représentation paramétrique est propre, le rapport anharmonique de ces quatre nombres a une valeur indépendante de la représentation paramétrique ; c'est cette valeur constante qu'on appelle le *rapport anharmonique* des quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 sur la circonférence. En particulier, ce rapport anharmonique est égal au rapport anharmonique constant des quatre droites qui joignent un point arbitraire M de la circonférence aux quatre points A_1, A_2, A_3, A_4. Je veux montrer que *ce rapport anharmonique est aussi égal au nombre* ρ, *précédemment défini.*

Considérons en effet une substitution linéaire

$$z = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta},$$

λ étant réel, α, β, γ, δ étant des nombres imaginaires, avec la condition $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Il est possible de déterminer les coefficients α, β, γ, δ de façon que, pour les valeurs λ_1, λ_2, λ_3 de λ, z prenne les valeurs z_1, z_2, z_3. Cela posé, supposons que λ varie par valeurs réelles. On sait que le point M d'affixe z décrit un cercle (ou une droite) qui, d'après le choix des coefficients α, β, γ, δ, doit passer par les points A_1, A_2, A_3; le lieu du point M est donc le cercle qui passe par les quatre points A_1, A_2, A_3, A_4. Il est clair que les coordonnées x et y du point M s'expriment rationnellement en fonction de λ et que le paramètre λ représente proprement le point M sur le cercle. Dans la représentation paramétrique ainsi obtenue, A_1, A_2, A_3 ont pour paramètres λ_1, λ_2, λ_3. Or, il n'existe qu'une seule représentation paramétrique propre pour laquelle trois points du cercle aient trois paramètres donnés; par suite, dans la représentation considérée, A_4 a pour paramètre λ_4. Cela posé, comme z est lié homographiquement à λ, le nombre ρ précédemment défini, qui est égal au rapport anharmonique des quatre quantités z_1, z_2, z_3, z_4, est égal au rapport anharmonique des quatre nombres λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, c'est-à-dire au rapport anharmonique des quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 sur le cercle. Le théorème est démontré.

6. Considérons une substitution linéaire

$$Z = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

Z et z étant deux variables imaginaires, α, β, γ, δ étant des nombres fixes avec la condition $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Elle définit une transformation du plan qui fait correspondre au point d'affixe z le point d'affixe Z. On sait que si le point d'affixe z décrit un cercle (ou une droite), le point d'affixe Z décrit un cercle (ou une droite). Comme le rapport anharmonique de quatre valeurs de z est égal au rapport anharmonique des quatre valeurs correspondantes de Z, on voit que le rapport anharmonique de quatre points d'un cercle (ou d'une droite) se conserve dans la transformation.

En particulier, considérons la transformation définie par la relation

$$Z = \frac{1}{z}.$$

On sait qu'elle est le produit d'une inversion dont le pôle est à l'origine des coordonnées et d'une symétrie par rapport à l'axe des x. Il est évident que quatre points situés sur un même cercle (ou une même droite) se transforment par symétrie par rapport à une droite en quatre points situés sur un même cercle (ou une même droite) et que le rapport anharmonique des quatre points sur le cercle (ou la droite) se conserve dans la transformation. Il en résulte immédiatement le théorème suivant :

Le rapport anharmonique de quatre points d'un cercle (ou d'une droite) se conserve dans une transformation par inversion.

SUR LE CALCUL APPROCHÉ DES SÉRIES

par M. **Lagrange**, professeur au lycée de Saint-Etienne.

Dans la plupart des traités d'Algèbre, on n'évalue une limite supérieure de l'erreur commise dans le calcul approché d'une série que dans le cas où $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $\sqrt[n]{u_n}$ ont une limite inférieure à l'unité, ou encore lorsque le terme général u_n est une fonction de n dont on sait trouver la fonction primitive. Nous nous proposons, dans cet article, de calculer une limite supérieure de cette erreur dans le cas où s'applique la règle de Duhamel.

Rappelons d'abord une formule connue. Si l'on pose

$$S = \frac{1}{(p+1)^\mu} + \frac{1}{(p+2)^\mu} + \cdots, \qquad \mu > 1$$

on a les inégalités

$$\int_{p+1}^{\infty} \frac{dx}{x^\mu} < S < \int_p^{\infty} \frac{dx}{x^\mu};$$

la fonction primitive de $\frac{1}{x^\mu}$ étant $\frac{1}{(1-\mu)x^{\mu-1}}$, il vient

$$(1) \qquad \frac{1}{(\mu-1)(p+1)^{\mu-1}} < S < \frac{1}{(\mu-1)p^{\mu-1}}.$$

Cela posé, considérons une série positive à laquelle s'applique la règle de Duhamel. Si l'on pose

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \alpha, \qquad \text{on a pour} \qquad n > p, \qquad n\alpha > k > 1.$$

Nous voulons trouver une limite supérieure de la somme

$$R_p = u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots$$

Soit μ un nombre compris entre 1 et k; nous allons démontrer que, pour n suffisamment grand, on a

$$(2) \qquad 1 + \frac{k}{n} \geqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\mu.$$

En effet, considérons la fonction $f(x) = (1+x)^\mu - 1 - kx$. Sa dérivée est $f'(x) = \mu(1+x)^{\mu-1} - k$. Elle s'annule et change de signe pour la valeur

$$x_1 = \left(\frac{k}{\mu}\right)^{\frac{1}{\mu-1}} - 1;$$

on peut donc former le tableau suivant donnant la variation de $f(x)$:

x	0		x_1	$+\infty$
$f(x)$	0	décroît	minimum	croît

Pour $x \leqslant x_1$, on a donc $f(x) < 0$. Donc si $n \geqslant \frac{1}{x_1}$ l'inégalité (2) sera satisfaite.

Nous supposerons donc qu'on a

$$p \geqslant \frac{1}{x_1} \qquad \text{ou} \qquad p \geqslant \frac{1}{\left(\frac{k}{\mu}\right)^{\frac{1}{\mu-1}} - 1}.$$

Pour toutes les valeurs de $n > p$, on aura

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} > 1 + \frac{k}{n} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\mu.$$

Si l'on pose $v_n = \frac{1}{n^\mu}$, il en résultera $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{v_{n+1}}{v_n}$. On en déduit, sans difficulté,

$$R_p < \frac{u_p}{v_p}(v_{p+1} + v_{p+2} + \cdots),$$

ou, en tenant compte de l'inégalité (1),

$$R_p < \frac{p u_p}{\mu - 1}.$$

Ce nombre μ est arbitraire et n'est assujetti qu'à être compris entre 1 et k. Posons

$$\mu = 1 + \frac{n-1}{n}(k-1),$$

n étant arbitraire. Il vient

$$R_p < \frac{pu_p}{k-1} \cdot \frac{n}{n-1}$$

et l'inégalité $p \geqslant \frac{1}{x_1}$ devient $p \geqslant \frac{\mu(\mu-1)}{k-\mu}$ ou, en remplaçant μ par sa valeur,

$$p \geqslant \mu(n-1);$$

a fortiori il suffit qu'on ait $p \geqslant k(n-1)$; p et k étant donnés, il y aura avantage à prendre n le plus grand possible ; on prendra donc

$$n = 1 + \frac{k}{p}.$$

Il vient alors

$$(3) \qquad R_p < \frac{pu_p}{k-1}\left(1 + \frac{k}{p}\right).$$

Limite inférieure de R_p. — Supposons qu'à partir du rang p, on ait constamment $n\alpha < k'$; on a alors

$$1 + \alpha < 1 + \frac{k'}{n} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k'};$$

en posant $v_n = \frac{1}{n^{k'}}$, on en déduit $\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{v_{n+1}}{v_n}$ et par suite

$$R_p > \frac{u_p}{v_p}\left[\frac{1}{(p+1)^{k'}} + \frac{1}{(p+2)^{k'}} + \cdots\right]$$

ou, en tenant compte de (1),

$$(4) \qquad R_p > \frac{pu_p}{k'-1}\left(\frac{p}{p+1}\right)^{k'-1}.$$

Nous allons déduire de ces résultats le théorème suivant :

Théorème. — *Si dans une série positive* $p\alpha$ *tend vers une limite* $A > 1$, *le rapport* $\frac{R_p}{pu_p}$ *tend vers* $\frac{1}{A-1}$ *quand* p *croît indéfiniment.*

En effet, considérons deux suites infinies ayant pour limite commune A :

$$\begin{cases} k_1 < k_2 < k_3 < \ldots, \\ k'_1 > k'_2 > k'_3 > \ldots \end{cases}$$

Etant donné un nombre entier s quelconque, on peut trouver un rang p assez grand pour qu'à partir de ce rang on ait

$$k'_s > n\alpha > k_s.$$

On en déduit

$$\left(\frac{p}{p+1}\right)^{k'_s-1} \frac{1}{k'_s-1} < \frac{R_p}{pu_p} < \frac{1}{k_s-1}\left(1 + \frac{k_s}{p}\right).$$

Quand s croît indéfiniment, les termes extrêmes de ces inégalités ont pour limite commune $\frac{1}{A-1}$.

Cas où $n\alpha$ *croît indéfiniment.* — La formule donnant une limite inférieure de R_p ne peut plus s'appliquer. Supposons qu'on puisse trouver un nombre $\beta < 1$ tel que, à partir du rang p, on ait constamment

$$n^\beta \alpha < A;$$

on en déduit

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} < 1 + \frac{A}{n^\beta},$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}} < 1 + \frac{A}{(n+1)^\beta} < 1 + \frac{A}{n^\beta},$$

d'où
$$u_{n+1} > \frac{u_n}{1 + \frac{A}{n^\beta}}, \qquad u_{n+2} > \frac{u_n}{\left(1 + \frac{A}{n^\beta}\right)^2}, \quad \ldots$$

donc
$$R_p > u_p \frac{1}{1 + \frac{A}{p^\beta}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{A}{p^\beta}}}$$

ou
$$R_p > \frac{p^\beta u_p}{A}.$$

On remarquera que, dans ce cas, on a $n\alpha < An^{1-\beta}$. En remplaçant k par $Ap^{1-\beta}$ dans la limite supérieure de R_p, on peut écrire

$$\frac{1}{A} p^\beta u_p < R_p < p^\beta u_p \left(1 + \frac{Ap^{1-\beta}}{p}\right) \frac{1}{A - \frac{1}{p^{1-\beta}}}.$$

On déduit de ces inégalités le théorème suivant :

Théorème. — *Si dans une série positive le produit $p^\beta \alpha$ $(\beta < 1)$ a pour limite B, le rapport $\frac{R_p}{p^\beta u_p}$ a pour limite $\frac{1}{B}$ quand p croît indéfiniment.*

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Concours de 1905.)

Algèbre et Trigonométrie.

1402. — *Démontrer que l'égalité* $\sin B = \frac{1}{5}\sin(2A + B)$ *entraîne la suivante :* $\operatorname{tg}(A + B) = \frac{3}{2}\operatorname{tg} A$.

L'égalité donnée

$$\sin B = \frac{1}{5}\sin(2A + B)$$

peut se transformer en la suivante :

$$\sin(\overline{A + B} - A) = \frac{1}{5}\sin(\overline{A + B} + A)$$

et elle devient alors

$$\sin(A + B)\cos A - \sin A\cos(A + B) = \frac{1}{5}[\sin(A + B)\cos A + \sin A\cos(A + B)].$$

En divisant les deux membres de celle-ci par $\cos A\cos(A + B)$, elle se transforme immédiatement en

$$5\operatorname{tg}(A + B) - 5\operatorname{tg} A = \operatorname{tg}(A + B) + \operatorname{tg} A,$$

qui donne de suite

$$\operatorname{tg}(A + B) = \frac{3}{2}\operatorname{tg} A.$$

Bonnes solutions de MM. Amblard, à Ruines ; Brignon, à Harcholet ; Bros, à Albi ; Dessimond, à Alger ; A. Ducos, lycée Carnot ; G. Foucry, à Roanne ; Garach, à Marseille ; Janois, à Nantes.

1403. — *Calculer la valeur de e^2 à un dix-millième près (on ne supposera pas connue la valeur du nombre e).*

Nous partirons de la formule

$$e^2 = 1 + \frac{2}{1} + \frac{2^2}{1.2} + \cdots + \frac{2^n}{n!} + \cdots$$

et nous calculerons chaque terme avec six décimales exactes, jusqu'à ce que le terme à calculer ne donne plus que des 0 pour les six premiers chiffres décimaux.

Nous ajouterons ensuite les nombres rationnels décimaux ainsi trouvés et nous vérifierons que la somme des diverses erreurs ainsi commises est moindre que $\frac{1}{10^4}$.

Nous avons d'abord successivement :

$$1 + \frac{2}{1} + \frac{2^2}{1.2} = 5{,}000\,000$$

$$\frac{2^3}{1.2.3} = \frac{4}{3} = 1{,}333\,333$$

$$\frac{2^4}{4!} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = 0{,}666\,666$$

$$\frac{2^5}{5!} = \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{3} = 0{,}266\,666$$

$$\frac{2^6}{6!} = \frac{2^5}{5!} \cdot \frac{1}{3} = 0{,}088\,888$$

$$\frac{2^7}{7!} = \frac{2^6}{6!} \cdot \frac{2}{7} = 0{,}025\,396$$

$$\frac{2^8}{8!} = \frac{2^7}{7!} \cdot \frac{1}{4} = 0{,}006\,349$$

$$\frac{2^9}{9!} = \frac{2^8}{8!} \cdot \frac{2}{9} = 0{,}001\,410$$

$$\frac{2^{10}}{10!} = \frac{2^9}{9!} \cdot \frac{1}{5} = 0{,}000\,282$$

$$\frac{2^{11}}{11!} = \frac{2^{10}}{10!} \cdot \frac{2}{11} = 0{,}000\,051$$

$$\frac{2^{12}}{12!} = \frac{2^{11}}{11!} \cdot \frac{1}{6} = 0{,}000\,008$$

$$\frac{2^{13}}{13!} = \frac{2^{12}}{12!} \cdot \frac{2}{13} = 0{,}000\,001$$

$$7{,}389\,050$$

En prenant $e^2 = 7{,}3890$, nous commettons trois espèces d'erreurs : d'abord l'erreur $\varepsilon_1 = \frac{50}{10^6}$ qui provient des deux derniers chiffres négligés dans la somme que nous venons d'effectuer; puis, sur 11 termes calculés approximativement, une erreur moindre pour chacun que $\frac{1}{10^6}$, ce qui fait une nouvelle erreur $\varepsilon_2 < \frac{11}{10^6}$; enfin, une troisième erreur égale au reste de la série

$$\varepsilon_3 = \frac{2^{14}}{14!} + \frac{2^{15}}{15!} + \cdots + \cdots$$

Si nous mettons, dans celui-ci, le dernier terme calculé en facteur, nous aurons

$$\varepsilon_3 = \frac{2^{13}}{13!}\left(\frac{2}{14} + \frac{2^2}{14.15} + \frac{2^3}{14.15.16} + \cdots\right);$$

puis $\varepsilon_3 < \frac{2^{13}}{13!}\left(\frac{2}{14} + \frac{2^2}{14^2} + \frac{2^3}{14^3} + \cdots\right)$, et par conséquent $\varepsilon_3 < \frac{2^{13}}{13!}\,\frac{1}{6}$.

Cette nouvelle erreur est moindre que $\frac{1}{10^6}$. Donc les trois erreurs, qui sont toutes par défaut, et, par suite, s'ajoutent, donnent ensemble une erreur par défaut moindre que $\frac{50 + 11 + 1}{10^6}$ ou, *a fortiori*, moindre que $\frac{100}{10^6} = \frac{1}{10^4}$.

Le nombre 7,3890 est donc bien la valeur approchée par défaut de e^2 à $\frac{1}{10^4}$ près.

M. GRANGIER, à Mouleydier.

Bonnes solutions de MM. Ambrand ; Ch. Brignon ; Crozr, à Clermont-Ferrand ; Dessimond : A. Ducos ; G. Foucry ; Garach ; Janois.

1404. 1° *Trouver une série* S *ordonnée suivant les puissances entières et positives d'une variable* x *et telle qu'on ait identiquement la relation :*

$$x(1+x)[2+(2-p)x]S'' + [(p^2-p-2)x^2-4x-2]S' + 2p(1+(2-p)x)S = 0,$$

S' *désignant la série des dérivées premières et* S'' *la série des dérivées secondes des termes de la série* S.

2° *Étudier les conditions de convergence des séries* S *ainsi obtenues.*

3° *Examiner en particulier les solutions qui s'annulent pour* $x = 0$.

4° *Qu'arrive-t-il si* p *est un nombre entier et positif ?*

N. B. — *Les candidats pourront commencer par traiter les cas les plus simples où* p *a l'une des valeurs* 1, 2, *ou* -1.

Posons

$$S = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

et appliquons la méthode des coefficients indéterminés au calcul des divers coefficients $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$: nous aurons successivement

$$S = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots,$$
$$S' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + (n+1)a_{n+1}x^n + \cdots,$$
$$S'' = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + \cdots + (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \cdots.$$

En portant ces trois séries dans l'équation différentielle donnée et annulant chaque coefficient, nous aurons une infinité d'égalités qui détermineront les coefficients en fonction de deux d'entre eux :

$$pa_0 - a_1 = 0,$$
$$p(2-p)a_0 + pa_1 - 2a_2 - 2a_1 + 2a_2 = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$2(n^2-1)a_{n+1} + (n-2)[4n-p(n+1)]a_n + (2-p)(n-3)(n-p-1)a_{n-1} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

La première égalité donne $a_1 = pa_0$; la seconde donne encore $a_1 = pa_0$, à moins que l'on n'ait $p = 2$, auquel cas elle disparaît entièrement; si nous faisons $n = 2$ dans l'égalité générale, elle devient

$$6a_3 = (p-1)(p-2)a_1,$$

et, par suite, nous avons

$$a_3 = \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}a_0.$$

Calculons encore a_4; pour cela faisons $n = 3$ dans l'égalité générale; nous aurons $4a_4 = (p-3)a_3$, et, par suite,

$$a_4 = \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3.4}a_0.$$

Nous allons montrer maintenant que, d'une manière générale, pour les autres valeurs de n, nous avons toujours

$$a_n = \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{n!}a_0.$$

A cet effet, nous admettrons la loi jusqu'à a_n et nous l'établirons ensuite pour a_{n+1}.

L'égalité générale nous donne alors

$$2(n^2-1)a_{n+1} = \frac{(n-2)(pn+p-4n)p(p-1)\ldots(p-n+1)}{n!}a_0$$
$$-(2-p)(n-3)(n-p-1)\frac{p(p-1)\ldots(p-n+2)}{(n-1)!}a_0,$$

ou

$$2(n^2-1)a_{n+1} = \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{n!}\, a_0\,[(n-2)(pn+p-4n) - n(n-3)(p-2)].$$

En supprimant les deux facteurs 2 et $n-1$, nous trouvons facilement

$$a_{n+1} = \frac{p(p-1)\ldots(p-n)}{(n+1)!}\, a_0.$$

La loi est donc générale.

La série S, si elle existe, est donc la série

$$a_0 + \frac{p}{1}\, a_0 x + a_2 x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}\, a_0 x^3 + \cdots + \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{n!}\, a_0 x^n + \cdots,$$

et nous voyons qu'elle ne diffère de la série du binome $a_0(1+x)^p$ que par le terme en x^2 ; elle est donc convergente pour les valeurs de x comprises entre -1 et $+1$, et seulement pour ces valeurs; nous sommes donc sûrs que dans cet intervalle l'équation différentielle linéaire proposée admet l'intégrale

$$S = \lambda x^2 + \mu(1+x)^p,$$

λ et μ étant des constantes arbitraires. Comme les deux fonctions x^2 et $(1+x)^p$ sont linéairement indépendantes, cette fonction S est la solution la plus générale de l'équation différentielle. Il est facile de vérifier directement qu'elle convient à cette équation dans tout autre intervalle, pourvu toutefois que $(1+x)^p$ existe dans cet intervalle.

Pour $x = 0$, $S = \mu$, la fonction ne peut s'annuler que si μ est nul et alors la solution envisagée se réduit à λx^2.

Si p est entier et positif, la solution se réduit à un polynome entier de degré p.

En traitant à part les cas particuliers où $p = 1$, $p = 2$, on trouve que les coefficients sont nuls à partir de a_3, et les calculs se simplifient considérablement.

J. R.

Nous avons tenu à donner d'abord une solution très simple de la question, conforme à la marche indiquée dans l'énoncé; mais il nous semble utile de publier en outre la solution suivante de nature toute différente:

Deuxième solution. — Je me propose d'intégrer, sans recourir aux séries, l'équation

$$x(1+x)[2+(2-p)x]S'' + (p^2-p-2)x^2 - 4x - 2)S' + 2p[1+(2-p)x]S = 0,$$

où S, S', S'' désignent une fonction de x et ses deux premières dérivées.

Les coefficients de S'', S', S étant trois polynomes entiers de degrés 3, 2, 1, il y a lieu d'essayer comme solution particulière un trinome du second degré ax^2+bx+c. En substituant ce trinome à S dans l'équation, on constate facilement que l'équation est identiquement vérifiée en prenant $b = c = 0$ et laissant arbitraire. L'équation admet donc la solution particulière $S_1 = x^2$.

Si donc nous écrivons l'équation sous la forme abrégée

(1) $$S'' + PS' + QS = 0,$$

nous avons l'identité

(2) $$S_1'' + PS_1' + QS_1 = 0.$$

En sorte que, d'après l'identité (2), l'équation (1) peut s'écrire

(3) $$S_1S'' - SS_1'' + P(S_1S' - SS_1') = 0.$$

Posons alors

(4) $$S_1S' - SS_1' = z,$$

l'équation (3) devient

$$z' + Pz = 0,$$

d'où l'on déduit

(5) $$z = Ce^{-\int P\,dx}$$

C étant une constante arbitraire.

Mais en divisant la relation (4) par S_1^2, on obtient

$$\left(\frac{S}{S_1}\right)' = \frac{z}{S_1^2}.$$

On en conclut

$$S = S_1\left[\int \frac{z\,dx}{S_1^2} + C'\right],$$

c'est-à-dire, d'après la relation (5),

$$S = S_1\left[C\int \frac{e^{-\int P dx}}{S_1^2}\,dx + C'\right].$$

Or on a

$$P = \frac{(p^2 - p - 2)x - 4x - 2}{x(1+x)[2+(2-p)x]} = -\frac{1}{x} - \frac{p-1}{1+x} - \frac{2-p}{2+(2-p)x}.$$

On en déduit

$$\int P dx = -Lx(1+x)^{p-1}[2+(2-p)x]$$

et, par suite,

$$\int \frac{e^{-\int P dx}}{S_1^2}\,dx = \int \frac{x(1+x)^{p-1}[2+(2-p)x]}{x^4}\,dx$$

$$= \int \frac{(1+x)^{p-1}[2(1+x) - px]}{x^3}\,dx$$

$$= 2\int \frac{(1+x)^p}{x^3}\,dx - p\int \frac{(1+x)^{p-1}}{x^2}\,dx.$$

Or on a

$$\int \frac{(1+x)^p}{x^3}\,dx = \int (1+x)^p d\left(\frac{x^{-2}}{-2}\right) = \frac{(1+x)^p}{-2x^2} - \int \frac{x^{-2}}{-2} p(1+x)^{p-1}dx$$

$$= \frac{(1+x)^p}{-2x^2} + \frac{p}{2}\int \frac{(1+x)^{p-1}}{x^2}\,dx.$$

On a donc

$$\int \frac{e^{-\int P dx}}{S_1^2}\,dx = \frac{(1+x)^p}{-x^2}$$

et finalement

$$S = x^2\left[\frac{C(1+x)^p}{-x^2} + C'\right] \qquad \text{ou} \qquad S = C_1x^2 + C_2(1+x)^p,$$

C_1 et C_2 étant des constantes arbitraires.

Remarque. — On peut aussi, après avoir observé que ax^2 (a étant une constante arbitraire) est une solution particulière, chercher à mettre l'intégrale générale sous la forme $S = ax^2$, a étant fonction de x. En désignant alors par a' et a'' les deux premières dérivées de a, et substituant $S = ax^2$ dans l'équation, on obtient

$$a''x^2 + 4a'x + 2a + P(a'x^2 + 2ax) + Qax^2 = 0$$

ou, puisque la proposée est vérifiée par $S = ax^2$, quand a est constant,

$$a''x^2 + 4a'x + Pa'x^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{a''}{a'} = -\left(\frac{4}{x} + P\right).$$

On en conclut, par une première intégration,

$$La' = -Lx^4 - \int P dx + LC,$$

C étant une constante arbitraire, ou, d'après un calcul fait ci-dessus,

$$La' = -Lx^4 + Lx(1+x)^{p-1}[2+(2-p)x] + LC,$$

d'où

$$a' = \frac{C(1+x)^{p-1}[2+(2-p)x]}{x^3}$$

et, par suite, en se reportant encore au calcul précédent,

$$a = C\left[\frac{(1+x)^p}{-x^2} + C'\right].$$

D'où enfin

$$S = ax^2 = Cx^2\left[\frac{(1+x)^p}{-x^2} + C'\right] = C_1x^2 + C_2(1+x)^p,$$

C_1 et C_2 étant des constantes arbitraires.

ETIENNE POMEY, ancien élève de l'École Polytechnique.

M. RICHARD, professeur au lycée de Dijon, nous a envoyé une solution semblable à celle qui est exposée dans cette remarque.

Même solution de M. G. FOUCRY, à Roanne

Bonne solution de M. GRANGIER, à Mouleydier.

Géométrie analytique.

1405. — *Étant donnés trois axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *on considère deux cônes* (S) *et* (T), *se coupant à angle droit suivant* Oz *et dont les sommets* S *et* T *sont situés sur la partie positive de* Oz, *de façon que* $OS = \gamma$, $OT = \gamma'(\gamma' > \gamma)$: *leurs bases dans le plan* Oxy *sont des circonférences dont les centres et les rayons sont* A *et* a *pour* (S) *et* B *et* b *pour* (T).

Les deux cônes ont ainsi en commun, outre l'axe Oz, *une courbe* (Γ).

1° *Former l'équation de la cubique* (C), *projection de* (Γ) *sur le plan* xOy, *et construire cette cubique.*

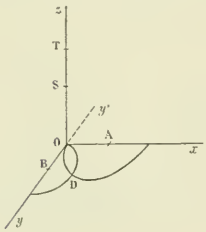
2° *Soit* PQ *une corde quelconque de* (Γ) (*obtenue, par exemple, en la considérant comme située sur une génératrice* (G) *d'un hyperboloïde passant par l'intersection complète des cônes* (S) *et* (T) ; *soit* pq *la projection de* PQ *sur le plan* xOy ; *cette projection rencontre la cubique* (C), *outre les points* p *et* q, *en un troisième point* m.

On demande le lieu de la droite PQ *dans les cas suivants :*

1° *Le point* m *est fixe.* — 2° *Les droites* Op *et* Oq *font des angles égaux avec* Ox. — 3° *La corde* pq *est vue de l'origine suivant un angle droit.*

Le cône de sommet S a pour équation

$$(1) \qquad \gamma(x^2 + y^2) + 2ax(z - \gamma) = 0;$$



le cône de sommet T a pour équation

$$(2) \qquad \gamma'(x^2 + y^2) + 2by(z - \gamma') = 0.$$

1. L'ensemble des deux équations (1) et (2) représente l'axe Oz et la cubique Γ. Eliminant z entre ces deux équations, on obtient l'équation de la cubique C, projection de Γ sur le plan des xy :

$$(3) \qquad (b\gamma y - a\gamma' x)(x^2 + y^2) + 2ab(\gamma' - \gamma)xy = 0.$$

C'est une cubique circulaire, présentant à l'origine un point double où les tangentes Ox, Oy sont rectangulaires. Cette cubique est donc une strophoïde. Pour la placer, supposons, pour fixer les idées, a et b positifs comme dans la figure. L'équation (3) ne peut être satisfaite si $y < 0$ et $x > 0$; la courbe C ne peut donc traverser l'angle xOy'. Déterminons l'asymptote correspondant à la direction asymptotique $b\gamma y - a\gamma' x = 0$. Il suffit de calculer h de manière que la droite

$$b\gamma y - a\gamma' x + h = 0$$

coupe la courbe en un point de plus au moins à l'infini, ce qui donne

$$h = \frac{2a^2b^2\gamma\gamma'(\gamma' - \gamma)}{a^2\gamma'^2 + b^2\gamma^2},$$

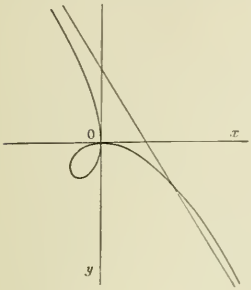
quantité positive ; et l'abscisse du point d'intersection de la courbe avec son asymptote est

$$x = \frac{h^2}{2a} \cdot \frac{a^2\gamma'^2 + b^2\gamma^2}{b^2\gamma(\gamma' - \gamma)(a^2\gamma'^2 - b^2\gamma^2)} = \frac{2a^3b^2\gamma\gamma'^2(\gamma' - \gamma)}{a^4\gamma'^4 - b^4\gamma^4}.$$

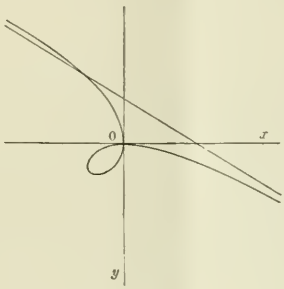
La courbe a donc l'une ou l'autre des dispositions ci-après, selon que $a\gamma' - b\gamma$ est positif ou négatif.

Remarque. — La solution géométrique de cette partie est immédiate. Toute cubique gauche se projette sur un plan suivant une cubique à point double (projection centrale ou oblique). Dans le cas actuel, la cubique gauche Γ contenant les points S et T, le point double de la projection sur le plan des xy est le point O. Les tangentes en ce point sont les traces des plans tangents aux cônes S et T suivant Oz, c'est-à-dire Ox et Oy. — La cubique Γ perce le plan des xy aux points communs aux deux cercles (A) et (B), sauf le point O.

Par suite C passe aux points cycliques et au point D, deuxième point d'intersection réel des cercles (A) et (B).



$a\gamma - b\gamma' > 0.$

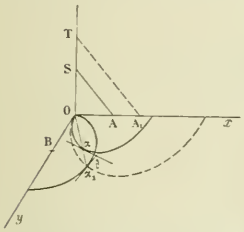


$a\gamma - b\gamma' < 0.$

La cubique C est donc une strophoïde.

Pour obtenir un point quelconque de Γ, on peut, par exemple, couper les deux cônes par un plan passant par Oz, ce qui donne dans chacun d'eux une génératrice autre que Oz et ces deux génératrices se coupent au point cherché.

Ce point est rejeté à l'infini si les deux génératrices sont parallèles. Pour obtenir leur direction dans ce cas, transportons le cône (S) parallèlement à lui-même de façon à lui donner le point T pour sommet ; la base (A) se transforme ainsi en un cercle (A_1), passant par O et ayant pour centre le point A_1 tel que



$$\frac{OA_1}{OA} = \frac{OT}{OS}.$$

Soit z_1 le point d'intersection autre que O des cercles (A_1) et B, z le point correspondant du cercle (A). Tz_1 est la direction asymptotique de la cubique gauche, Oz_1 celle de sa projection C.

L'asymptote correspondante de la cubique gauche est l'intersection des plans tangents aux cônes (S) et (T) le long des génératrices parallèles Sz, Tz_1.

Soit θ le point d'intersection des tangentes en z et z_1 aux bases de ces deux cônes ; c'est un point de l'asymptote de la cubique gauche. Quant à l'asymptote de la projection, elle s'obtient en menant par θ une parallèle à Oz_1.

2. Il résulte de ce qui précède que tout plan $y = tx$, passant par Oz, coupe la cubique Γ aux deux points S et T et en un troisième point variable dont les coordonnées, en fonction de t, s'obtiennent à l'aide des équations (1) et (3) par exemple. On trouve :

$$(4)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{2ab(\gamma - \gamma')t}{(b\gamma t - a\gamma')(t^2+1)}, \\[2ex] y = \dfrac{2ab(\gamma - \gamma')t^2}{(b\gamma t - a\gamma')(t^2+1)}. \end{cases}$$

$$(5)\qquad z = \gamma' \frac{bt - a}{b\gamma t - a\gamma'}.$$

Les deux premières équations, les équations (4), expriment en fonction du paramètre t les coordonnées d'un point quelconque m de la cubique C. Nous observerons que t est le coefficient angulaire de la droite Om dans le plan des xy.

Considérons l'une quelconque des quadriques passant par l'intersection complète des cônes (1) et (2). Elle a pour équation

$$(6)\qquad (\gamma + \lambda\gamma')(x^2 + y^2) + 2[ax(z - \gamma) + \lambda by(z - \gamma')] = 0,$$

ou encore

$$[x(\gamma + \lambda\gamma') + 2a(z - \gamma)]x = -[(\gamma + \lambda\gamma')y + 2\lambda b(z - \gamma')]y.$$

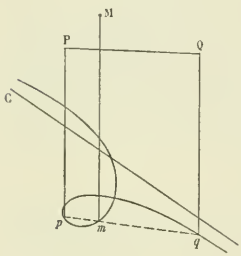
Les deux systèmes de génératrices de cette quadrique sont donnés par les équations

$$(7)\qquad \begin{cases} x = -\mu[(\gamma+\lambda\gamma')y + 2\lambda b(z-\gamma')], \\ y = \mu[(\gamma+\lambda\gamma')x + 2a(z-\gamma)]; \end{cases}$$

$$(8)\qquad \begin{cases} y = tx, \\ [(\gamma+\lambda\gamma')y + 2\lambda b(z-\gamma')]t + [x(\gamma+\lambda\gamma') + 2a(z-\gamma)] = 0. \end{cases}$$

Appelons *premier système* celui qui est représenté par les équations (7), *deuxième système*, celui qui correspond aux équations (8). Oz fait partie du premier système et correspond à $\mu = 0$. Toute génératrice du premier système rencontre la cubique Γ en deux points variables P et Q, tandis que toute génératrice du deuxième rencontre la cubique Γ en un point seulement. Inversement, λ et μ étant deux paramètres indépendants, les équations (7) représentent toutes les cordes PQ de la cubique Γ.

Proposons-nous de former l'équation aux t des points de rencontre de la corde PQ avec la cubique Γ. Pour cela, considérons le plan projetant PQ sur le plan des xy ; ce plan projetant est percé par la cubique en trois points, dont les points P et Q et un troisième M non situé sur la droite PQ. La trace de ce plan sur le plan des xy, c'est-à-dire la projection pq de la droite PQ, coupe donc la cubique C aux trois points p, q, m, projections des précédents. Cela posé, éliminant z entre les équations (7) on obtient l'équation du plan projetant :



$$\lambda by + ax = \mu(\gamma+\lambda\gamma')(\lambda bx - ay).$$

Puis substituant dans cette équation les valeurs (4), il vient, toutes réductions faites,

$$(\lambda bt + a)(\lambda\mu\gamma - \mu\gamma t^2 - t) = 0,$$

c'est-à-dire

$$(9)\qquad \lambda bt + a = 0,$$

$$(10)\qquad \mu\gamma . t^2 + t - \lambda\mu\gamma' = 0.$$

1° La deuxième de ces équations, l'équation (10), étant seule à dépendre à la fois des deux paramètres λ et μ, donne les t des deux points variables P et Q, tandis que l'équation (9) donne le t du point M. Par suite, λ restant constant, le point M reste fixe sur la cubique Γ, et comme la droite PQ rencontre la projetante Mm, pq passe constamment par un point fixe m. Inversement, si l'on astreint pq à couper la cubique C en un troisième point donné, fixe, m, correspondant à la valeur t_1 du paramètre t, l'équation (9) détermine pour λ une valeur fixe $\lambda = -\dfrac{a}{bt_1}$, et l'équation (10) donne ensuite les t des deux points variables P, Q. La corde PQ ne dépend alors que du paramètre arbitraire μ. Si l'on élimine μ entre les équations (7), on revient à l'équation (6). Donc enfin le lieu de PQ est représenté par l'équation (6) où l'on fait $\lambda = -\dfrac{a}{bt_1}$: c'est l'hyperboloïde du faisceau (6) qui admet la droite Mm comme génératrice du deuxième système.

Ce résultat est trop évident géométriquement pour qu'il y ait lieu d'en développer la démonstration.

2° Supposons maintenant que PQ soit astreinte à la condition que Op, Oq forment des angles égaux avec Ox. Les racines de l'équation (10) doivent alors avoir zéro pour somme, ce qui donne $\mu = \infty$. Les équations (7) deviennent

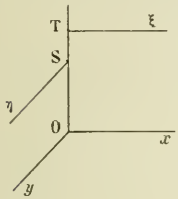
$$\gamma y + \lambda[\gamma' y + 2b(z-\gamma')] = 0,$$
$$\gamma x + 2a(z-\gamma) + \lambda\gamma' x = 0.$$

Éliminant λ entre ces deux équations, on obtient le lieu demandé :

$$\begin{vmatrix} \gamma y & \gamma' y + 2b(z-\gamma') \\ \gamma x + 2a(z-\gamma) & \gamma' x \end{vmatrix} = 0;$$

c'est un paraboloïde passant par la cubique Γ, mais ne passant pas par Oz. Son équation étant satisfaite quand on y fait $x = 0$, $z = \gamma$, il contient $S\eta$ parallèle à Oy menée par S; de même, si l'on fait $y = 0$, $z = \gamma'$; donc il contient aussi $T\xi$ parallèle à Ox menée par T.

Ces résultats étaient à prévoir géométriquement. En effet, soient p_1 et q_1 les traces de Op, Oq sur le cercle (A); $p_1 q_1$ doit être constamment parallèle à Oy, si Op, Oq sont symétriques par rapport à Ox. Mais les points P, Q étant sur le cône (S) se projettent du point S en p_1, q_1 sur le plan des xy. Il en résulte que le plan SPQ passe constamment par $S\eta$, parallèle à Oy. Le lieu de PQ est donc le lieu d'une droite variable rencontrant $S\eta$ et s'appuyant en deux points sur la cubique gauche Γ. On montrerait de même que cette droite rencontre constamment $T\xi$. Le lieu est une quadrique suffisamment définie par ces conditions. Nous reviendrons du reste sur ce point dans une remarque par laquelle nous terminerons le problème.



3° Supposons que la corde PQ se déplace de façon que Op, Oq soient rectangulaires. Le produit des racines de l'équation (10) doit alors être égal à -1, ce qui donne $\lambda = \frac{\gamma}{\gamma'}$, et le lieu de PQ est représenté dans ce cas par l'équation (6) où l'on fait $\lambda = \frac{\gamma}{\gamma'}$:

$$2\gamma\gamma'(x^2 + y^2) + 2a\gamma'(z - \gamma)x + 2b\gamma y(z - \gamma') = 0;$$

c'est un hyperboloïde du faisceau (6). Il contient la droite SA,

$$y = 0, \qquad \gamma x + a(z - \gamma) = 0,$$

et la droite TB,

$$x = 0, \qquad \gamma' y + b(z - \gamma') = 0.$$

Ces résultats se démontrent géométriquement comme au n° précédent : dans les conditions actuelles, la droite $p_1 q_1$ passe constamment au point A; et par suite, le plan SPQ contient constamment la droite SA.

4° Généralisons les résultats des deux paragraphes précédents.

Si l'on astreint les t des points p, q à vérifier une relation involutive de la forme

$$Att' + B(t + t') - C = 0,$$

l'équation (10) donne alors entre λ et μ la relation

$$A\lambda\mu\gamma' + B + C\mu\gamma = 0.$$

Et, en éliminant les paramètres λ, μ et μ entre les équations (7) et la relation précédente, on obtient le lieu de la corde PQ :

$$\begin{vmatrix} A\gamma' & C\gamma & B \\ \gamma' y + 2b(z - \gamma') & \gamma y & -x \\ \gamma' x & \gamma x + 2a(z - \gamma) & y \end{vmatrix} = 0;$$

c'est un hyperboloïde contenant la cubique Γ, mais ne contenant généralement pas Oz; car le terme indépendant de x et de y dans l'équation précédente est :

$$\begin{vmatrix} A\gamma' & C\gamma & B \\ 2b(z - \gamma') & 0 & 0 \\ 0 & 2a(z - \gamma) & 0 \end{vmatrix} = 4ab(z - \gamma)(z - \gamma').B.$$

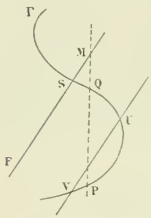
Pour qu'il soit nul quel que soit z, il faut et il suffit que B soit nul, auquel cas la relation involutive proposée se réduit à $tt' = c^{te}$.

Le n° précédent rentrait précisément dans ce cas.

Géométriquement, si Op, Oq engendrent deux faisceaux en involution, la droite $p_1 q_1$ passe par un

point fixe F, à distance finie ou infinie, et on voit comme précédemment que la corde PQ rencontre constamment la droite SF. Le lieu de cette corde est donc alors l'hyperboloïde défini par la cubique Γ et par la droite SF ; il contient également la droite TG analogue à SF, provenant du cône (T).

Remarque. — Nous ferons observer, comme nous l'avions annoncé, que la cubique Γ et une droite quelconque rencontrant cette cubique en l'un de ses points, S par exemple, suffisent à définir un hyperboloïde ; il faut entendre par là que cet hyperboloïde est le lieu des droites s'appuyant sur la cubique en deux points P et Q, et en un point M sur la droite.



En effet, soit SF cette droite. On sait qu'il existe une droite et une seule parallèle à SF et s'appuyant en deux points U et V sur la cubique. Considérons les deux cônes ayant pour sommets U et V et pour directrice commune la cubique Γ ; ils ont en commun Γ et la droite UV, et définissent un faisceau de quadriques parmi lesquelles il existe un hyperboloïde et un seul admettant, outre la génératrice UV, la génératrice parallèle SF. Les génératrices de cet hyperboloïde qui sont de même système que UV rencontrent toutes la cubique Γ en deux points et la génératrice SF en un point. Cet hyperboloïde est donc le lieu des cordes PQ considérées.

J. R.

Remarque de M. J. Richard, professeur au lycée de Dijon.

La question posée revenait à la suivante, d'un caractère plus général :

Les coordonnées d'un point d'une cubique gauche étant exprimées en fonction d'un paramètre t, on considère deux points t',t'' dont les paramètres ont entre eux une relation d'involution ; trouver la surface engendrée par la droite joignant ces points.

On sait que si l'on a les coordonnées x, y, z en fonction de t, on peut inversement trouver t^3, t^2 et t en fonction de x, y, z et écrire

$$P = St^3, \qquad Q = St^2, \qquad R = St,$$

P, Q, R, S étant quatre fonctions de x, y, z, du premier degré et indépendantes.

On trouve sans peine les équations de la droite joignant deux points t', t''; ces équations sont

$$St't'' - R(t' + t'') + Q = 0,$$
$$Rt't'' - Q(t' + t'') + P = 0.$$

On le vérifie du reste de suite en cherchant l'intersection de chacun de ces deux plans avec la cubique : On trouve deux équations du second degré en t, dont les racines sont t' et t''.

Si l'on a entre t' et t'' une relation d'involution

$$\alpha t't'' - \beta(t' + t'') + \gamma = 0,$$

on obtient la surface engendrée par la corde correspondante de la cubique en éliminant t' et t''. On trouve

$$\begin{vmatrix} S & R & Q \\ R & Q & P \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0,$$

équation d'une surface du second degré contenant la cubique.

Même solution de M. G. Dulimbert à Grenoble.
Bonne solution de M. Grangier, à Mouleydier.

Physique.

1406. — *Un fragment de métal, dont le coefficient de dilatation linéaire est α, plongé dans le mercure, éprouve une poussée p à 0° et p' à 60°.*

Exprimer le coefficient de dilatation absolue du mercure en fonction de α, p et p'. Calculer ce coefficient quand $p = 50^{gr}$, $p' = 49^{gr},5415$, $\alpha = 857 \times 10^{-8}$.

On admettra pour la densité du mercure à 0°, 13,6.

Désignons par V le volume du fragment de métal à 0° et par x le coefficient de dilatation absolue du mercure. D'après le principe d'Archimède, la poussée éprouvée par le métal est égale au poids du liquide déplacé. Nous avons donc

$$p = V \times 13{,}6.$$

A 60°, le volume du fragment de métal est devenu $V(1 + 60 \times 3\alpha)$. On sait, en effet, que le coefficient de dilatation cubique d'un solide est sensiblement égal au triple de son coefficient de dilatation linéaire ; dans le cas du problème actuel, l'erreur est moindre qu'une unité du 8e ordre décimal. D'autre part, la densité du mercure est devenue $\frac{13{,}6}{1 + 60 \times x}$. On a donc

$$p' = V(1 + 180\alpha) \times \frac{13{,}6}{1 + 60x}.$$

En remplaçant $V \times 13{,}6$ par sa valeur p, nous obtenons

$$p' = p\,\frac{1 + 180\alpha}{1 + 60x}$$

et, pour x, la valeur

$$x = \frac{p(1 + 180\alpha - p')}{60p'} = 0{,}0001802.$$

Remarque. — La donnée 13,6 était inutile.

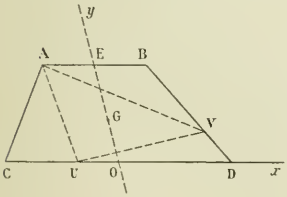
F. CROZE, à Clermont-Ferrand.

MÉCANIQUE

1397. — ABCD *étant un trapèze dans lequel le sens* CD *de la grande base est le même que le sens* AB *de la petite, et* CD = nAB, *si l'on prend sur* CD *et* DB *les points* U *et* V *tels que* UD = nCU *et* VB = nDV, *le centre de gravité du triangle* AUV *se confond avec celui du trapèze.*

Première solution. — Prenons pour axe des x CD et pour axe des y la droite qui joint les milieux des deux bases. Posons AB = $2a$, CD = $2na$, OE = b.

Le centre de gravité G du trapèze est sur la droite OE, et on a la relation



$$\frac{\overline{GE}}{\overline{OG}} = \frac{\frac{AB}{2} + CD}{\frac{CD}{2} + AB} = \frac{AB + 2nAB}{nAB + 2AB},$$

ou

$$\frac{\overline{GE}}{\overline{OG}} = \frac{2n + 1}{n + 2}.$$

On en tire

$$\frac{\overline{OG}}{n + 2} = \frac{\overline{GE}}{2n + 1} = \frac{\overline{OE}}{3(n + 1)} = \frac{b}{3(n + 1)};$$

par suite les coordonnées du point G sont

$$x = 0, \qquad y = \frac{b(n + 2)}{3(n + 1)}.$$

Calculons les coordonnées des points A, U, V.

Les coordonnées du point A sont

$$x_1 = -a, \qquad y_1 = b.$$

Le point U est sur la droite CD, et l'on a

$$\frac{\overline{UD}}{\overline{UC}} = -n;$$

comme les abscisses des points D et C sont respectivement na et $-na$, l'abscisse du point U est $\frac{na - n^2a}{1+n}$, et par suite les coordonnées du point U sont

$$x_2 = \frac{na(1-n)}{1+n}, \qquad y_2 = 0.$$

Enfin, le point V de la droite BD est déterminé par la relation

$$\frac{\overline{VB}}{\overline{VD}} = -n;$$

les coordonnées des points B et D sont respectivement (a, b) et $(na, 0)$; par suite celles du point V sont

$$x_3 = \frac{a(1+n^2)}{1+n}, \qquad y_3 = \frac{b}{1+n}.$$

Il en résulte que les coordonnées du centre de gravité du triangle AUV sont

$$X = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{1}{3}\left[-a + \frac{na(1-n)}{1+n} + \frac{a(1+n^2)}{1+n}\right] = 0,$$

$$Y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = \frac{1}{3}\left[b + \frac{b}{1+n}\right] = \frac{b(n+2)}{3(1+n)}.$$

Ce point coïncide donc avec le point G, ce qui démontre la proposition.

G. COTTY, lycée de Dijon.

Deuxième solution. — Appliquons aux points A, U, V des poids égaux à $n+1$; le centre de gravité de l'ensemble de ces poids coïncide avec le centre de gravité du triangle AUV.

Comme on a $UD = nCU$, le poids appliqué en U se décompose en un poids égal à n appliqué en C et un poids égal à 1 appliqué en D; de même, à cause de l'égalité $VB = nDV$, le poids appliqué en V se décompose en un poids égal à n appliqué en D et en un poids égal à 1 appliqué au point B.

On peut alors considérer le système comme constitué par un premier ensemble de trois poids égaux à n appliqués aux points A, C, D et par un deuxième ensemble de poids égaux à 1 appliqués aux points A, B, D.

Le premier ensemble peut se remplacer par un poids unique, égal à $3n$, appliqué au centre de gravité G_1 du triangle ACD, et le deuxième par un poids égal à 3 appliqué au centre de gravité G_2 du triangle ABD.

Ces deux poids se composent en un seul appliqué en un point G de la droite G_1G_2 et tel que l'on ait

$$\frac{GG_1}{G_2G} = \frac{3}{3n}.$$

Le point G ainsi obtenu est le centre de gravité du triangle AUV.

Mais on peut écrire

$$\frac{GG_1}{G_2G} = \frac{1}{n} = \frac{AB}{CD} = \frac{\text{aire ABD}}{\text{aire ACD}},$$

et cette égalité montre que le point G est le centre de gravité du trapèze.

Solutions analytiques par MM. Dediu, école d'artillerie et de génie, à Bucarest; Dessimond, à Alger; M. Grangier, à Mouleydier.

CONCOURS DE 1905 (*Suite.*)

CERTIFICAT D'ÉTUDES SUPÉRIEURES (*Caen, juillet 1905.*)

Éléments généraux de mathématiques

Composition écrite.

I. — **1478.** Sur une sphère donnée, on considère un grand cercle (C), de pôles A, A'; puis à chaque point M de la surface sphérique on fait correspondre : 1° sa projection P sur le plan du cercle (C); 2° l'intersection Q de ce cercle avec le demi-grand cercle AMA'. Déterminer les courbes sur lesquelles doit se mouvoir M pour que les arcs décrits par les points P et Q soient égaux. Trajectoires orthogonales de ces courbes. Rectification de l'une des trajectoires.

II — **1479.** On donne deux cercles (C), (C') de rayons R et 1/2 R, situés dans des plans parallèles et ayant leurs centres sur une perpendiculaire à ces plans. Un point M, de masse 1, assujetti à se mouvoir sur (C) et un point M', de même masse, assujetti à se mouvoir sur (C'), s'attirent mutuellement avec une force egale à $\mu^2 MM'$. Déterminer le mouvement des deux points en supposant nulles leurs vitesses initiales ; durée des très petites oscillations.

Épreuve pratique.

I. — En un point M de l'hémisphère boréal, on observe une étoile circompolaire S et on constate qu'aux heures sidérales t, t', elle passe dans un même vertical ZSZ' avec des hauteurs h, h' au-dessus de l'horizon. Calculer l'azimut α du vertical ZSZ', la latitude du point M, la déclinaison de l'étoile. — Application numérique.

QUESTIONS PROPOSÉES

1480. — 1° On considère la série entière en x

$$1 + 2x + \cdots + (n^2 + 1)x^n + \cdots$$

Pour quelles valeurs de x cette série est-elle convergente ou divergente?

2° Montrer qu'entre les coefficients de quatre termes consécutifs quelconques il existe une relation linéaire et homogène à coefficients constants.

3° La série étant supposée convergente, calculer sa somme et l'erreur commise quand on s'arrête au terme en x^n. — Calculer à $\frac{1}{1000}$ près la valeur numérique que prend cette somme pour $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

4° Plus généralement, on considère la série entière en x la plus générale telle qu'entre les coefficients de quatre termes consécutifs quelconques il existe la relation linéaire et homogène trouvée au deuxième paragraphe. Déterminer l'expression du terme général de cette série.

5° Montrer que la somme de cette série, supposée convergente, constitue l'intégrale générale, supposée développable en série entière, d'une certaine équation linéaire du troisième ordre que l'on demande de former.

CH. MICHEL.

1481. — On considère un paraboloïde π.

1° Par un point M, on peut mener un plan P et un seul qui coupe le paraboloïde π suivant une conique C admettant le point M pour centre.

2° Si le point M décrit une droite, le plan P reste tangent à un cylindre parabolique et, dans un cas particulier, passe par une droite fixe.

3° Si le point M décrit une conique dont les points à l'infini sont sur le paraboloïde π, le plan P reste tangent à un cône du second degré.

4° La conique C de section par le plan P étant supposée semblable ou égale à une conique donnée, on demande le lieu de son centre M.

TH. L.

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1399. — *Soient* OA *et* OB *deux diamètres rectangulaires fixes d'un cercle* O, A *et* B *deux de leurs extrémités. On considère deux cercles tangents au précédent en* A *et en* B *et tangents entre eux en* M. *Trouver le lieu du point* M.

Solution analytique. — Prenons OA pour axe des x et OB pour axe des y; désignons par R le rayon du cercle O.

Soit a l'abscisse du centre d'un cercle O_1 tangent en A au cercle O; le rayon de ce cercle est égal à $|R - a|$, et l'équation de ce cercle est alors

$$(x-a)^2 + y^2 - (R-a)^2 = 0$$

ou (1)
$$x^2 + y^2 - R^2 - 2a(x - R) = 0.$$

De même, désignons par b l'ordonnée d'un cercle O_2 tangent en B au cercle O et ayant pour rayon $|R - b|$; l'équation de ce cercle est

(2)
$$x^2 + y^2 - R^2 - 2b(y - R) = 0.$$

Pour exprimer que les deux cercles O_1 et O_2 sont tangents, il suffit d'écrire que l'un de leurs points communs est situé sur la droite qui joint les centres

(3)
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0.$$

Nous aurons donc l'équation du lieu du point de contact en éliminant a et b entre les équations (1), (2) et (3).

Les deux premières nous donnent

$$a = \frac{x^2 + y^2 - R^2}{2(x - R)}, \qquad b = \frac{x^2 + y^2 - R^2}{2(y - R)},$$

et, en portant ces valeurs dans la relation (3), nous avons

$$\frac{2x(x - R) + 2y(y - R)}{x^2 + y^2 - R^2} - 1 = 0,$$

ou
$$x^2 + y^2 - 2Rx - 2Ry + R^2 = 0,$$

ou encore
$$(x - R)^2 + (y - R)^2 - R^2 = 0.$$

Cette équation représente le cercle qui est tangent en A et B aux droites OA et OB.

JULES YERNAUX, école des Mines, à Mons.

Solution géométrique. — Soit M le point de contact des deux cercles O_1 et O_2, tangents au cercle O respectivement aux points O_1 et O_2, et soit C le quatrième sommet du rectangle construit sur OA et OB.

Les axes radicaux des cercles O, O_1, O_2, pris deux à deux, passent par un même point; il en résulte que

la tangente commune en M aux cercles O_1 et O_2 passe par le point C. On a donc

$$CM = CA = CB = R;$$

par suite le lieu du point M est le cercle qui a pour centre le point C et pour rayon R.

JULES VERNAUX.

Bonnes solutions par MM. G. COTTY, lycée de Dijon : Henri CHANDÈZE, lycée d'Alger; DARMON, lycée d'Alger ; DESSIMOND, à Alger ; G. FOUCRY à Roanne ; H. JANOIS, à Nantes : R. JAVELOT, à Lille ; A. SAINTE-LAGÜE : N. K ; PRÉVOT, lycée de Reims.

1411. — *Étant donnés deux axes Ox, Oy faisant entre eux l'angle θ, on marque sur Ox un point fixe A, d'abscisse a.*

Il y a une infinité d'hyperboles équilatères tangentes à l'axe Ox en ce point et rencontrant l'axe Oy en deux points dont le produit des ordonnées est constant et égal à b^2.

1° *Démontrez que l'équation générale de ces hyperboles est*

$$x^2 + 2mxy + \frac{a^2}{b^2}y^2 - 2ax + 2\lambda y + a^2 = 0,$$

m étant égal à $\dfrac{a^2+b^2}{2b^2\cos\theta}$.

2° *Montrez que ces hyperboles ont mêmes directions asymptotiques.*

3° *Déterminer le lieu de leurs centres.*

4° *Ce lieu est une droite : déterminer l'angle θ de manière que cette droite soit perpendiculaire à l'axe Ox. Ce problème est-il toujours possible ?*

(*École militaire de Belgique, concours de 1905.*)

1. L'équation générale des coniques tangentes à l'axe des x au point A est

$$(x-a)^2 + Cy^2 + 2mxy + 2\lambda y = 0.$$

Les ordonnées des points de rencontre de cette conique et de l'axe Oy sont racines de l'équation

$$Cy^2 + 2\lambda y + a^2 = 0;$$

pour que le produit des racines soit égal à b^2, il faut qu'on ait $\dfrac{a^2}{C} = b^2$ ou $C = \dfrac{a^2}{b^2}$.

D'autre part, écrivons que la conique est une hyperbole équilatère; nous avons

$$1 + C - 2m\cos\theta = 0,$$

ou

$$1 + \frac{a^2}{b^2} - 2m\cos\theta = 0.$$

Nous en tirons

$$m = \frac{a^2+b^2}{2b^2\cos\theta},$$

et par suite l'équation générale des coniques considérées est

$$(x-a)^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2 + 2mxy + 2\lambda y = 0,$$

ou

$$f(x, y) \equiv x^2 + 2mxy + \frac{a^2}{b^2}y^2 - 2ax + 2\lambda y + a^2 = 0,$$

m étant égal à $\dfrac{a^2+b^2}{2b^2\cos\theta}$.

Elle renferme un paramètre variable λ.

2. Les directions asymptotiques sont définies par l'équation

$$x^2 + 2mxy + \frac{a^2}{b^2}y^2 = 0,$$

elles sont indépendantes de λ, donc elles sont fixes.

3. Les coordonnées du centre sont les solutions des équations,

$$\frac{1}{2}f'_x \equiv x + my - a = 0, \qquad \frac{1}{2}f'_y \equiv mx + \frac{a^2}{b^2}y + \lambda = 0;$$

la première ne contient pas λ, par suite le lieu du centre est la droite

$$x + my - a = 0,$$

qui passe par le point A.

4. Pour que cette droite soit perpendiculaire à Ox, il faut que $m = \cos\theta$, ou

$$\frac{a^2 + b^2}{2b^2\cos\theta} = \cos\theta,$$

ce qui donne

$$\cos^2\theta = \frac{a^2 + b^2}{2b^2}.$$

Pour que le problème soit possible, il faut qu'on ait

$$\frac{a^2 + b^2}{2b^2} < 1,$$

ou

$$a^2 < b^2.$$

A. DUCOS, lycée Carnot.

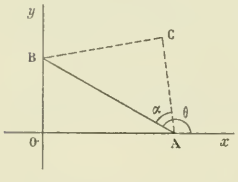
Bonnes solutions par MM. Baos, à Albi ; A. Dedieu ; G. Foucry, à Roanne ; H. Janois, à Nantes ; G. Pélissier, à Toulouse ; A. de Ste Lagüe.

1412. — *Une tangente variable à une hyperbole équilatère rencontre les asymptotes en* A *et* B. *On construit sur* AB *comme côté un polygone régulier de* n *côtés. Trouver les lieux décrits par les sommets de ce polygone.*

Nous traiterons un problème plus général en cherchant le lieu du point C tel que le triangle ABC soit semblable à un triangle donné.

Pour déterminer le point C par rapport aux points A et B, nous poserons

$$AC = m.AB, \qquad \text{angle } (AC, AB) = \alpha.$$



Prenons pour axes de coordonnées les asymptotes de l'hyperbole. On sait que le produit OA.OB est constant ; nous écrirons

$$OA.OB = a^2.$$

Soit θ l'angle de Ox avec AB et λ l'abscisse du point A. Dans le triangle rectangle OAB nous avons

$$OB = -OA\,\mathrm{tg}\,\theta = -\lambda\,\mathrm{tg}\,\theta,$$

$$AB = -\frac{OA}{\cos\theta} = -\frac{\lambda}{\cos\theta}.$$

On en déduit $AC = m.AB = -\dfrac{m\lambda}{\cos\theta}$, et comme les cosinus directeurs de AC sont $\cos(\theta - \alpha)$ et $\sin(\theta - \alpha)$, les coordonnées du point C sont

$$x = \lambda - \frac{m\lambda\cos(\theta - \alpha)}{\cos\theta} = \lambda - m\lambda(\cos\alpha + \sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\theta),$$

$$y = -\frac{m\lambda\sin(\theta - \alpha)}{\cos\theta} = -m\lambda(\mathrm{tg}\,\theta\cos\alpha - \sin\alpha).$$

Mais nous avons $OB = -\lambda \operatorname{tg} \theta$, et par suite

$$a^2 = OA.OB = -\lambda^2 \operatorname{tg} \theta$$

ou $\operatorname{tg} \theta = -\frac{a^2}{\lambda^2}$. Remplaçons $\operatorname{tg} \theta$ par cette valeur dans les équations précédentes ; nous obtenons

$$x = \lambda(1 - m \cos \alpha) + \frac{a^2 m \sin \alpha}{\lambda},$$

$$y = m\lambda \sin \alpha + \frac{a^2 m \cos \alpha}{\lambda},$$

et pour avoir le lieu du point C, il suffit d'éliminer λ entre ces deux équations.

Pour cela nous pouvons les considérer comme des équations linéaires par rapport à λ et $\frac{1}{\lambda}$, et en les résolvant, nous avons

$$\lambda = \frac{x \cos \alpha - y \sin \alpha}{\cos \alpha - m}, \qquad \frac{1}{\lambda} = \frac{-mx \sin \alpha + y(1 - m \cos \alpha)}{ma^2(\cos \alpha - m)},$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$(x \cos \alpha - y \sin \alpha)[-mx \sin \alpha + y(1 - m \cos \alpha)] = ma^2(\cos \alpha - m)^2.$$

Ce lieu représente une hyperbole ayant pour centre l'origine et dont les asymptotes ont pour équations

$$x \cos \alpha - y \sin \alpha = 0,$$
$$-mx \sin \alpha + y(1 - m \cos \alpha) = 0.$$

Cette hyperbole se réduit à deux droites si l'on a $m = \cos \alpha$, et ces deux droites sont confondues suivant la droite

$$x \cos \alpha - y \sin \alpha = 0.$$

Dans ce cas, le lieu est une droite passant par l'origine.

Ce résultat pouvait se prévoir. En effet, si l'on a $m = \cos \alpha$, on en déduit $AC = AB \cos \alpha$; le triangle ABC est rectangle en C, le quadrilatère OACB est inscriptible, et l'angle BOC est égal à l'angle BAC ou à α. L'angle BOC étant constant, le lieu du point C est la droite OC.

MÉCANIQUE

1413. — *On considère deux axes rectangulaires Ox, Oy et un point M sollicité par une accélération parallèle à Oy et ayant pour valeur $-g (g > 0)$. On lance ce point dans le plan des xy, en O, avec une vitesse v_0 constante en grandeur et variable en direction. Trouver le lieu géométrique des points du plan que l'on peut atteindre avec une vitesse parallèle à $y = mx$.*

Les équations du mouvement du point M sont :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -g.$$

En désignant par α l'angle de la vitesse initiale avec Ox et intégrant une première fois, il vient

$$x' = v_0 \cos \alpha, \qquad y' = -gt + v_0 \sin \alpha;$$

puis, en intégrant une seconde fois,

$$x = v_0 t \cos \alpha, \qquad y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin \alpha.$$

L'élimination de t entre les deux équations précédentes donne l'équation cartésienne de la trajectoire du point M ; c'est la parabole

$$(1) \qquad y = -\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + x \operatorname{tg} \alpha.$$

Le lieu des points du plan que l'on peut atteindre avec une vitesse parallèle à $y - mx = 0$ s'obtient en éliminant α entre l'équation (1) et l'équation du diamètre conjugué de la direction $y - mx = 0$,

$$(2) \qquad \frac{gx}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + m - \operatorname{tg} \alpha = 0.$$

En posant $\operatorname{tg} \alpha = \lambda$, les équations (1) et (2) s'écrivent

$$\frac{gx^2}{2v_0^2} \cdot \lambda^2 - \lambda x + \frac{gx^2}{2v_0^2} + y = 0,$$

$$\frac{gx}{v_0^2} \lambda^2 - \lambda + \frac{gx}{v_0^2} + m = 0.$$

L'élimination de λ entre ces deux équations donne le lieu cherché ; c'est l'ellipse

$$g(mx - 2y)^2 - 2v_0^2\left(y - mx - \frac{gx^2}{2v_0^2}\right) = 0.$$

Elle passe à l'origine et admet comme tangente en ce point la droite $y - mx = 0$

Elle est bitangente à la parabole

$$\frac{gx^2}{2v_0^2} + mx - y = 0$$

et la corde des contacts est la droite $y - \frac{mx}{2} = 0$.

BROS, à Albi.

Bonnes solutions : MM. A. Dediu, à Bucarest ; G. Foucry, à Roanne ; M. Grangier, à Mouleydier ; H. Janois, à Nantes ; G. Pélissier, à Toulouse.

QUESTIONS PROPOSÉES

1482. — On considère un plan horizontal, (H), et un point lumineux, O, dans ce plan. Au-dessus de (H) s'étend un milieu réfringent dont l'indice de réfraction est fonction de la distance y au plan (H).

1° Former l'équation différentielle de la trajectoire d'un rayon lumineux quelconque, émané de O.

2° Intégrer cette équation dans les deux cas suivants :

$n = \frac{2ab}{y+b}$, l'incidence initiale étant $\frac{\pi}{6}$;

$n = a\sqrt{\frac{2b}{y+b}}$, l'incidence initiale étant $\frac{\pi}{4}$. Dans les deux cas, a et b désignent des constantes positives données.

A. Ducos, lycée Carnot.

1483. — On considère deux cercles fixes (C) et (C') ; par un point A du cercle (C), on mène une tangente à ce cercle qui rencontre le cercle (C') en deux points B et C et par chacun des points B et C on mène la seconde tangente au cercle (C). Trouver le lieu du point de rencontre M de ces deux droites.

1484. — Pour déterminer l'indice d'une lentille plan-convexe, on procède aux opérations suivantes :

1° On mesure le rayon de courbure de la face convexe à l'aide d'un sphéromètre. Le déplacement de la vis affleurant successivement la lentille et le plan de l'instrument est trouvé égal à $10^{mm},024$ avec une incertitude de $0^{mm},005$. Le rayon du cercle passant par les trois pieds est de $56^{mm},3$, avec une incertitude de $0^{mm},15$.

2° On mesure l'épaisseur de la lentille ; on trouve 20^{mm} avec une erreur possible de $0^{mm},25$.

3° On argente la face convexe, puis, observant du côté de la face plane, on détermine la position du centre du miroir concave équivalent à la lentille ; on trouve ce point à 95^{mm} de la face plane, avec une erreur possible de 1^{mm}.

Calculer l'indice, ainsi que l'erreur qui pourrait affecter la mesure ainsi faite.

Erratum : Une erreur s'est glissée dans le tracé de la courbe de la page 431 : la portion pointillée doit être symétrique de celle qui est en trait plein *par rapport à Ox et non par rapport à Oy.*

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

16e Année. N° 7. Avril 1906.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

NOTE SUR LES CUBIQUES CIRCULAIRES

par M. **M. Rougié**, à Gramat (Lot).

On connaît la proposition suivante :

Si par deux points fixes p et q d'une cubique circulaire, on fait passer un cercle variable qui rencontre la cubique en deux autres points a et b, la corde commune ab passe par un point fixe c situé sur la cubique.

En effet, considérons un cercle quelconque ; il rencontre la cubique en six points, dont deux sont aux points cycliques ; il rencontre donc la cubique en quatre autres points, p, q, a et b. Soient r le point de rencontre de la cubique avec pq et c le point de rencontre avec ab. La cubique formée par les trois droites pq, ab et la droite de l'infini rencontre la cubique proposée aux neuf points p, q, r, a, b, c, I, J et α, α étant le point réel à l'infini ; toute cubique passant par huit de ces points passera par le neuvième ; en particulier, la cubique formée par le cercle et la droite rc. La droite rc passe donc au point α ; elle est parallèle à l'asymptote, et le point c est fixe comme le point r (*fig.* 1).

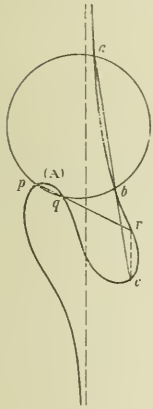


Fig. 1.

Première conséquence. — *Si par un point c d'une cubique circulaire, on mène une sécante variable cab, on peut mener par ab un cercle tangent à la cubique et le point de contact A avec la cubique reste fixe quand la sécante tourne autour du point c.*

Pour obtenir A, on mène cr parallèle à l'asymptote et, par le point de rencontre r avec la cubique, on mène une tangente à cette cubique. Le point r est le tangentiel du point A.

Deuxième conséquence. — *Lorsque la cubique circulaire a un point double en O, le cercle abO reste tangent à une droite fixe en O (fig. 2).*

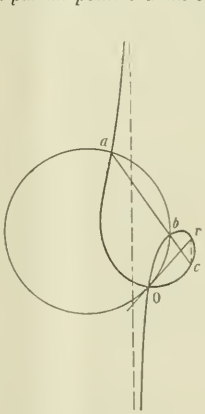


Fig. 2.

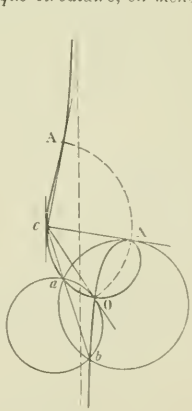


Fig. 3.

La tangente fixe est Or, r étant trouvé comme précédemment.

Il est facile d'en déduire la propriété d'anallagmatie des cubiques circulaires : si r et c se confondent, c'est-à-dire si la droite rc est une tangente parallèle à l'asymptote, on a $ca.cb = \overline{cA}^2$, ce qui montre que la cubique est sa propre inverse par rapport au pôle c.

Dans le cas d'un point double O, on a $ca.eb = \overline{CO}^2 = \overline{CA}^2$ et les points A qui admettent le point c pour tangentiel sont à l'intersection de la cubique avec le cercle de centre c et de rayon cO (*fig.* 3).

Quand la cubique n'a pas de point double, il y a quatre tangentes parallèles à l'asymptote et quatre pôles d'anallagmatie. Si la cubique a un point double, il n'y en a que deux.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET BOURSES DE LICENCE (*Concours de* 1905.)

GROUPE I

Mathématiques.

1414. — *On considère les trois surfaces du second degré définies par les équations*

$$y = x^2, \qquad z = xy, \qquad zx = y^2.$$

1° *Soit* M *le point d'intersection des plans polaires d'un point* M_0 *par rapport à ces trois surfaces : on demande d'exprimer les coordonnées* x, y, z *du point* M *au moyen des coordonnées* x_0, y_0, z_0 *du point* M_0 *et, inversement,* x_0, y_0, z_0 *au moyen de* x, y, z.

2° *Vérifier, sur les formules, que le point* M *n'est pas déterminé quand le point* M_0 *se trouve sur la courbe* (C) *définie par les équations*

$$y = x^2, \qquad z = x^3.$$

Où se trouve alors le point M ?

3° *Pour que le point* M_0 *soit dans le plan des* xy, *il faut que le point* M *soit sur une surface* (S) *du troisième degré. Vérifier que cette surface contient la courbe* (C) *et qu'elle est réglée. Quel est le lieu du point* M_0 *quand le point* M *décrit une génératrice rectiligne de la surface ?*

4° *Quel est, sur la surface* (S), *le lieu des points* M *tels que le point* M_0 *soit rejeté à l'infini dans le plan des* xy ?

5° *Le point* M *est supposé se mouvoir sur la surface* (S), *de telle façon qu'il soit, à chaque instant* t, *sur la génératrice définie par les équations*

$$y = tz, \qquad x = \frac{2}{3}t^2z + \frac{1}{3t}$$

et que son accélération soit située dans le plan tangent en M *à la surface. Montrer que la coordonnée* z *vérifie l'équation*

$$t\frac{d\frac{1}{z}}{dt} - \frac{1}{z} - 2t^3 = 0.$$

Intégrer cette équation et exprimer les trois coordonnées en fonction du temps. Vérifier que la courbe (C) *est l'une des trajectoires possibles.*

Il est d'abord évident que les trois surfaces données contiennent la courbe

$$(C) \qquad y = x^2, \qquad z = x^3,$$

qui est une cubique gauche, osculatrice au plan de l'infini et qui passe à l'origine des coordonnées.

1. Les trois plans polaires du point M_0 par rapport aux surfaces données ont respectivement pour équations

$$2x_0x - y - y_0 = 0,$$
$$y_0x + x_0y - z - z_0 = 0,$$
$$z_0x - 2y_0y + x_0z = 0.$$

Si on multiplie la seconde par x_0 et qu'on l'ajoute à la troisième, z disparaît et on obtient une nouvelle équation qui ne contient que x et y; x et y se calculent alors aisément, z s'en suit, et on obtient finalement :

$$(1)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{y_0x_0^2 - 2y_0^2 + z_0x_0}{2x_0^3 - 3x_0y_0 + z_0}, \\[2ex] y = \dfrac{2x_0^2z_0 - y_0^2x_0 - y_0z_0}{2x_0^3 - 3x_0y_0 + z_0}, \\[2ex] z = \dfrac{3x_0y_0z_0 - 2y_0^3 - z_0^2}{2x_0^3 - 3x_0y_0 + z_0}. \end{cases}$$

La parfaite symétrie qui existe entre les coordonnées des points M et M_0, dans les équations des plans polaires du point M_0, nous apprend que les coordonnées du point M_0 s'expriment de la même façon à l'aide des coordonnées du point M ; elles se déduisent donc des formules (1) en échangeant les deux groupes de lettres x, y, z et x_0, y_0, z_0.

2. Si dans les formules (1) nous remplaçons y_0 par x_0^2 et z_0 par x_0^3, nous obtenons des expressions de la forme $\frac{0}{0}$; ceci indique que les nombres x, y, z sont indéterminés. Il est d'ailleurs facile de s'en assurer en effectuant la substitution indiquée dans les équations des plans polaires ; celles-ci deviennent, en effet :

$$2x_0x - y - x_0^2 = 0,$$
$$x_0^2x + x_0y - z - x_0^3 = 0,$$
$$x_0^3x - 2x_0^2y + x_0z = 0,$$

et leurs premiers membres sont reliés par la relation identique

$$x_0^2P - x_0Q - R \equiv 0,$$

qui montre que les trois plans polaires passent alors par la même droite, ou, algébriquement, que les trois équations se réduisent à deux, aux deux premières, par exemple.

Ce résultat était d'ailleurs évident *a priori*, car, pour un point de la courbe (C), les trois plans polaires coïncident avec les trois plans tangents aux trois surfaces et contiennent, par suite, la tangente à la courbe (C) en ce point.

3. Pour exprimer que le point M_0 est dans le plan des xy, nous annulons le numérateur de z_0, ce qui nous donne

$$(2)\qquad 3xyz - 2y^3 - z^2 = 0.$$

Cette équation représente une surface cubique, qui admet l'axe des x comme ligne double, et le plan des zx pour plan de direction asymptotique. Cette surface est réglée, car tout plan passant par Ox la coupe suivant deux droites confondues avec cet axe et, en outre, suivant une autre droite. La droite à l'infini du plan des zx est évidemment la seule qui n'appartienne pas au système des droites rencontrant l'axe des x.

Soit $y = tz$ un plan quelconque passant par Ox; ce plan coupe la surface cubique suivant la droite

$$(3)\qquad y = tz, \qquad x = \frac{2}{3}t^2z + \frac{1}{3t};$$

c'est la génératrice variable de la surface.

Il est visible que la courbe (C) fait aussi partie de la surface cubique.

Le point M étant sur la surface (S), le point M_0 est situé dans le plan des xy ; par conséquent, l'équation du plan polaire de ce point par rapport à la troisième quadrique se réduit à

$$2y_0y - x_0z = 0 ;$$

et, comme $y = tz$, le lieu du point M_0 quand M décrit la génératrice (t) est une droite du plan des

xy, passant à l'origine,

$$x_0 = 2ty_0.$$

Ce résultat était évident géométriquement; en effet, si le point M_0 se meut, dans le plan des xy, sur la droite $x = 2ty$, le plan polaire de ce point, par rapport à la troisième quadrique qui est un cône ayant son sommet à l'origine, est fixe; c'est le plan $y = tz$; le lieu du point M correspondant est donc une courbe plane; d'autre part, le point M est sur la surface (S); par conséquent, le lieu doit être l'intersection de la surface (S) avec le plan $y = tz$. C'est ce que nous avons trouvé.

4. Si le point M_0 est situé en outre dans le plan de l'infini, le dénominateur commun aux trois coordonnées de ce point est nul, et, outre l'équation de S, on a aussi

$$2x^3 - 3xy + z = 0.$$

Cette nouvelle équation représente une surface cubique passant à l'origine, admettant le plan des yz comme plan de direction asymptotique triple, et contenant aussi la courbe (C).

Pour mettre cette ligne en évidence dans l'intersection totale, et pour trouver l'autre partie, qui est le vrai lieu, nous tirons z de la seconde équation et nous le portons dans la première; nous trouvons ainsi

$$y^3 - 3x^4y + 2x^6 = 0,$$

équation qui se décompose visiblement de la façon suivante :

$$(y - x^2)^2(y + 2x^2) = 0.$$

Ceci nous montre que l'intersection totale se compose de deux fois la courbe (C) et d'une autre cubique dont les équations sont

$$(4) \qquad \begin{aligned} y + 2x^2 &= 0, \\ z + 8x^3 &= 0. \end{aligned}$$

Nous voyons ainsi que les deux surfaces cubiques se raccordent tout le long de la courbe (C) et se coupent suivant une nouvelle cubique, qui est le lieu demandé.

Tous ces résultats sont d'ailleurs évidents géométriquement; car, si nous supposons que l'un des deux points M, M_0 se meuve sur une droite D, ses plans polaires par rapport aux trois quadriques se correspondent homographiquement et tournent respectivement autour des conjuguées D_1, D_2, D_3 de la droite D par rapport à ces quadriques. Le lieu de l'autre point est donc la courbe commune aux trois quadriques engendrées par ces trois couples de faisceaux homographiques. Ces trois quadriques ont deux à deux une génératrice commune D_1 ou D_2 ou D_3; par conséquent, deux d'entre elles se coupent en outre suivant une cubique qui est sur la troisième. C'est cette cubique qui est le lieu du second point. Or, ici, le point M_0 décrit la droite à l'infini du plan des xy, donc le point M décrit bien une cubique.

On peut voir aussi que, lorsque l'un des points décrit un plan, l'autre décrit une surface cubique. Il est évident déjà qu'il décrit une surface; cette surface est coupée par une droite Δ en trois points, car si M se meut sur Δ, M_0 se meut sur une cubique qui rencontre le plan donné en trois points, et, par suite, il y a trois positions du point M_0 pour lesquelles le point M est sur la droite Δ. Donc le lieu est une surface du troisième ordre.

5. Pour exprimer que l'accélération du point M est dans le plan tangent à la surface $S(x, y, z) = 0$, nous écrirons que le plan parallèle au plan tangent mené par l'origine contient la parallèle à l'accélération, ce qui nous donnera la condition

$$\frac{\partial S}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial S}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\partial S}{\partial z}\frac{d^2z}{dt^2} = 0;$$

or, nous avons successivement

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 3yz, \qquad \frac{\partial S}{\partial y} = 3xz - 6y^2, \qquad \frac{\partial S}{\partial z} = 3xy - 2z;$$

$$x = \frac{2}{3}t^2 z + \frac{1}{3t}, \qquad y = tz;$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{3}\left(2t^2\frac{d^2z}{dt^2} + 8t\frac{dz}{dt} + 4z + \frac{2}{t^3}\right),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = t\frac{d^2z}{dt^2} + 2\frac{dz}{dt}.$$

En portant ces diverses expressions dans la relation indiquée, et effectuant les réductions, nous obtenons

$$\frac{t}{z^2}\frac{dz}{dt} + \frac{1}{z} + 2t^3 = 0,$$

c'est-à-dire

$$t\frac{d\frac{1}{z}}{dt} - \frac{1}{z} - 2t^3 = 0.$$

C'est bien l'équation différentielle signalée dans l'énoncé.

Pour intégrer cette équation, nous chercherons d'abord une solution de l'équation sans second membre,

$$t\frac{du}{dt} - u = 0.$$

Cette solution est évidente :

$$u = t.$$

Posons alors $\frac{1}{z} = tv$; nous aurons

$$\frac{d\frac{1}{z}}{dt} = v + t\frac{dv}{dt},$$

et l'équation différentielle deviendra

$$t^2\frac{dv}{dt} - 2t^3 = 0,$$

ou

$$dv = 2tdt.$$

Nous en déduisons de suite

$$v = t^2 + c.$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation différentielle est

$$\frac{1}{z} = t^3 + ct.$$

Si nous portons cette valeur de z dans les deux équations qui définissent x et y, nous avons finalement les équations des diverses trajectoires du point M :

$$(5) \qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{t^2 + \frac{c}{3}}{t^3 + ct}, \\ y &= \frac{t}{t^3 + ct}, \\ z &= \frac{1}{t^3 + ct}. \end{aligned}\right.$$

Il est visible que la courbe C est l'une de ces trajectoires; c'est celle qui correspond à $c = 0$.

Bonnes solutions : MM. G. Pélissier, à Toulouse ; Dessimond, à Alger ; Foucry, à Roanne ; M. Grangier, à Mouleydier.

Physique.

1415. — *Un tube barométrique vertical, à fond plat, d'une longueur totale* $L = 120^{cm}$, *émerge de* $l = 100^{cm}$ *au-dessus du niveau du mercure dans une très large cuvette. Le mercure s'y élève d'abord à la hauteur* $H = 80^{cm}$ *qui mesure la pression extérieure. La température est de* 0°.

1° *On introduit alors dans la chambre barométrique une masse d'air de* $102^{mgr},6$. *On demande la nouvelle hauteur* x *à laquelle se fixe le niveau du mercure. (On ne cherchera pas à calculer* x *à plus de* $\frac{1}{1000}$ *près).*

2° *Laissant cet air dans la chambre barométrique, on y introduit une masse* m *d'éther. On demande la nouvelle hauteur* y *à laquelle se fixe le niveau. Donner la valeur numérique de* y *pour* $m = 200^{mgr}$.

3° *Jusqu'ici le tube a été maintenu fixe par rapport au niveau du mercure dans le vase ; on le rend alors libre de se mouvoir verticalement (après l'introduction des* $102^{mgr},6$ *d'air et des* 200^{mgr} *d'éther). Chercher la longueur* l' *dont il émerge quand il a atteint sa position d'équilibre.*

4° *On soulève le tube à partir de cette position jusqu'à sa position primitive ; donner l'expression du travail effectué dans cette opération en supposant que la température reste constante (sans effectuer les calculs).*

Données : Aire de la section intérieure du tube $S = 4^{cmq}$.

Aire de la section droite du tube lui-même $\sigma = \frac{1}{2}^{cmq}$.

Densité du verre qui constitue le tube $d = 2,5$.

Masse de 1 litre d'air à 0° *et à la pression de* 76^{cm} *de mercure,* $1^{gr},3$.

Tension maximum de la vapeur d'éther à 0° $F = 18^{cm},4$ *(centimètres de mercure).*

Densité du mercure $D = 13,6$.

On admettra que la densité de la vapeur d'éther à 0° *par rapport à l'air est constante et égale à* $2,5$.

On négligera la masse du fond plat du tube ; on négligera aussi la pression due à la petite couche d'éther liquide qui peut se former.

1° L'air introduit occupe un volume $S(l-x)$ à la pression $H-x$. Exprimons sa masse à l'aide de ces quantités en prenant pour unités le centimètre et le gramme :

$$0,1026 = 4(100-x)\times 0,0013\times\frac{80-x}{76},$$

$$x^2 - 180x + 6500,46 = 0,$$

$$x = 50.$$

2° Supposons que l'éther ne soit pas totalement vaporisé et que, par conséquent, la pression de sa vapeur soit égale à F. Appliquons à l'air la loi de Mariotte :

Son premier volume est $S(100-x)$, sa première pression $80-x$;

Son second volume est $S(100-y)$, sa seconde pression $80-F-y$,

donc $$(100-x)(80-x) = (100-y)(80-F-y);$$

en remplaçant x et F par leurs valeurs et développant, on trouve

$$y^2 - 161,6y + 4660 = 0,$$

$$y = 37,57.$$

On a supposé la vapeur d'éther saturante. Comme vérification, calculons le poids d'un volume $S(l-y)$ de vapeur d'éther sous la pression F. On trouve

$$4(100-37,57)\times 2,5\times 0,0013\times\frac{18,4}{76} = 0,1965.$$

Il reste donc $0,200 - 0,1965 = 0^{gr},0035$ d'éther qui n'a pas été vaporisé.

3° Désignons par z la nouvelle hauteur à laquelle se fixe le niveau du mercure et appliquons d'abord à l'air, comme dans le cas précédent, la loi de Mariotte :

$$(100 - x)(80 - x) = (l' - z)(80 - F - z);$$

en remplaçant x et F par leurs valeurs, on a

$$(1) \qquad z^2 - (l' + 61,6)z + 61,6l' - 1500 = 0.$$

Exprimons maintenant l'équilibre de l'appareil. Les forces de haut en bas sont :

le poids du verre, $2,5 \times \sigma L = 150$;

le poids de l'air introduit, $0,1026$;

le poids de l'éther introduit, $0,200$;

le poids du mercure intérieur, $S(L - l' + z)13,6 = 54,4(120 - l' + z)$.

Les forces de bas en haut sont :

le poids du mercure déplacé, $(S + \sigma)(L - l')13,6 = 61,2(120 - l')$;

le poids de l'air déplacé, $(S + \sigma)l' 0,0013 \dfrac{80}{76} = 0,006156\, l'$.

En écrivant que la somme des premières est égale à la somme des secondes, on trouve, toutes réductions faites,

$$54,4z + 6,793844l' = 665,6974,$$

ou (2)

$$z + 0,124887l' = 12,237.$$

Enfin, l'élimination de z entre (1) et (2) conduit à l'équation

$$l'^2 + 384,33l' - 14977,2 = 0,$$

$$l' = 35,68.$$

On en déduit

$$z = 7,78.$$

Remarque. — On aurait fait un calcul suffisamment exact en négligeant les poids d'air et d'éther, ainsi que le poids de l'air déplacé.

4° *Première méthode.* — A l'aide des expressions ci-dessus, si on désigne par u la longueur dont le tube émerge dans une position quelconque, on forme l'expression de son poids apparent, différence entre son poids et la poussée, et on en déduit le travail élémentaire dw nécessaire pour le soulever de du :

$$dw = (54,4z + 6,7938u - 665,7)du.$$

D'autre part, on peut toujours écrire la loi de Mariotte, ce qui donne

$$z^2 - (u + 61,6)z + 61,6u - 1500 = 0.$$

Cette équation donne

$$z = \frac{1}{2}(u + 61,6) \pm \sqrt{(u - 61,6)^2 + 6000}.$$

Le signe — est le seul qui convienne, car la racine supérieure est comprise entre u et l'infini, ce qui n'est pas possible. En portant la valeur de z dans l'expression de dw, on trouve

$$dw = (34u + 1010 - 27,2\sqrt{(u - 61,6)^2 + 6000})du.$$

Le travail cherché sera égal à l'intégrale de cette expression prise entre les limites l' et l. Le calcul, un peu long, donne

$$w = 73600 \text{ grammes-poids} \times \text{centimètre} = 0,736 \text{ kilogrammètre}.$$

Seconde méthode. — Comparons les deux états extrêmes et évaluons le travail correspondant à la déformation de chacune des parties du système :

1° Le centre de gravité du tube s'élève de $l - l'$; il en résulte un travail résistant égal à

$$2,5 \times \sigma L(l - l').$$

2° Une colonne de mercure de hauteur $(y - z)$ s'élève dans le tube à un niveau moyen $\dfrac{y + z}{2}$,

d'où un travail résistant $13{,}6 \times S(y-z)\frac{y+z}{2}$; mais il faut en retrancher le travail correspondant au poids de mercure, qui remplit, dans la cuvette, l'espace abandonné par le tube, c'est-à-dire

$$13{,}6 \times \sigma(l-l')\frac{2L-l-l'}{2}.$$

3° Par suite de la détente de l'air et de la vapeur, l'atmosphère extérieure, dont la pression est 13,6 H s'est trouvée refoulée du volume $(l-y-l'+z)(S+\sigma)$, d'où un travail

$$13{,}6\ H(l-y-l'+z)(S+\sigma).$$

4° La détente de l'air intérieur a produit, d'autre part, un travail positif $p_1v_1 \log \text{nép} \frac{v_2}{v_1}$, et la vaporisation de l'éther un travail $F(v_2-v_1)$, v_1 et v_2 représentant les volumes successifs $S(l'-z)$ et $S(l-y)$.

En retranchant ces travaux positifs de la somme des trois premiers, on aura le travail cherché.

GROUPE II

Mathématiques.

1419. — 1° *Étudier la fonction*

$$x = a\ L \cos\frac{x}{a};$$

a désigne une constante positive, L *le logarithme népérien. Soit* (C) *la courbe représentative, les axes étant rectangulaires.*

2° *Calculer le rayon de courbure* R *de* (C) *en l'un quelconque* M *de ses points. Déterminer la développée de* (C).

3° *On suppose que* M *appartienne à la même branche de* (C) *que l'origine* O. *Calculer l'arc* s *de* (C) *limité par* O *et* M. *Exprimer* R *en fonction de* s.

4° *Par les translations parallèles à* Oy, *on déduit de* (C) *une famille de courbes* (Γ). *Déterminer une famille de courbes* (Γ′) *telle que chaque courbe* (Γ′) *coupe à angle droit toutes les courbes* (Γ). (*On pourra former d'abord une relation entre l'abscisse d'un point quelconque d'une courbe* (Γ′) *et le coefficient angulaire de la tangente en ce point.*)

5° *Soit de même* (Γ_1) *la famille de courbes déduites de* (C) *par les translations parallèles à* Ox. *Trouver les courbes* (Γ'_1) *coupant à angle droit les courbes* (Γ_1). (*Former d'abord une relation entre l'ordonnée d'un point quelconque d'une courbe* (Γ_1) *et le coefficient angulaire de la tangente en ce point.*)

6° Calcul numérique. *Soient* x_1, y_1 *les coordonnées du point* P *de la courbe* (C) *tel que son abscisse* x_1 *soit positive, et que l'arc* OP *de* (C) *ait pour longueur* $\frac{a}{2}$. *Déterminer, avec trois chiffres exacts, les rapports* $\frac{x_1}{a}$, $\frac{y_1}{a}$.

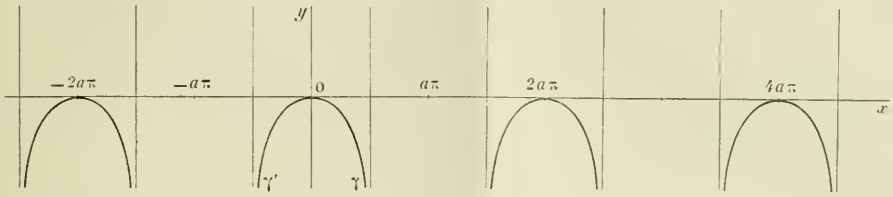
1. Si dans l'équation

$$y = a\ L \cos\frac{x}{a}$$

on remplace x par $x + 2a\pi$, y ne change pas : par suite, pour avoir toute la courbe (C), il suffit d'en construire la portion qui correspond à la variation de x dans un intervalle quelconque d'étendue égale à $2a\pi$, puis d'imprimer à cette branche de courbe des translations de longueur $2a\pi$ parallèlement à Ox.

Si on change x en $-x$, y ne change pas, donc la courbe est symétrique par rapport à l'axe des y. Considérons l'intervalle $(-a\pi, +a\pi)$ dont l'étendue est égale à $2a\pi$; il se subdivise en deux intervalles $(-a\pi, 0,)$ et $(0, a\pi)$, auxquels correspondent des branches de courbes symétriques par rapport à Oy.

Nous ferons donc varier x de 0 à $a\pi$; nous prendrons la symétrique de la portion de courbe obtenue



par rapport à Oy, et nous aurons ainsi une branche de courbe relative à la variation de x dans un intervalle d'étendue égale à $2a\pi$.

Pour que y existe, il faut que $\cos\frac{x}{a}$ soit positif, et pour cela que $\frac{x}{a}$ soit inférieur à $\frac{\pi}{2}$ ou $x < \frac{a\pi}{2}$.

Quand x croit de 0 à $\frac{a\pi}{2}$, $\cos\frac{x}{a}$ décroît de 1 à 0, et y décroit de 0 à $-\infty$; cela nous donne la branche de courbe γ, asymptote à la droite $x = \frac{a\pi}{2}$.

Prenons la dérivée de y par rapport à x; nous avons

$$y' = -\operatorname{tg}\frac{x}{a};$$

pour $x = 0$, y' est nulle, donc la tangente à l'origine est Ox.

Construisons maintenant la branche de courbe γ', symétrique de γ par rapport à Oy. Il n'y a plus alors qu'à imprimer aux arcs γ et γ' des translations égales à $2a\pi$ et parallèles à Ox.

2. Le rayon de courbure R est égal à la valeur absolue de $\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$.

Or $y' = -\operatorname{tg}\frac{x}{a}$, $1 + y'^2 = 1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{a} = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{a}}$ et $(1+y'^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\cos^3\frac{x}{a}}$.

D'autre part, $y'' = -\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{a}}$, on en déduit, puisque a et $\cos\frac{x}{a}$ sont positifs,

$$R = \frac{a}{\cos\frac{x}{a}}.$$

Les coordonnées x_0 et y_0 d'un point quelconque de la développée sont données par les formules

$$x_0 = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''},$$

$$y_0 = y + \frac{1+y'^2}{y''}.$$

Remplaçons-y y, y' et y'' par leurs valeurs en fonctions de x ; nous avons

$$x_0 = x - a \operatorname{tg} \frac{x}{a}, \qquad y_0 = a \operatorname{L} \cos \frac{x}{a} - a.$$

Ces formules nous donnent x_0 et y_0 en fonction du paramètre x ; ce sont les équations paramétriques de la développée.

Si nous changeons x en $x + 2a\pi$, x_0 se change en $x_0 + 2a\pi$ et y_0 ne change pas, donc il suffit encore de faire varier x dans un intervalle quelconque d'étendue égale à $2a\pi$, et d'imprimer à la courbe obtenue des translations égales à $2a\pi$, et parallèles à Ox. En changeant x en $-x$, x_0 change de signe et y_0 ne change pas, donc la courbe est symétrique par rapport à Oy.

Il suffira donc, comme précédemment, de faire varier x dans l'intervalle $(0, a\pi)$ et d'achever par symétrie par rapport à Oy.

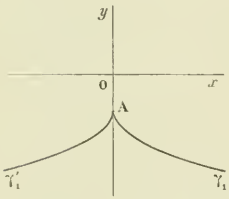
Prenons les dérivées de x_0 et de y_0 par rapport à x ; nous avons

$$\frac{dx_0}{dx} = -\operatorname{tg}^2 \frac{x}{a}, \qquad \frac{dy_0}{dx} = -\operatorname{tg} \frac{x}{a},$$

et par suite

$$\frac{dy_0}{dx_0} = \operatorname{cotg} \frac{x}{a}.$$

Pour que y_0 existe, il faut que x soit inférieur à $\frac{a\pi}{2}$. Faisons varier x de 0 à $\frac{a\pi}{2}$, les variations de x_0 et y_0 sont indiquées dans le tableau suivant :



x	0	croît	$a\frac{\pi}{2}$
x_0	0	décroît	$-\infty$
y_0	$-a$	décroît	$-\infty$

On en déduit la branche de courbe $A\gamma'_1$. La tangente au point A est l'axe Oy, puisque, pour $x = 0$, $\frac{dy_0}{dx_0}$ est infini.

Pour étudier la branche infinie, cherchons la limite de $\frac{y_0}{x_0}$ pour $x = \frac{a\pi}{2}$; pour cela, appliquons la règle de l'Hôpital, le rapport des dérivées de x_0 et y_0 est égal à $\operatorname{cotg} \frac{x}{a}$; cette quantité a pour limite zéro quand x tend vers $\frac{a\pi}{2}$. Il en résulte que la branche γ'_1 est parabolique dans la direction Ox.

Construisons maintenant la branche γ_1, symétrique de γ'_1 par rapport à Oy ; nous avons ainsi la portion de la développée relative à la variation de x dans l'intervalle $(-a\pi, +a\pi)$.

3. On a

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

ou, en tenant compte de la valeur de $1 + y'^2$ calculée plus haut,

$$s = \int_0^x \frac{dx}{\cos \frac{x}{a}}.$$

L'intégrale indéfinie $\int \frac{dx}{\cos\frac{x}{a}}$, ou $a\int \frac{d\frac{x}{a}}{\cos\frac{x}{a}}$, est égale à $a\,\mathrm{L}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2a}\right)$, et comme cette quantité s'annule pour $x=0$, nous avons

$$s = a\mathrm{L}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2a}\right).$$

Nous en tirons

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2a}\right) = e^{\frac{s}{a}},$$

ou

$$\frac{1+\mathrm{tg}\frac{x}{2a}}{1-\mathrm{tg}\frac{x}{2a}} = e^{\frac{s}{a}},$$

d'où

$$(1) \qquad \mathrm{tg}\frac{x}{2a} = \frac{e^{\frac{s}{a}}-1}{e^{\frac{s}{a}}+1}.$$

D'autre part

$$\mathrm{R} = \frac{a}{\cos\frac{x}{a}} = \frac{a\left(1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2a}\right)}{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2a}},$$

et en y remplaçant $\mathrm{tg}\frac{x}{2a}$ par sa valeur (1), nous avons

$$\mathrm{R} = \frac{a\left[(e^{\frac{s}{a}}+1)^2+(e^{\frac{s}{a}}-1)^2\right]}{\left[(e^{\frac{s}{a}}+1)^2-(e^{\frac{s}{a}}-1)^2\right]} = a.\frac{e^{\frac{2s}{a}}+1}{2e^{\frac{s}{a}}},$$

$$\mathrm{R} = a\,\frac{e^{\frac{s}{a}}+e^{-\frac{s}{a}}}{2},$$

et enfin

$$\mathrm{R} = a\,\mathrm{ch}\frac{s}{a}.$$

4. La famille de courbes (Γ) est définie par l'équation

$$y + \mathrm{C} = a\,\mathrm{L}\cos\frac{x}{a},$$

C désignant une constante arbitraire. Différentions par rapport à x; nous avons

$$y' = -\mathrm{tg}\frac{x}{a},$$

et, pour avoir l'équation différentielle des courbes (Γ'), il suffit de remplacer y' par $-\frac{1}{y'}$. Nous obtenons ainsi $-\frac{1}{y'} = -\mathrm{tg}\frac{x}{a}$, ou

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\mathrm{tg}\frac{x}{a}} \qquad \text{ou} \qquad dy = \frac{dx}{\mathrm{tg}\frac{x}{a}} = a\,\frac{d\frac{x}{a}}{\mathrm{tg}\frac{x}{a}}$$

et, en intégrant,

$$y + C = aL \sin \frac{x}{a}.$$

Telle est l'équation générale des courbes (Γ'). Elles se déduisent les unes des autres par des translations parallèles à Oy.

Considérons l'une d'elles, par exemple,

$$(\Gamma') \qquad y = aL \sin \frac{x}{a},$$

et transportons l'origine des coordonnées au point $x = \frac{a\pi}{2}$, $y = 0$; l'équation devient $y = aL \cos \frac{x}{a}$: c'est l'équation de la courbe (C).

La courbe (Γ') se déduit donc de la courbe (C) en imprimant à celle-ci une translation parallèle à Ox et égale à $\frac{a\pi}{2}$.

5. L'équation générale des courbes (Γ_1) est

$$(2) \qquad y = aL \cos \frac{x + C}{a},$$

C désignant une constante arbitraire. Formons d'abord l'équation différentielle de ces courbes; pour cela, différentions l'équation (2) par rapport à x,

$$(3) \qquad y' = -\operatorname{tg} \frac{x + C}{a},$$

et éliminons C entre les équations (2) et (3).

L'équation (2) nous donne $\cos \frac{x + C}{a} = e^{\frac{y}{a}}$, d'où nous tirons

$$\operatorname{tg} \frac{x + C}{a} = \pm \frac{\sqrt{1 - e^{\frac{2y}{a}}}}{e^{\frac{y}{a}}}$$

et, par suite,

$$y' = \pm \frac{\sqrt{1 - e^{\frac{2y}{a}}}}{e^{\frac{y}{a}}}.$$

Remplaçons maintenant y' par $-\frac{1}{y'}$; nous avons

$$y' = \pm \frac{e^{\frac{y}{a}}}{\sqrt{1 - e^{\frac{2y}{a}}}} \qquad \text{ou} \qquad dx = \pm dy \sqrt{e^{-\frac{2y}{a}} - 1};$$

c'est l'équation différentielle des courbes (Γ'_1).

Pour intégrer cette équation, posons

$$\pm \sqrt{e^{-\frac{2y}{a}} - 1} = t;$$

nous en tirons $e^{-\frac{2y}{a}} = 1 + t^2$; puis $y = -\frac{a}{2} L(1 + t^2)$,

et, par suite,

$$dy = -\frac{a t dt}{1 + t^2},$$

et enfin

$$dx = -\frac{at^2dt}{1+t^2} = a\left(\frac{dt}{1+t^2} - dt\right).$$

L'intégration est alors immédiate et nous donne

$$x + C = a(\operatorname{arc\,tg} t - t).$$

Nous avons ainsi les coordonnées d'un point de la courbe en fonction du paramètre t :

$$x + C = a(\operatorname{arc\,tg} t - t), \qquad y = -\frac{a}{2}L(1+t^2).$$

Ces équations définissent la famille de courbes (Γ'_1); toutes ces courbes se déduisent de l'une d'elles par des translations parallèles à Ox.

Nous allons étudier la courbe qui correspond à $C = 0$. Auparavant, prenons un autre paramètre φ, déterminé par la relation

$$\operatorname{arc\,tg} t = \frac{\varphi}{a};$$

nous avons $t = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{a}$, $1 + t^2 = \dfrac{1}{\cos^2\frac{\varphi}{a}}$, $L(1+t^2) = -2L\cos\frac{\varphi}{a}$, et par suite

$$(\Gamma'_1) \quad \begin{cases} x = \varphi - a\operatorname{tg}\frac{\varphi}{a}, \\ y = aL\cos\frac{\varphi}{a}. \end{cases}$$

Transportons maintenant l'origine des coordonnées au point $(0, a)$; les équations deviennent

$$\begin{cases} x = \varphi - a\operatorname{tg}\frac{\varphi}{a}, \\ y = aL\cos\frac{\varphi}{a} - a, \end{cases}$$

et nous reconnaissons aussitôt les équations paramétriques de la développée, dans lesquelles x est remplacé par φ.

Il en résulte que la courbe (Γ'_1) se déduit de la développée en imprimant à celle-ci une translation parallèle à Oy et égale à a.

6. Nous avons vu plus haut que la longueur s de l'arc OM est

$$s = aL\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2a}\right),$$

x désignant l'abscisse du point M.

Il en résulte que l'abscisse x_1 du point P est définie par l'équation

$$\frac{a}{2} = aL\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x_1}{2a}\right), \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x_1}{2a}\right) = e^{\frac{1}{2}}.$$

Prenons les logarithmes des deux membres dans le système à base 10, nous avons

$$\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x_1}{2a}\right) = \frac{1}{2}\log e = 0{,}21714,$$

d'où nous déduisons, en prenant le grade pour unité,

$$50 + \frac{x_1}{2a} = 65{,}291$$

et

$$\frac{x_1}{a} = 30{,}582.$$

Exprimons maintenant $\frac{x_1}{a}$ en prenant pour unité l'arc dont la longueur est égale au rayon; nous avons

$$\frac{x_1}{a} = \frac{30,582 \times \pi}{200} = \frac{15,291 \times \pi}{100}.$$

Si l'on prend, pour valeur approchée de π, 3,14, l'erreur commise sur π est $< 0,002$, et par suite l'erreur commise sur l'expression $\frac{15,291 \times \pi}{100}$ est plus petite que $\frac{30,582}{100000}$ ou plus petite que $\frac{1}{1000}$.

Or on a
$$\frac{15,291 \times 3,14}{100} = 0,4801374,$$

donc
$$\frac{x_1}{a} = 0,480 \quad \text{à} \quad \frac{1}{1000} \text{ près.}$$

D'autre part,
$$\frac{y_1}{a} = \mathrm{L} \cos \frac{x_1}{a}, \quad \text{ou} \quad e^{\frac{y_1}{a}} = \cos \frac{x_1}{a},$$

et
$$\frac{y_1}{a} \log e = \log \cos \frac{x_1}{a}.$$

On en déduit

$$\frac{y_1}{a} = \frac{\log \cos \frac{x_1}{a}}{\log e} = \frac{\bar{1},94783}{0,43429} = -\frac{0,05227}{0,43429},$$

ou
$$\frac{y_1}{a} = -0,120.$$

On a donc
$$\frac{x_1}{a} = 0,480, \quad \frac{y_1}{a} = -0,120.$$

M. GRANGIER, à Mouleydier.

Bonnes solutions par MM. Dessimond, à Alger; Ducos, lycée Carnot; G. Foucry, à Roanne.

EXAMENS DE 1905 (*Suite.*)

CERTIFICAT D'ÉTUDES SUPÉRIEURES (*Lyon, juillet 1905*).

Mathématiques préparatoires à la physique et aux sciences industrielles.

Épreuve théorique.

1 — **1485.** On considère la courbe plane représentée, en coordonnées rectangulaires, par les équations

$$x = a(1 + \cos^2 t) . \sin t,$$
$$y = a \sin^2 t . \cos t.$$

1° Calculer l'équation de la normale en un point de cette courbe, ainsi que les coordonnées du centre du cercle osculateur à cette courbe en ce point.

2° Montrer que cette courbe satisfait à l'équation différentielle

$$x + yy' = \frac{2ay'}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

dans laquelle y' désigne la dérivée $\frac{dy}{dx}$.

3° Trouver l'intégrale générale de cette équation différentielle.

II. — Écrire les équations de l'équilibre des fluides (sans démonstration), s'en servir comme point de départ pour établir ensuite les équations fondamentales de l'hydrodynamique.

Épreuve pratique.

I. — Calculer les longueurs des axes de la conique représentée, en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$4x^2 - 12xy + 13y^2 = 7.$$

II. — **1486.** Intégrer l'équation différentielle

$$(\sin x + \cos x)\frac{dy}{dx} - y.\cos x + 1 + \sin x \cos x = 0.$$

QUESTIONS PROPOSÉES

1487. — Un angle droit aor tourne autour du point double o d'une cubique circulaire. Par le point r où un de ses côtés rencontre la cubique, on mène une parallèle rc à l'asymptote réelle de cette cubique ; soit c le point où elle rencontre à nouveau la cubique ; on joint ac et on désigne par b le troisième point où cette droite rencontre la courbe.

Cela posé, on demande : 1° le lieu des centres des cercles passant par les trois points o, a et b ; 2° le lieu de la projection du point double o sur ac ; 3° l'enveloppe de la droite ac. Maurice Rouché.

1488. — 1° Calculer à $\frac{1}{10^4}$ près la racine positive de l'équation $x^3 - x^2 - 7x - 1 = 0$ et à $\frac{1}{10}$ près les racines négatives.

2° Montrer que les intégrales de l'équation différentielle

$$y(3x+1) - y'(x^2-1) + (x^2+1)[x^3 - x^2 - 7x - 1] = 0$$

qui contiennent un paramètre arbitraire λ sont des polynomes de la forme $f + \lambda\varphi$.

3° Discuter, quand λ varie, le nombre de racines réelles de l'équation $f + \lambda\varphi = 0$.

4° Dans quels cas particuliers l'équation différentielle $y\mathrm{A}(x) + y'\mathrm{B}(x) + \mathrm{C}(x) = 0$ n'admet-elle pour intégrales que des polynomes ? D'une manière plus précise, on démontrera que si l'équation différentielle est de la forme $y\mathrm{A}'(x) - y'\mathrm{A}(x) + \mathrm{C}(x) = 0$, A et C désignant deux polynomes, A ayant toutes ses racines distinctes, la condition nécessaire et suffisante pour que toutes les intégrales soient des polynomes est que le polynome $\mathrm{A}'\mathrm{C}' - \mathrm{A}''\mathrm{C}$ soit divisible par le polynome A. T. L.

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE CENTRALE (*Concours de* 1905).

Statique.

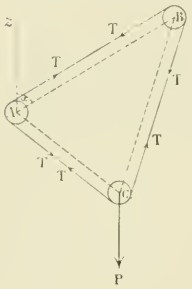
1422. — *Les axes de trois poulies d'égal rayon et en équilibre se projettent aux points* A, B, C *d'un plan de symétrie commun vertical.*

Les deux premières ont leurs axes fixes ; $\mathrm{AB} = c$ *fait un angle* α *avec la partie ascendante de la verticale de* A. *La troisième est mobile, porte un poids* P, *et* $\mathrm{AC} + \mathrm{CB} = l > c$. *Un même fil fermé passe dans les gorges des poulies, extérieurement au triangle* ABC.

Calculer, en fonction des données, *l'angle* C *et les réactions sur les axes* A *et* B.

Application numérique : $c = 2^{\mathrm{m}}$, $l = 2\sqrt{3}^{\mathrm{m}}$, $\alpha = 60°$, $\mathrm{P} = 50^{\mathrm{kg}}$. *On néglige les frottements, le poids du système des poulies et du fil ainsi que les déformations.*

Désignons par T la tension du fil : les trois poulies ayant même rayon, les différentes parties du fil seront respectivement parallèles aux côtés du triangle ABC, en sorte que les angles de ces parties deux à deux seront les angles A, B, C du triangle ABC.



La poulie C étant en équilibre, le vecteur P (qui est vertical) est dirigé suivant la bissectrice de l'angle ACB et de plus on a :

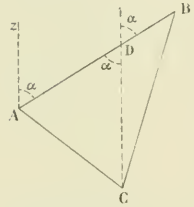
$$P = 2T \cos \frac{C}{2}.$$

Désignons par R_a et R_b les réactions sur les axes A et B. Elles sont dirigées suivant les bissectrices des angles A et B et données en grandeur par les conditions

$$R_a = 2T \cos \frac{A}{2}. \qquad R_b = 2T \cos \frac{B}{2}.$$

Il s'agit de calculer, en fonction des données α, c, l et P, l'angle C et les réactions R_a et R_b.

Le triangle ABC est un triangle dans lequel on connaît la base $AB = c$, la somme des côtés $CA + CB = l$ et l'angle α que fait la bissectrice CD avec la base AB. Or on a



$$\frac{AD}{\sin \frac{C}{2}} = \frac{AC}{\sin \alpha}, \qquad \text{d'où} \qquad AD = AC \frac{\sin \frac{C}{2}}{\sin \alpha}.$$

$$\frac{DB}{\sin \frac{C}{2}} = \frac{BC}{\sin \alpha}, \qquad \text{d'où} \qquad DB = BC \frac{\sin \frac{C}{2}}{\sin \alpha}.$$

et par suite

$$AD + DB = (AC + CB) \frac{\sin \frac{C}{2}}{\sin \alpha}.$$

c'est-à-dire

$$c = l . \frac{\sin \frac{C}{2}}{\sin \alpha}.$$

Par conséquent

(1) $$\sin \frac{C}{2} = \frac{c}{l} \sin \alpha.$$

Cette valeur $\frac{c}{l} \sin \alpha$ étant plus petite que $1 (c < l)$, on en déduira la valeur de $\frac{\widehat{C}}{2}$, en prenant l'angle aigu dont le sinus est égal à $\frac{c}{l} \sin \alpha$. On remarque que $\frac{\widehat{C}}{2}$ sera inférieur à α. On calculera ensuite les angles A et B par les formules

$$A = \pi - \alpha - \frac{C}{2}, \qquad B = \alpha - \frac{C}{2}.$$

α ayant été supposé aigu sur la figure, l'angle $\frac{C}{2}$ étant lui-même aigu et inférieur à α, on aura pour A et B des valeurs positives moindres que π, par suite acceptables.

La formule (1) donne donc l'angle C en fonction des données. D'autre part la tension T est égale à $\frac{P}{2 \cos \frac{C}{2}}$ (équilibre de la poulie C) ; on a donc pour les réactions R_a, R_b :

$$(2)\quad \begin{cases} R_a = P\dfrac{\cos\dfrac{A}{2}}{\cos\dfrac{C}{2}} = P\dfrac{\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{C}{4}\right)}{\cos\dfrac{C}{2}}, \\ R_b = P\dfrac{\cos\dfrac{B}{2}}{\cos\dfrac{C}{2}} = P\dfrac{\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{C}{4}\right)}{\cos\dfrac{C}{2}}, \end{cases}$$

Application numérique. — $c = 2^m$, $l = 2\sqrt{3}^m$, $\alpha = 60^\circ$, $P = 50^{kg}$.

La formule (1) donne

$$\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\times\sin 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2},$$

d'où $\frac{C}{2} = 30^\circ$; cela étant, $A = 90^\circ$, $B = 30^\circ$.

Les formules (2) donnent

$$R_a = 50\times\frac{\cos 45^\circ}{\cos 30^\circ} = 50\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 40^{kg},824,$$

$$R_b = 50\times\frac{\cos 15^\circ}{\cos 30^\circ} = 50\times\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} = 55^{kg},766.$$

P. L.

Solutions exactes de MM. G. Foucry, à Roanne ; Pierre Troy, lycée de Toulouse.

Géométrie analytique et cinématique.

1423. — 1° *Quelle est, en coordonnées polaires* ρ *et* ω, *l'équation de la courbe* (M) *dont la tangente fait avec le rayon vecteur un angle* V *tel que* $\operatorname{tg} V = -\sin\omega$ *et qui passe par le point* $\omega = \frac{\pi}{2}$, $\rho = a$?

2° *Pour chaque point* M *de cette courbe, on considère un point* N *de l'axe polaire à la même distance de l'origine que le point* M ; *sur* MN *on projette l'origine et on demande le lieu* (P) *de cette projection* B *quand le point* M *se déplace.*

3° *Tracer les courbes* (M) *et* (P) ; *puis considérer les déplacements correspondants des points* M, N, P *et démontrer que l'excès géométrique de la vitesse de* M *sur celle de* N *est double de l'excès géométrique de la vitesse de* P *sur celle de* N.

En déduire une construction de la tangente en P *à la courbe* (P) *connaissant la tangente en* M *à la courbe* (M).

I. — On sait que $\operatorname{tg} V = \frac{\rho}{\rho'}$, ρ' désignant la dérivée de ρ par rapport à ω. On doit donc déterminer la fonction ρ de la variable ω qui satisfait à l'équation

$$\frac{\rho}{\rho'} = -\sin\omega$$

et qui, pour $\omega = \frac{\pi}{2}$, prend la valeur particulière $\rho = a$.

Remplaçant ρ' par $\frac{d\rho}{d\omega}$, nous pouvons écrire l'équation sous la forme

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{d\omega}{\sin\omega} = 0,$$

ou, en remplaçant $\sin\omega$ par $2\sin\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\times\cos^2\frac{\omega}{2}$,

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{\dfrac{1}{\cos^2\frac{\omega}{2}}}{\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}}\times d\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0,$$

ou enfin

$$\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\cdot d\rho + \rho d\left(\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\right) = 0.$$

Le premier membre est la différentielle du produit $\rho\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$; on doit donc avoir

$$\rho\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = \text{C}^{\text{te}}.$$

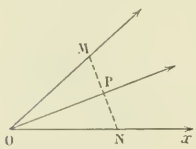
Pour $\omega = \frac{\pi}{2}$, ρ doit se réduire à a; on en déduit que la constante est égale à a, d'où l'équation de la courbe (M)

$$\rho\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = a,$$

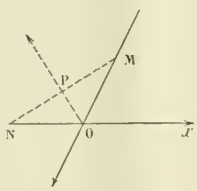
ou mieux

$$\rho = a\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}.$$

II. — Convenons (ce que ne dit pas l'énoncé) que l'on prend le point N sur l'axe polaire de façon que $\overline{ON}$ ait même valeur algébrique que le rayon vecteur OM fourni par l'équation de la courbe (M). Soient θ et r les coordonnées polaires du point P.



(1° $\rho > 0$)



(2° $\rho < 0$)

1° $\rho > 0$. On a $\theta = \frac{\omega}{2}$,

$$r = ON\cos\theta = \rho\cos\theta;$$

2° $\rho < 0$; $\theta = \frac{\omega}{2}$,

$$r = ON\cos(\pi - \theta) = |\rho|\cos(\pi - \theta)$$

et comme

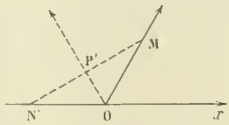
$$|\rho| = -\rho \quad \text{et} \quad \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta,$$

on a encore $r = \rho\cos\theta$.

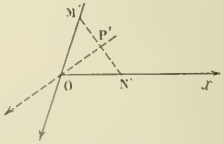
L'équation du lieu (P) sera donc

$$r = a\operatorname{cotg}\theta.\cos\theta = \frac{a\cos^2\theta}{\sin\theta}.$$

Si, au contraire, on avait pris sur l'axe polaire le point N′ tel que $\overline{ON'} = -\rho$, (ce point étant encore à la même distance de l'origine que le point M), on aurait eu le point P′ tel que



(1° $\rho > 0$)



(2° $\rho < 0$)

1° $\rho > 0$. $\theta = \frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{2}$,

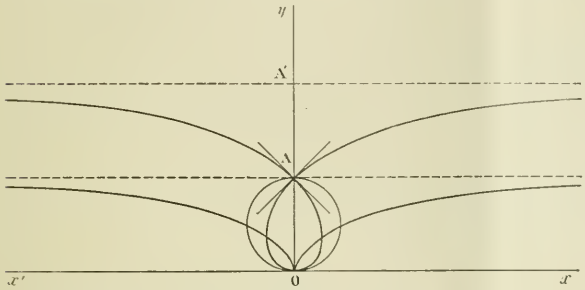
$$r = ON'\cos(\pi - \theta) = -\rho\cos\theta;$$

2° $\rho < 0$. $\theta = \frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{2}$, $r = ON'\cos\theta = |\rho|\cos\theta = -\rho\cos\theta$,

et l'équation du lieu (P') serait

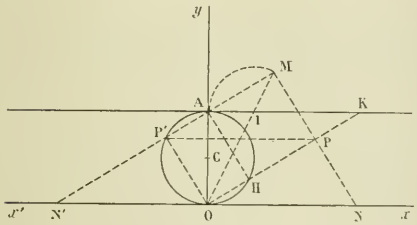
$$r = -a \operatorname{cotg}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \cos\theta = a \operatorname{tg}\theta . \cos\theta = a \sin\theta.$$

III. — La construction des courbes (M), (P) et (P') ne présente aucune difficulté. La courbe (M) est une strophoïde droite ayant l'origine pour sommet et le point A pour point double; la courbe (P) une cissoïde droite qui a l'origine pour point de rebroussement et la parallèle à l'axe polaire menée par le point A pour asymptote. Enfin la courbe (P') est le cercle décrit sur OA comme diamètre; ces résultats peuvent d'ailleurs être déduits géométriquement de la définition de la strophoïde.

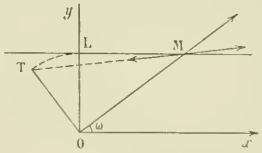


Soit M un point de la strophoïde (IM = IA); N' le point de rencontre de MA axec xx', le triangle MON' semblable au triangle MIA est isocèle; on a donc ON' = OM et P' est le pied de la perpendiculaire abaissée du point O sur la droite AM pivotant autour du point A; le lieu de P' est donc le cercle décrit sur OA comme diamètre.

Soit maintenant le point N tel que ON = OM = ON' et P le milieu de MN. Le triangle MN'N est rectangle en M; OP parallèle à N'M rencontre le cercle OA en un point H tel que OH = P'A; d'autre part, PP étant parallèle à AK, PK = P'A; on a donc OH = PK et par suite OP = HK; le lieu de P est une cissoïde droite ayant le point O comme point de rebroussement et AK pour asymptote.



La propriété énoncée au n° I permet de construire simplement la tangente en un point M à la strophoïde. Par le point M menons la parallèle à l'axe polaire et soit L son point de rencontre avec la perpendiculaire Oy,



$$\overline{OL} = \rho \sin\omega.$$

Prenons sur la direction $\omega + \frac{\pi}{2}$ le vecteur OT, tel que $\overline{OT} = \overline{OL} = \rho \sin\omega$; MT est la tangente en M car

$$\operatorname{tg} V = \frac{\overline{OT}}{\overline{MO}} = \frac{\rho \sin\omega}{-\rho} = -\sin\omega.$$

Connaissant cette tangente, on en peut déduire la tangente au point correspondant du lieu (P). Ce qui va suivre s'applique aussi bien à la cissoïde lieu de P qu'au cercle lieu de P'.

P étant le milieu de MN, on a l'égalité géométrique

$$2(OP) = (OM) + (ON);$$

on en déduit la même relation entre les dérivées géométriques de ces trois vecteurs, ou encore entre les vitesses des points P, M et N :

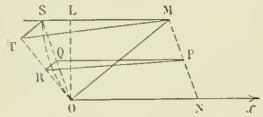
$$2(V_P) = (V_M) + (V_N),$$

relation qui peut encore s'écrire

$$(V_M) - (V_N) = 2[(V_P) - (V_N)];$$

c'est la relation annoncée.

Rien n'empêche de supposer le mouvement du point M sur la strophoïde réglé de telle façon que le vecteur vitesse au point M soit précisément le vecteur MT de la figure précédente.



La vitesse du point N sur l'axe polaire est un vecteur dont la valeur algébrique est donnée par $\frac{d\rho}{dt}$ égale à $\overline{MO}$, projection de la vitesse du point M sur le rayon vecteur ; en rabattant MO en MS sur la parallèle à l'axe polaire menée par le point M, on obtient le vecteur MS équipollent à V_N et, par suite,

$$(ST) = (V_M) - (V_N).$$

Or on a

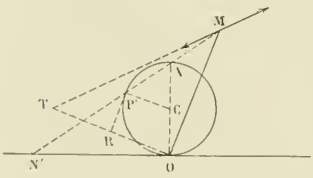
$$(V_P) - (V_N) = \frac{1}{2}[(V_M) - (V_N)] = \frac{1}{2}(ST).$$

Soient P le milieu de MN (MN est parallèle à OS), Q le milieu de OS et R le milieu de OT, on a

$$(PR) = (PQ) + (QR) = (V_N) + \frac{1}{2}(ST).$$

Le vecteur PR est donc le vecteur vitesse au point P ; il suffit pour l'obtenir de joindre le point P au milieu R de OT.

Inversement, en partant du vecteur PR on pourra construire le vecteur MT et par conséquent déduire la tangente en M à la strophoïde soit de la tangente en P à la cissoïde soit de la tangente en P′ au cercle OA. La figure ci-contre indique la construction à faire dans ce dernier cas.



On a construit le point M pour une position de P′ sur le cercle OA en prenant sur la droite P′A, $P'M = N'P'$. Au point P′ la tangente au cercle est parallèle à OM; en effet P′C est conjuguée en direction avec AO par rapport aux deux droites P′A, P′O; de même OM est conjuguée de OX (perpendiculaire à AO) par rapport aux droites OH et OP′ perpendiculaires respectivement à P′O et P′A; donc P′C est perpendiculaire à OM et par suite la tangente P′R perpendiculaire en P′ au rayon CP′ est parallèle à OM.

Soit R son point de rencontre avec la perpendiculaire à OM ; d'après ce qui précède $OR = \frac{1}{2}OT$: donc en prenant $OT = 2OR$ et joignant le point T au point M, on aura la tangente cherchée.

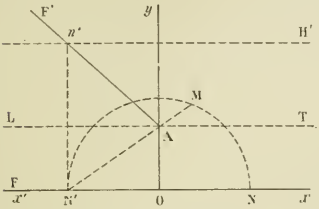
P. L.

Solutions de MM. Amblard, conducteur des Ponts et Chaussées, à Ruines (Cantal) ; G. Foucry, à Roanne ; M. Grangier, à Mouleydier ; M. Laurence ; Paul Régnauld, lycée Carnot.

M. Thybaut m'a communiqué la remarque suivante :

Si on joint un point N′ mobile sur $x'x$ au point A de Oy et qu'on prenne le point de rencontre de la droite N′A ainsi obtenue avec le cercle NN′ décrit de O comme centre avec ON′ comme rayon, ce point M décrira la strophoïde (M). D'après cela, cette courbe peut être considérée comme la projection horizontale

(ligne de terre suivant LT) de l'intersection d'un cône de révolution ayant pour axe la verticale issue du point O (O,Ay), et pour génératrice la frontale (OF,AF') avec un paraboloïde équilatère ayant pour plans directeurs les deux plans de projection et défini par deux génératrices, l'une (OF, AF') commune avec le cône, l'autre suivant la verticale Ay issue de A. En coupant par un plan horizontal H', on obtient dans le cône un cercle projeté suivant le cercle de diamètre NN' et dans le paraboloïde une génératrice projetée suivant AN'; d'où le point M qui engendre la strophoïde.



Au lieu de couper par des plans horizontaux, on pourrait mener des plans auxiliaires par la génératrice commune, d'où une nouvelle génération de la strophoïde (M). Enfin, la construction de la tangente en un point de l'intersection fournirait un tracé de la tangente à la strophoïde en un point.

P. L.

Trigonométrie.

Problème.

1426. — *Soit un triangle* ABC; *la hauteur relative à* BC *rencontre ce côté en* D, *et la bissectrice de l'angle intérieur* BAC *coupe* BC *en* E.

1° *On donne les mesures* p *et* q *des longueurs* AE, BC, *l'unité étant* AD; *trouver des formules logarithmiques conduisant au calcul des angles* B *et* C. *Discuter ces formules.*

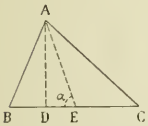
2° *Étant données les longueurs* AE, AD, BC, *construire le triangle* ABC.

1° Supposons pour fixer les idées $\widehat{B} > \widehat{C}$ et soit α l'angle aigu BEA. On a

$$AD = AE \sin \alpha,$$

d'où
$$p = \frac{AE}{AD} = \frac{1}{\sin \alpha}, \qquad \text{et} \qquad \sin \alpha = \frac{1}{p}.$$

On voit que p doit être supérieur ou au plus égal à 1. Nous supposons cette condition remplie.



D'autre part,
$$\frac{AD}{BD} = \operatorname{tg} B, \qquad \frac{AD}{DC} = \operatorname{tg} C,$$

d'où
$$BC = BD + DC = AD(\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C);$$

par suite,
$$q = \frac{BC}{AD} = \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C = \frac{\sin(B+C)}{\sin B \sin C}.$$

Or, on a, en égalant la somme des angles dans les deux triangles ABE, AEC,

$$\frac{A}{2} + B + \alpha = \frac{A}{2} + 180^\circ - \alpha + C,$$

d'où l'on déduit
$$\frac{B-C}{2} = 90^\circ - \alpha,$$

α étant l'angle aigu donné par la formule $\sin \alpha = \frac{1}{p}$ $(p \geqslant 1)$.

Cela étant, la relation précédente peut s'écrire

$$q = \frac{2\sin(B+C)}{2\sin B \sin C} = \frac{2\sin(B+C)}{\cos(B-C) - \cos(B+C)}.$$

Or
$$\cos(B-C) = 2\cos^2\frac{B-C}{2} - 1 = 2\sin^2\alpha - 1 = \frac{2}{p^2} - 1,$$

$$\cos(B+C) = 2\cos^2\frac{B+C}{2} - 1,$$

et l'équation devient

$$q = \frac{\sin(B+C)}{\frac{1}{p^2} - \cos^2\frac{B+C}{2}} = \frac{2p^2 \operatorname{tg}\frac{B+C}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{B+C}{2} - p^2},$$

d'où l'équation en $\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}$:

$$\operatorname{tg}^2\frac{B+C}{2} - 2\frac{p^2}{q}\operatorname{tg}\frac{B+C}{2} - (p^2-1) = 0.$$

Cette équation a ses racines réelles, l'une t' positive, l'autre t'' négative. La racine positive seule peut être admise ici ; pour la calculer posons

$$t' = \sqrt{p^2-1}\operatorname{cotg}\varphi, \qquad t'' = -\sqrt{p^2-1}\operatorname{tg}\varphi,$$

φ désignant un angle du premier quadrant. Nous aurons pour déterminer φ la relation

$$t' + t'' = \sqrt{p^2-1}(\operatorname{cotg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi) = 2\frac{p^2}{q},$$

d'où

$$\frac{\cos 2\varphi}{\sin 2\varphi} = \frac{p^2}{q\sqrt{p^2-1}} = \frac{1}{q\sin\alpha\cos\alpha},$$

d'où

$$\operatorname{tg} 2\varphi = q\sin\alpha.\cos\alpha.$$

Cette formule donnera pour 2φ une valeur comprise entre 0 et 90°, la seule possible puisque nous avons supposé l'angle φ compris lui-même entre 0 et 90°. Nous aurons donc

$$\operatorname{tg}\frac{B+C}{2} = \sqrt{p^2-1}\operatorname{cotg}\varphi = \operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\varphi.$$

Posons $\operatorname{cotg}\alpha.\operatorname{cotg}\varphi = \operatorname{tg}\beta$ $(0 < \beta < 90°)$; nous en déduisons

$$\frac{B+C}{2} = \beta$$

et, en rapprochant de la formule

$$\frac{B-C}{2} = 90° - \alpha,$$

$$B = \beta + (90° - \alpha), \qquad C = \beta - (90° - \alpha).$$

La seule condition à imposer à α et β, c'est que la valeur trouvée pour C soit positive, savoir

$$\beta > 90° - \alpha,$$

$$\operatorname{tg}\beta > \operatorname{cotg}\alpha,$$

ou encore

$$\operatorname{cotg}\alpha.\operatorname{cotg}\varphi > \operatorname{cotg}\alpha,$$

ou enfin

$$\operatorname{cotg}\varphi > 1.$$

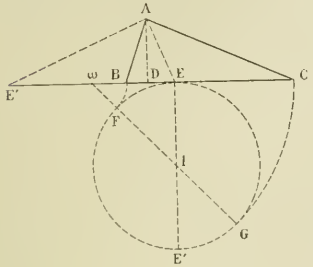
Cette condition sera remplie d'elle-même puisque l'angle 2φ étant compris entre 0 et 90°, l'angle φ est compris entre 0 et 45° et par suite sa cotangente est plus grande que 1.

En résumé, la seule condition de possibilité du problème, c'est que p soit $\geqslant 1$.

Les angles B et C se calculeront par les formules

$$B = \beta + 90° - \alpha, \qquad C = \beta - (90° - \alpha),$$

les angles auxiliaires α et β par les formules



$$\sin\alpha = \frac{1}{p},$$

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\varphi,$$

$$\operatorname{tg}2\varphi = q\sin\alpha\cos\alpha.$$

Toutes ces formules sont calculables par logarithmes.

2. Pour construire le triangle ABC connaissant AE, AD, BC, on commence par construire le triangle rectangle ADE, dans lequel on connaît l'hypoténuse AE et le côté AD de l'angle droit (ce qui exige $AD < AE$) ; en menant la perpendiculaire AE′ à la bissectrice AE de l'angle intérieur A, on aura la bissectrice de l'angle extérieur. Les points B et C sont conjugués harmoniques l'un de l'autre par rapport aux deux points E et E′, et si on désigne par ω le milieu du segment EE′, on a

$$\overline{\omega B}\,.\,\overline{\omega C} = \overline{\omega E}^2,$$

$$\overline{\omega C} - \overline{\omega B} = \overline{BC}.$$

On est ramené à construire deux longueurs connaissant leur différence et leur produit. Ayant déterminé deux pareilles longueurs ωF, ωG (voir la figure), on les a rabattues en ωB et ωC de façon que B et C tombent par rapport au point ω du même côté que le point E.

P. L.

Solutions de MM. G. Foucry, à Roanne ; H. Janois, à Nantes.

Calcul logarithmique.

1427. — *Calculer les arcs positifs inférieurs à* 360°, *qui vérifient la formule*

$$a^{\sin x} = \frac{\sqrt[3]{b^2}}{\cos C}.$$

Données numériques : $a = 72{,}531$, $b = 0{,}13648$, $C = 340°27'38'',5$.

Nota. — *Les candidats peuvent, à leur gré, se servir de la division centésimale du quadrant; mais ils sont tenus de faire usage de tables de logarithmes ayant au moins 5 décimales.*

Posons $C_1 = 360° - C = 360° - 340°27'38'',5 = 19°32'21'',5$, et observons que $\cos C = \cos C_1$; la formule donnée peut s'écrire

$$a^{\sin x} = \frac{b^{\frac{2}{3}}}{\cos C_1},$$

d'où, en prenant les logarithmes des deux membres,

$$\sin x \log a = \frac{2}{3}\log b + \operatorname{colog}\cos C_1.$$

Or on trouve

$$\log a = 1{,}8605237,$$
$$\log b = \bar{1}{,}1350690,$$
$$\log\cos C_1 = \bar{1}{,}9742410,$$

$$\frac{2}{3}\log b = \bar{1}{,}4233793$$
$$\operatorname{colog}\cos C_1 = 0{,}0257590$$
$$\sin x\,.\log a = \bar{1}{,}4491383$$
$$= -0{,}5508617.$$

On en déduit

$$\sin x = -\frac{0,5508617}{1,8605237}.$$

Posons $\sin \alpha = \frac{0,5508617}{1,8605237}$, α désignant un angle terminé dans le premier quadrant.

On trouve sans peine

$$\log \sin \alpha = \bar{1},4714073,$$

d'où

$$\alpha = 17°13'20'',06.$$

L'équation à résoudre est la suivante

$$\sin x = -\sin \alpha = \sin(-\alpha),$$

d'où deux séries de valeurs

$$x_1 = 2k.180° - \alpha,$$
$$x_2 = (2k+1).180° + \alpha.$$

Pour avoir les arcs compris entre 0 et 360°, il faut prendre $k = 1$ dans la première formule, d'où

$$x_1 = 360° - 17°13'20'',06 = 342°46'39'',94$$

et $k = 0$ dans la seconde, d'où

$$x_2 = 180° + 17°13'20'',06 = 197°13'20'',06.$$

P. L.

A envoyé un calcul exact : M. G. Foucry, à Roanne.

QUESTIONS PROPOSÉES

1489. — On considère la courbe représentée par l'équation

$$\rho^2 = a^2 \frac{\omega}{\pi - \omega}.$$

1° Construire cette courbe.

2° Calculer l'aire limitée par un arc et deux rayons vecteurs.

3° Cette aire étant recouverte d'une couche infiniment mince de matière pesante dont la densité est en chaque point inversement proportionnelle à la distance de ce point au pôle, calculer la masse totale de la couche.

4° Trouver les trajectoires orthogonales des courbes considérées en y faisant varier a^2.

1490. — On considère un cercle fixe et un cercle de même rayon qui roule sans glissement sur celui-ci de telle sorte que la vitesse angulaire du rayon de contact dans le cercle fixe soit égale à 1.

1° Trouver les équations du mouvement d'un point de la circonférence mobile invariablement lié à cette circonférence ; la vitesse, l'accélération du mobile ainsi que la composante normale de l'accélération.

2° Construire l'hodographe du mouvement. Calculer l'arc de la trajectoire, sa longueur totale, et l'aire comprise entre cette courbe et le cercle fixe.

3° Trouver le rayon de courbure et la développée de cette trajectoire.

E. H.

Erratum. — Une omission s'est produite, page 154, dans l'équation de la ligne 19 ; il faut lire :

$$\lambda by + ax = \mu(\gamma + \lambda\gamma')(\lambda bx - ay) + 2\lambda\mu ab(\gamma' - \gamma).$$

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

16e Année. N° 8. Mai 1906.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LES ÉPICYCLOÏDES ET HYPOCYCLOÏDES

LEUR RECTIFICATION EFFECTUÉE GÉOMÉTRIQUEMENT

par M. G. Cotty, élève au lycée de Dijon.

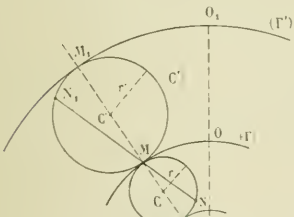
Je me propose de déterminer géométriquement le rayon de courbure en un point d'une épicycloïde ou d'une hypocycloïde, de déterminer les développées de ces courbes et d'effectuer leur rectification; de résoudre ainsi par la géométrie, d'une façon très simple, des problèmes dont la solution par l'analyse est longue et présente quelques difficultés.

Nous appellerons *épicycloïde* toute courbe engendrée par le mouvement d'un point de la circonférence d'un cercle de rayon r roulant extérieurement, sans glisser, sur un cercle de rayon R.

Deux épicycloïdes sont *de même espèce* lorsque les rapports $\frac{r}{R}$ sont égaux.

Quand le cercle roule intérieurement, on définit de même une *hypocycloïde* et deux hypocycloïdes de même espèce. Ceci posé, je démontrerai d'abord géométriquement le théorème suivant :

Théorème. — *La développée d'une hypocycloïde est une hypocycloïde de même espèce.*



La développée est envisagée comme l'enveloppe des normales.

Considérons l'hypocycloïde engendrée par le point N du cercle (C) roulant sur le cercle (Γ), le centre instantané de rotation étant M, la normale en N à l'hypocycloïde est NM : la tangente en N est NT.

Considérons un cercle (C') ayant son centre sur ΓC et tangent en M à (Γ), MN le coupe en N_1; traçons le cercle (Γ') de centre Γ et tangent en M_1 à (C') et soit O_1 le point d'intersection de ΓO avec ce cercle; si nous pouvons déterminer le rayon r' de (C') de façon que arc MN_1 = arc O_1M_1, MN restera constamment tangent à l'hypocycloïde engendrée par la rotation de (C') sur (Γ'). Pour cela, il faut et il suffit que

$$\frac{r'}{r} = \frac{R+2r'}{R}. \qquad r' = \frac{Rr}{R-2r}.$$

Ceci est toujours possible et en outre $\frac{r'}{R+2r'} = \frac{r}{R}$, ce qui démontre que les deux hypocycloïdes sont de même espèce.

Le rayon de courbure en N étant NN_1; on a

$$NN_1 = MN \times \left(1 + \frac{r'}{r}\right) = 2MN\,\frac{R-r}{R-2r}.$$

Si nous posons $\frac{r}{R} = \frac{1}{n}$, on voit que, si n est un entier :

Théorème. — *Le rayon de courbure en un point d'une hypocycloïde à n rebroussements est égal à* $2\,\dfrac{n-1}{n-2}$ *fois le segment compris sur la normale entre la courbe et le cercle fixe.*

Remarques. — I. Si $R = 2r$, $n = 2$, le rayon de courbure est constamment infini, ce qui démontre le théorème de la Hire :

Tout point de la circonférence d'un cercle roulant sans glissement à l'intérieur d'un cercle de rayon double décrit une droite.

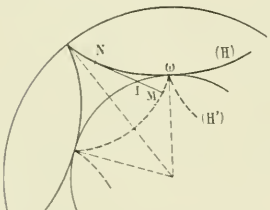
II. — Si R est infini, on a ces théorèmes :

La développée d'une cycloïde est une cycloïde égale ; le rayon de courbure en un point est égal à deux fois le segment compris sur la normale entre la courbe et la droite de base.

Nous démontrons de la même façon les théorèmes analogues pour les épicycloïdes — que j'énoncerai seulement :

La développée d'une épicycloïde est une épicycloïde de même espèce.

Le rayon de courbure en un point d'une épicycloïde à n rebroussements est égal à $2\,\dfrac{n+1}{n+2}\,N$, *N étant la longueur de la normale comprise entre la courbe et le cercle fixe.*



Longueur d'un arc d'épicycloïde ou d'hypocycloïde. — Cherchons la longueur de l'arc ωN de l'hypocycloïde (H) ; pour cela, considérons l'hypocycloïde (H') dont (H) est la développée ; soit M l'intersection de la tangente en N à (H) avec (H'). D'après le théorème d'Huyghens, on a

$$\text{arc}\ \omega N = NM.$$

Exprimons MN en fonction de $MI = T$. D'après les théorèmes précédents,

$$MN = 2MI \times \frac{R-r}{R-2r}, \qquad T = MI \times \frac{R}{R-2r},$$

donc

$$\omega N = 2T\,\frac{R-r}{R}.$$

Nous opérons de même la rectification d'un arc d'épicycloïde, et si nous appelons encore T la longueur de la tangente comprise entre le point de contact M et le cercle fixe, on a

$$\text{arc}\ \omega M = 2T\,\frac{R+r}{R}.$$

En faisant $T = 2r$ et en doublant la longueur trouvée, on voit que :

La longueur d'un arc d'hypocycloïde est égale à $8\,\dfrac{r}{R}(R-r)$; *la longueur d'un arc d'épicycloïde égale à* $8\,\dfrac{r}{R}(R+r)$.

Si nous considérons le cas où $R = nr$, n étant un entier, on a les théorèmes suivants :

I. — *La longueur totale d'une hypocycloïde à n rebroussements est égale à* $8(n-1)$ *fois le rayon du cercle générateur.*

II. — *La longueur totale d'une épicycloïde à n rebroussements est égale à* $8(n+1)$ *fois le rayon du cercle générateur.*

Remarque. — Dans l'expression de la longueur d'un arc, faisons croître R indéfiniment, on a le résultat suivant :

La longueur d'un arc de cycloïde est égale à 8 fois le rayon du cercle générateur.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (Concours de 1905.)

Mathématiques spéciales.

1443. — 1° *On donne les deux droites* D, D′ *définies respectivement par les équations*

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ z = h \end{array}\right\} \text{(D)}, \qquad \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ z = -h \end{array}\right\} \text{(D')},$$

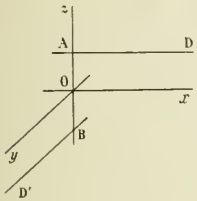
les axes de coordonnées ox, oy, oz *étant supposés rectangulaires. Trouver l'équation ponctuelle de la surface* S *lieu du sommet d'un paraboloïde variable qui passe par ces deux droites. Trouver l'équation tangentielle de la même surface* S.

2° *Calculer les coordonnées d'un point quelconque* M *de la surface* S *en fonction de l'abscisse* α *et de l'ordonnée* β *des deux points* N, N′ *où une droite, menée par* M, *rencontre respectivement* D *et* D′. *Soit* P *le point de coordonnées* α, β *dans le plan* xoy. *Lieu du point* M *quand* P *décrit une droite quelconque du plan* xoy. *Étude de l'intersection de la surface* S *avec une quadrique quelconque qui passe par* D *et* D′. *Lieu correspondant du point* P. *Cas où cette intersection se décompose.*

3° *Démontrer que la surface* S *est sa propre polaire réciproque par rapport à une infinité de quadriques* Q, *dont on cherchera l'équation générale ponctuelle. On envisagera plus particulièrement parmi elles les paraboloïdes* Q_1. *Trouver l'enveloppe des quadriques* Q.

Cette solution nous a été envoyée par M. Denjoy, candidat à l'agrégation au dernier concours et reçu premier. Elle diffère fort peu de celle qu'il a remise à ce moment-là. Indépendamment de la grande valeur qu'elle présente il nous a paru intéressant, encore à ce point de vue, de la publier telle quelle.

1° Ecrivons l'équation générale des paraboloïdes passant par D et D′.



Toute quadrique passant par D et D′ peut être considérée comme engendrée par l'intersection de deux plans mobiles contenant respectivement D et D′ :

$$\lambda y + z - h = 0,$$
$$\mu x + z + h = 0,$$

λ et μ étant liés par une relation homographique à coefficients quelconques

$$A\lambda\mu + B\lambda + C\mu + D = 0.$$

L'équation générale des quadriques passant par D et D′ est donc

$$A(z^2 - h^2) - Bx(z - h) - Cy(z + h) + Dxy = 0.$$

On aura un paraboloïde si $D = 0$, ce qui se voit *a priori* en remarquant que $\lambda = 0$ et $\mu = 0$ doivent être deux valeurs correspondantes.

L'axe du paraboloïde

$$(1) \qquad A(z^2 - h^2) - Bx(z - h) - Cy(z + h) = 0$$

a pour direction

$$\left| \begin{array}{l} z = 0, \\ Bx + Cy = 0. \end{array} \right.$$

C'est donc le diamètre conjugué du plan

$$Cx - By = 0\,;$$

c'est la droite

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{-B(z-h)}{C} = \dfrac{C(z+h)}{B}, \\ 2Az = Bx + Cy. \end{array} \right.$$

Les rapports de la première équation sont égaux à

$$\frac{2BCz}{B^2 - C^2} = \frac{2BCh}{B^2 + C^2} = \sqrt{-(z^2 - h^2)}.$$

Le sommet, intersection du paraboloïde avec l'axe, a donc pour coordonnées

$$(2)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{2AB^3}{(B^2+C^2)^2}\,h, \\ y = -\dfrac{2AC^3}{(B^2+C^2)^2}\,h, \\ z = \dfrac{B^2-C^2}{B^2+C^2}\,h. \end{cases}$$

Formons l'équation ponctuelle de la surface (S) lieu du sommet. On a $\dfrac{B^3}{C^3} = -\dfrac{x}{y}$. Donc

$$z = \frac{x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}\,h,$$

ou (3)
$$x^{\frac{2}{3}}(z-h) + y^{\frac{2}{3}}(z+h) = 0,$$

(4)
$$\frac{(z-h)^3}{(z+h)^3} = \frac{-y^2}{x^2}.$$

Telle est l'équation de la surface (S), sous forme rationnelle.

C'est un conoïde du cinquième degré ayant pour droite directrice l'axe des z et pour plan directeur le plan des xy. La directrice est une droite double, la droite à l'infini du plan des xy est triple. Enfin, les droites D et D′ sont doubles.

Cherchons l'équation tangentielle de (S). Nous utiliserons l'équation (3). Soit $uX + vY + wZ + s = 0$ le plan tangent au point x, y, z de la surface. x, y, z vérifiant l'équation (3), on a

(5)
$$\frac{u}{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(z-h)} = \frac{v}{\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}(z+h)} = \frac{w}{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}} = \frac{\frac{s}{h}}{-x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}.$$

Les deux premiers rapports donnent, d'après $\dfrac{z-h}{y^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{z+h}{-x^{\frac{2}{3}}}$,

$$\frac{u}{y} = \frac{v}{-x};$$

les deux derniers, par addition et soustraction,

$$\frac{w - \frac{s}{h}}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{w + \frac{s}{h}}{y^{\frac{2}{3}}}.$$

Donc (6)
$$\frac{\left(w + \frac{s}{h}\right)^3}{\left(w - \frac{s}{h}\right)^3} = \frac{u^2}{v^2}.$$

On remarquera la grande analogie des équations (4) et (6).

2°. Exprimons les coordonnées x, y, z d'un point de la surface au moyen des nombres α, β dont parle l'énoncé.

Soient λ, μ le système des valeurs des paramètres définissant la génératrice de système opposé à D et D′ passant par le sommet.

Cette génératrice a pour direction

$$-z = \lambda y = \mu x$$

et est parallèle au plan

$$By = Cx; \qquad \text{donc} \qquad \frac{\lambda}{B} = \frac{\mu}{C}.$$

D'autre part, puisque les points $(\alpha, 0, h)$ et $(0, \beta, -h)$ appartiennent à cette génératrice, on a

$$\lambda\beta = 2h,$$
$$\mu\alpha = -2h,$$

avec

$$A\lambda\mu + B\lambda + C\mu = 0.$$

Les deux nombres α, β correspondant à un système donné de nombres A, B, C, c'est-à-dire à un paraboloïde donné satisfont donc à

$$\frac{\alpha}{B} = \frac{-\beta}{C} \qquad \text{et} \qquad 2Ah - B\alpha + C\beta = 0.$$

Donc, en résolvant par rapport à A, B, C, on a

$$\frac{B}{\alpha} = \frac{C}{-\beta} = \frac{2Ah}{\alpha^2 + \beta^2}$$

et, en portant ces valeurs dans les expressions (2) homogènes et de degré zéro en B, C, $2Ah$, il vient

$$(7) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{\alpha^3}{\alpha^2 + \beta^2}, \\ y = -\dfrac{\beta^3}{\alpha^2 + \beta^2}, \\ z = \dfrac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} h. \end{cases}$$

Telles sont les expressions demandées.

Considérons dans un plan où sont tracés deux axes rectangulaires, le point de coordonnées α, β. Convenons de dire que ce point est l'image du point x, y, z de (S). Une relation entre α et β définit une courbe sur la surface. α et β sont les distances algébriques à l'axe des z des points où D et D' sont rencontrées par l'unique droite s'appuyant sur elles et passant par le point x, y, z de la surface (S). Si donc, ce point décrit l'intersection de S avec une quadrique passant par D et D', α et β sont liés par une relation de la forme

$$m\alpha\beta + n\alpha + p\beta + q = 0,$$

m, n, p, q, étant trois nombres quelconques; dans le plan des α, β, c'est l'hyperbole équilatère la plus générale ayant pour directions asymptotiques les axes [1].

On aura un paraboloïde si $m = 0$. Avec cette hypothèse, β est linéaire en α. En portant son expression dans les équations (7), on trouve une cubique. Cette cubique est rencontrée par les génératrices du paraboloïde en un seul point sur les génératrices de système opposé à D et D', puisque sur une telle droite, (S) ne possède qu'un point non situé sur D ni D'. Les génératrices de même système que D ou D' rencontrent en deux points la cubique.

Supposons $m \neq 0$; on a

$$\beta = -\frac{n\alpha + q}{m\alpha + p}.$$

Nous supposons $mq - np \neq 0$, sinon la relation entre α et β serait de la forme $(\alpha - \alpha_0)(\beta - \beta_0) = 0$ et représenterait deux plans. La courbe d'intersection avec (S) se décompose évidemment, mais ceci n'offre pas d'intérêt.

Supposons donc $mq - np \neq 0$. Les coordonnées d'un point de l'intersection en fonction du seul

[1] Ceci suppose $m \neq 0$. Si $m = 0$, on a la droite la plus générale.

paramètre α sont

$$(8)\quad \left|\begin{aligned} x &= \frac{\alpha^3(m\alpha+p)^2}{\alpha^2(m\alpha+p)^2+(n\alpha+q)^2},\\ y &= \frac{(n\alpha+q)^3}{[\alpha^2(m\alpha+p)^2+(n\alpha+q)^2](m\alpha+p)},\\ z &= \frac{\alpha^2(m\alpha+p)^2-(n\alpha+q)^2}{\alpha^2(m\alpha+p)^2+(n\alpha+q)^2}h. \end{aligned}\right.$$

Si l'on réduit ces trois expressions au plus petit dénominateur commun, on voit que, par x, la courbe est du sixième degré.

Ces équations représentent une courbe indécomposable, comme on sait. La courbe ne pourra se décomposer que si un facteur $\alpha-\alpha_0$ apparaît haut et bas dans l'une des expressions, en sorte que pour $\alpha=\alpha_0$, l'une des coordonnées sera indéterminée, les deux autres prenant dans le cas général des valeurs déterminées. Ce sera une droite parallèle à l'un des axes qui se présentera alors, et, une fois le facteur $\alpha-\alpha_0$ supprimé, il reste les équations d'une courbe complémentaire. Le facteur linéaire qui disparaît peut correspondre à α_0 infini.

Appliquons ceci à la courbe (8). C'est x qui donne le degré. On a

$$x=\frac{\alpha^3(m\alpha+p)^2}{\alpha^2(m\alpha+p)^2+(n\alpha+q)^2}.$$

Il y aura diminution de degré, si le degré du dénominateur de x se réduit, ou bien si le numérateur et le dénominateur de x ont un facteur commun.

Le premier cas se présente pour $m=0$. C'est le cas du paraboloïde. On constate que la courbe dégénère en une cubique.

Le second cas se présentera à la condition nécessaire et suffisante que dans x, α divise le dénominateur, c'est-à-dire $q=0$. Il est impossible que $m\alpha+p$ divise le dénominateur puisque $mq-np\neq 0$. $q=0$ nous donne les quadriques contenant Oz. La courbe se réduit à une quartique. Cette quartique ne rencontre qu'en un point les génératrices de la quadrique de système opposé à D et D' et par suite en trois points celles du même système que D et D'. Elle est de seconde espèce.

Ces deux cas de décomposition étaient évidents *a priori*. Une quadrique quelconque coupe S suivant une courbe du dixième degré. Si elle passe par D et D', qui sont doubles sur S, le reste de l'intersection est du sixième degré. Si elle passe de plus par Oz qui est double, le reste de l'intersection est une quartique. Si elle passe par la droite de l'infini du plan $z=0$, qui est triple sur S, il reste une cubique.

3° Soient $F(x,y,z,t)=0$ l'équation ponctuelle homogène d'une surface, $\Phi(u,v,w,s)=0$ son équation tangentielle. Soit

$$f(x,y,z,t)=Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'xz+2B''xy+2Cx+2C'y+2C''z+D=0$$

l'équation ponctuelle d'une quadrique. Cherchons la condition nécessaire et suffisante pour que la surface considérée soit à elle-même sa propre polaire réciproque par rapport à la quadrique $f=0$.

Soit x,y,z,t un point quelconque de la surface. Son plan polaire $uX+vY+wZ+sT=0$ par rapport à la quadrique a pour coordonnées

$$\frac{u}{f'_x}=\frac{v}{f'_y}=\frac{w}{f'_z}=\frac{s}{f'_t}.$$

Il faut et il suffit que quel que soit le point x,y,z,t pris sur la surface, son plan polaire soit tangent à cette dernière. L'équation

$$\Phi(f'_x,f'_y,f'_z,f'_t)=0$$

doit donc être équivalente à $F(x,y,z,t)=0$.

Cherchons toutes les formes quadratiques en x, y, z, t telles que les deux équations

$$(4) \qquad \frac{(z-h)^3}{(z+h)^3} = -\frac{y^2}{x^2}$$

et

$$(9) \qquad \left(\frac{f'_z + \frac{1}{h} f'_t}{f'_z - \frac{1}{h} f'_t}\right)^3 = \frac{f'^2_x}{f'^2_y}$$

soient équivalentes.

La remarque suivante va restreindre le champ de nos recherches.

Soit G une génératrice de (S). Sa conjuguée G′ par rapport à la quadrique (Q) fait partie de (S), puisque tout plan passant par G est un plan tangent à (S) et a son pôle sur G′. D'autre part G rencontre Oz. Quand deux droites se rencontrent, leurs conjuguées se rencontrent également, comme il est très aisé de s'en rendre compte. Donc, la conjuguée de Oz doit rencontrer G′, c'est-à-dire une génératrice quelconque de (S). C'est donc soit la droite de l'infini du plan des xy, soit Oz ; dans ce dernier cas Oz appartient à (Q). Pareil raisonnement pour la droite à l'infini du plan des xy. En résumé, deux cas seulement sont possibles :

1° (Q) contient Oz et la droite de l'infini du plan des xy ;

2° ces deux droites sont conjuguées par rapport à (Q), c'est-à-dire que Oz est un axe de Q.

Examinons le premier cas. L'équation des quadriques (Q) est de la forme

$$By z + B'xz + Cx + C y = 0.$$

Il s'agit de voir si l'on peut identifier avec (4) l'égalité

$$(9\,bis) \qquad \frac{\left[By + B'x + \frac{1}{h}(Cx + C'y)\right]^3}{\left[By + B'x - \frac{1}{h}(Cx + C'y)\right]^3} = \frac{(B'z + C)^2}{(Bz + C')^2}.$$

On ne peut pas identifier parce que les termes de plus haut degré dans (4) contiennent z^3 en facteur, et ici ne peuvent contenir que z^2.

Dans le second cas, l'équation des quadriques est de la forme

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2B''xy + 2C''z + D = 0.$$

L'équation à identifier avec (4) est

$$(9\,ter) \qquad \frac{\left[A''z + C'' + \frac{1}{h}(C''z + D)\right]^3}{\left[A''z + C'' - \frac{1}{h}(C''z + D)\right]^3} = \frac{(Ax + B''y)^2}{(A'y + B''x)^2}.$$

Toute section dans la surface (S) par un plan $z = \lambda$ se compose de deux droites conjuguées harmoniques par rapport aux intersections de ce plan avec les plans xOz, yOz. Donc, les deux plans

$$\left| \begin{array}{l} Ax + B''y = 0, \\ A'y + B''x = 0 \end{array} \right.$$

sont identiques aux plans de coordonnées passant par Oz. Donc, ou bien $A = 0$, $A' = 0$, ou bien $B'' = 0$.

Supposons $A = 0$, $A' = 0$.

Le second membre de l'égalité se réduit à $\frac{y^2}{x^2}$. Ecrivons que pour $z = h$, $y = 0$ d'une part, et $z = -h$, $x = 0$ d'autre part, l'équation est vérifiée. Nous obtenons les deux relations

$$A''h + \frac{D}{h} + 2C'' = 0, \qquad -A''h - \frac{D}{h} + 2C'' = 0$$

ou $$A''h^2 + D = 0, \qquad C'' = 0.$$

Avec ces valeurs l'équation des quadriques devient

$$(10) \qquad A''(z^2 - h^2) + 2B''xy = 0.$$

L'équation devient, en supposant $A''B'' \neq 0$,

$$\frac{(z-h)^3}{(z+h)^3} = \frac{y^2}{x^2}.$$

Ce n'est pas la surface (S) : c'est une surface d'une nature très voisine que nous désignerons par (S_1).

Les quadriques (10) passent par D, D' et ont leur centre à l'origine. (S) et (S_1) sont polaires réciproques par rapport à ces quadriques.

Enfin, faisons $B'' = 0$. L'équation (9 *ter*) se réduit à

$$(9)^{\text{IV}} \qquad \frac{\left[A''z + \frac{D}{h} + \frac{C''}{h}(z+h)\right]^3}{\left[A''z - \frac{D}{h} - \frac{C''}{h}(z-h)\right]^3} = \frac{A^2x^2}{A'^2y^2}.$$

Ecrivons que l'équation est vérifiée pour $x = 0$, $z = -h$, $y = 0$, $z = +h$. Nous trouvons la condition unique

$$A''h^2 - D = 0,$$

et l'équation prend la forme

$$\frac{\left(A'' + \frac{C''}{h}\right)^3 (z+h)^3}{\left(A'' - \frac{C''}{h}\right)^3 (z-h)^3} = \frac{A^2x^2}{A'^2y^2}.$$

Il y aura identité avec (S), à la condition nécessaire et suffisante

$$(11) \qquad \frac{\left(A'' + \frac{C''}{h}\right)^3}{\left(A'' - \frac{C''}{h}\right)^3} = -\frac{A^2}{A'^2}.$$

Donc, par rapport aux quadriques (Q),

$$(12) \qquad Ax^2 + A'y^2 + A''(z^2 + h^2) + 2C''z = 0,$$

A, A', A'', C'' étant liées par la relation (11), la surface (S) est sa propre polaire réciproque.

Pour que Q soit un paraboloïde, il faut et il suffit que $AA'A'' = 0$. Si $AA' = 0$, on a un cylindre parallèle à Ox ou Oy. Si $A'' = 0$, la relation (11) se réduit à

$$C''^3(A^2 - A'^2) = 0 \qquad \text{ou} \qquad C'' = 0 \qquad \text{et} \qquad A^2 = A'^2.$$

Dans la première hypothèse on a deux plans passant par Oz. Dans la seconde, on a les deux familles de paraboloïdes

$$A(x^2 + y^2) + 2C''z = 0,$$
$$A'(x^2 - y^2) + 2C''z = 0 :$$

les premiers, de révolution autour de Oz et ayant leur sommet à l'origine, les seconds équilatères ayant pour axe Oz et pour sommet l'origine, passant par les bissectrices des axes Ox et Oy.

Les quadriques (Q) dépendent de quatre paramètres figurant sous forme homogène, et liés par une relation, donc, de deux paramètres indépendants seulement. Voici comment on peut faire figurer explicitement ces deux paramètres indépendants. La relation (11) rappelle l'équation ponctuelle de S. Posons, en supposant $C'' \neq 0$,

$$\frac{A}{C''}h^2 = \xi, \qquad \frac{A'}{C''}h^2 = \eta, \qquad \frac{A''}{C''}h^2 = \zeta ;$$

l'équation générale des quadriques (Q) est

$$\xi x^2 + \eta y^2 + \zeta(z^2 + h^2) + 2zh^2 = 0, \tag{13}$$

ξ, η, ζ étant les coordonnées d'un point quelconque de (S). On aura l'équation de (Q) avec deux paramètres indépendants en remplaçant ξ, η, ζ à l'aide de α et de β.

Il sera maintenant aisé d'obtenir l'enveloppe de (Q). Soit

$$f(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

l'équation de la surface (S).

Soit $u\xi + v\eta + w\zeta + s = 0$, l'équation en tangentielles du point ξ, η, ζ; pour obtenir, en tangentielles « l'enveloppe » de ce point, *nous faisons exactement les mêmes calculs* que pour obtenir l'enveloppe de (Q). Donc, cette dernière s'obtient en remplaçant dans l'équation tangentielle de (S) u, v, w, s par $x^2, y^2, z^2 + h^2, 2zh^2$.

C'est donc

$$\frac{(z^2 + h^2 + 2zh)^3}{(z^2 + h^2 - 2zh)^3} = \frac{x^4}{y^4},$$

ou, en extrayant les racines carrées des deux membres,

$$\frac{(z + h)^3}{(z - h)^3} = -\frac{x^2}{y^2}, \tag{4}$$

ce qui est l'équation de (S) et

$$\frac{(z + h)^3}{(z - h)^3} = \frac{x^2}{y^2}, \tag{14}$$

ce qui est l'équation de la surface (S_1) déjà rencontrée.

Analysons plus loin la remarque qui nous a donné immédiatement l'enveloppe de Q. Les égalités (5) nous donnent ce que l'on peut appeler les coordonnées du plan caractéristique dans la recherche de « l'enveloppe » du point

$$u\xi + v\eta + w\zeta + s = 0.$$

On aura les coordonnées du point caractéristique de la quadrique Q, en remplaçant dans les égalités (5), u, v, w, s par $x^2, y^2, z^2 + h^2, 2zh^2$; on a ainsi

$$\frac{x^2}{\frac{2}{3}\xi^{-\frac{1}{3}}(\zeta - h)} = \frac{y^2}{\frac{2}{3}\eta^{-\frac{1}{3}}(\zeta + h)} = \frac{z^2 + h^2}{\xi^{\frac{2}{3}} + \eta^{\frac{2}{3}}} = \frac{2zh^2}{-\xi^{\frac{2}{3}} + \eta^{\frac{2}{3}}}.$$

Pour avoir des dénominateurs rationnels, nous n'avons qu'à remplacer ξ, η, ζ en fonction de α et β. Nous savons en effet que les coefficients du plan tangent à une surface unicursale en α et β s'expriment rationnellement en fonction de α et β, car on a

$$u = \frac{\partial(y, z)}{\partial(\alpha, \beta)}, \qquad v = , \qquad w = , \qquad s = -(u\xi + v\eta + w\zeta).$$

Remplaçons simplement dans les rapports précédents ξ, η, ζ avec α et β. On a en supprimant en dénominateur le facteur $(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{2}{3}}$, qui figure évidemment partout avec la même détermination,

$$\frac{x^2}{-\frac{4}{3}\frac{\beta^2}{\alpha}h} = \frac{y^2}{\frac{4}{3}\frac{\alpha^2}{\beta}h} = \frac{z^2 + h^2}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{2zh}{-\alpha^2 + \beta^2}.$$

Remplaçons les deux derniers rapports par leur somme et leur différence terme à terme :

$$\frac{x^2}{-\frac{2}{3}\frac{\beta^2}{\alpha}h} = \frac{y^2}{\frac{2}{3}\frac{\alpha^2}{\beta}h} = \frac{(z + h)^2}{\beta^2} = \frac{(z - h)^2}{\alpha^2}.$$

On a
$$\frac{x^2}{y^2} = -\frac{\beta^3}{\alpha^3}, \qquad \frac{(z+h)^2}{(z-h)^2} = \frac{\beta^2}{\alpha^2}.$$

Donc, pour les points caractéristiques situés sur (S), $\frac{z+h}{z-h} = \frac{\beta}{\alpha}$. Pour ceux situés sur (S_1), c'est $\frac{z+h}{z-h} = -\frac{\beta}{\alpha}$.

Extrayons les racines carrées des quatre rapports. Il vient pour les points de (S)

$$\frac{z+h}{\beta} = \frac{z-h}{\alpha} = \frac{x}{\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\beta\sqrt{\frac{h}{\alpha}}} = \frac{y}{\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\alpha\sqrt{\frac{h}{\beta}}}.$$

Pour (S_1), on remplacerait le premier rapport par $\frac{z+h}{-\beta}$. On a, pour chacune des deux surfaces

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{\eta}{\xi}, \qquad \left(\frac{z+h}{z-h}\right)^2 = -\frac{\zeta-h}{\zeta+h}.$$

Il y a quatre points caractéristiques sur chacune des surfaces S et S_1.

L'intersection de (Q) et de chacune des deux surfaces est une courbe du dixième degré possédant quatre points doubles aux quatre points caractéristiques.

Notes et remarques sur le problème précédent.

I. — Voici comment on peut voir immédiatement que la surface (S) est un conoïde.

Considérons la transformation ponctuelle de l'espace suivante : la cote du point transformé ne change pas, mais sa projection sur le plan xOy est remplacée par son homothétique par rapport à O avec un rapport fixe k.

Une droite a pour transformée une droite, si elle est perpendiculaire à Oz (ou Δ), sa transformée est dans le même plan horizontal et est son homothétique par rapport au point de Δ de même cote. Si de plus elle rencontre Δ, elle coïncide avec sa transformée, il en est ainsi de D et de D'.

Une droite perpendiculaire à une droite horizontale et celle-ci ont leurs transformées encore rectangulaires.

Ceci posé, un paraboloïde passant par D et D' aura pour transformé un autre paraboloïde passant par D et D', car la surface transformée contenant D et D', est réglée, les points de rencontre avec D et D' des génératrices se correspondent homographiquement, les points à l'infini étant homologues.

Un paraboloïde P passant par D et D' a son axe horizontal et l'axe de son transformé est donc parallèle au sien.

Je dis que le sommet σ du paraboloïde P a pour transformé le sommet σ_1 de P_1. En effet, en σ passent deux génératrices de P, perpendiculaires à la direction δ des diamètres de P (et par suite de P_1) ; δ étant horizontale, les transformées de ces génératrices restent perpendiculaires à δ. Donc, le transformé de leur point de rencontre σ est le sommet σ_1 de P_1.

Donc, σ étant un point quelconque de la surface lieu des sommets des paraboloïdes P, tout point déduit de σ par la transformation considérée, en donnant à k une valeur arbitraire appartient à cette surface. Ces points forment une droite perpendiculaire à Δ. Donc, la surface est un conoïde ayant pour droite directrice Δ et pour plan directeur le plan xOy.

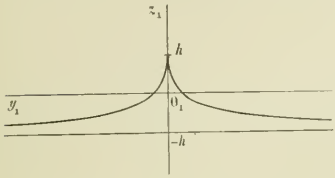
II. — Voici quelques indications sur la forme de ce conoïde :

Ses éléments de symétrie sont ceux des systèmes des deux droites D et D'. Plans de symétrie : xOz, yOz. Axes de symétrie : Oz ou Δ, et les bissectrices de l'angle xOy.

Je dis que chacune des droites doubles D et D' est une arête de la surface, c'est-à-dire que les deux plans tangents en chacun des points de D, plans qui passent par D sont confondus avec le plan xOz.

Ceci se vérifie aisément. Toute section plane ne passant pas par D possède au point de rencontre avec D, un point de rebroussement, la tangente étant dans le plan xOz.

Étudions la section par un plan $x = \lambda$. La section est du cinquième degré, unicursale. Elle possède outre le point de rebroussement sur O_1z_1, un point double imaginaire à l'infini dans la direction de O_1z_1, un point triple à l'infini dans la direction O_1y_1, les trois tangentes étant confondues avec la droite $z_1 = -h$.



Tout ceci est immédiat, si l'on utilise la représentation paramétrique de la surface avec x et $t = \frac{y}{x}$. On a

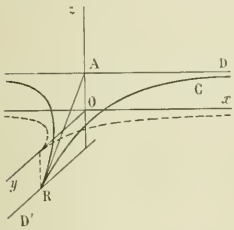
$$x = \lambda,$$
$$y = -\lambda t^3,$$
$$z = \frac{1-t^2}{1+t^2}h.$$

Quand λ varie, la courbe varie par simple dilatation d'ordonnées.

La section par $y = \lambda$ est la symétrique de la précédente par rapport à la bissectrice $x = y$, $z = 0$ de xOy.

III. — Voici une génération du conoïde :

La forme de l'équation du conoïde (S) montre que la projection sur le plan $z = 0$ d'une courbe algébrique tracée sur S, et, par exemple, obtenue par l'intersection avec (S) d'une surface algébrique Σ, passe par les points cycliques du plan xOy. Si donc Σ n'admet pas le plan $z = 0$ pour plan asymptotique, cette projection sera une courbe circulaire. Il en est ainsi de la section par un plan non horizontal.



La section par un plan passant par D est, outre D, une cubique, possédant un point de rebroussement sur D', symétrique par rapport à sa tangente de rebroussement et admettant D pour asymptote. La projection sur $z = 0$ est donc une cissoïde de Dioclès.

Réciproquement, considérons une cubique réelle C admettant un point de rebroussement R, symétrique par rapport à sa tangente de rebroussement, admettant deux directions asymptotiques imaginaires, son asymptote réelle D, qui est évidemment perpendiculaire à la tangente de rebroussement et la rencontre en A, étant de plus située à distance finie du point de rebroussement. Dans ces conditions, il existe un plan passant par le milieu de AR et sur lequel la cubique C se projette suivant une cissoïde de Dioclès. Soit xOy ce plan, Oz la perpendiculaire abaissée de A sur lui, Ox étant parallèle à D. Le conoïde ayant pour directrice Oz, pour plan directeur xOy, et s'appuyant sur la cubique C est précisément, si la cote de D est h, le conoïde S.

On pourrait, en étudiant la construction du sommet d'un paraboloïde P par sa projection sur le plan xOy, trouver très aisément par voie géométrique, la génération précédente du conoïde S.

IV. — *Lignes asymptotiques du conoïde* S. — On sait qu'elles s'obtiennent sans quadrature. Si l'on a

$$z = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

les asymptotiques se projettent suivant les courbes

$$x^2 = Cf'\left(\frac{y}{x}\right).$$

Ici
$$z = \frac{x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}h.$$

En introduisant α et β, on trouve pour équation $\alpha\beta = C$.

Les asymptotiques sont les sections par les quadriques (t0) passant par D et D' et ayant leur centre en O, par rapport auxquelles S et S_1 sont polaires réciproques.

V. — Dans le cas de décomposition de l'intersection de S avec une quadrique passant par D et D', j'ai trouvé les cas $m = 0$ et $q = 0$. J'ai omis le cas où l'on aurait simultanément $m = 0$, $q = 0$, qui est le cas du paraboloïde équilatère.

Un paraboloïde équilatère passant par D et D' coupe S en D et D', Δ, comptant chacune pour une courbe du second ordre, en Δ' (droite de l'infini du plan xOy) qui compte pour une courbe du 3e ordre. Le reste de l'intersection se compose donc d'une droite. Réciproquement d'ailleurs, une quadrique passant par D, D' et une génératrice quelconque de (S) est un paraboloïde équilatère et ne coupe pas S en dehors de Δ et Δ'.

D'ailleurs, un paraboloïde équilatère quelconque passant par Δ et Δ', c'est-à-dire la quadrique la plus générale passant par ces deux droites coupe S suivant une courbe du cinquième ordre, composée de cinq génératrices.

Ces deux conoïdes ayant même axe et même plan directeur se coupent évidemment suivant un certain nombre de génératrices.

VI. — Les cubiques, sections de S par des paraboloïdes passant par D et D', ont deux points sur D et deux sur D'. Il est aisé de voir que les deux points situés sur D, (et aussi sur D') sont confondus, la tangente étant D, le plan osculateur étant $y = 0$. D'une façon générale, soit $f(\alpha_0, \beta) = 0$ l'équation d'une courbe tracée sur S; $\beta = 0$ est l'équation de D. Supposons que $f(\alpha_0, 0) = 0$. Si, au voisinage de $\beta = 0$, on a $\alpha - \alpha_0 = \beta \times \psi(\beta)$, $\psi(\beta)$ restant fini pour $\beta = 0$, les équations (7) montrent qu'au point α_0, 0, la courbe $f(\alpha, \beta) = 0$ est tangente à D, le plan osculateur étant $y = 0$. Car,

$$x = \alpha_0 - \frac{\alpha\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \qquad \text{et} \qquad x - \alpha_0 = \alpha - \alpha_0 - \frac{\alpha\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} = \beta\psi(\beta) - \frac{\alpha\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2},$$

$$y = \frac{\beta^3}{\alpha^2 + \beta^2}, \qquad z - h = \frac{-2\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} h,$$

ce qui démontre le fait énoncé pourvu que $\alpha_0 \neq 0$.

La condition $\psi(0)$ fini est vérifiée pour les équations de la courbe intersection de S avec une quadrique passant par D et D'. Si cette quadrique est quelconque, D la rencontre en trois points, deux confondus correspondant à $\beta = 0$ et un à l'infini correspondant à α infini, β fini.

VII. — *Recherche des quadriques* (Q) *par rapport auxquelles* S *est sa propre polaire réciproque.*

On peut abréger de la sorte les essais fait plus haut.

Δ et Δ', nous l'avons vu sont un système de droites ayant pour conjuguées par rapport à (Q), Δ et Δ'. Pareillement, D étant une droite singulière de S a pour conjuguée une droite singulière de S qui n'étant ni Δ, ni Δ' est D ou D'. On voit ainsi que D et D' ont pour conjuguées D et D'.

De là, quatre cas possibles :

1° (Q) circonscrite au quadrilatère D, D', Δ, Δ'. Equation générale

$$x(z - h) + \lambda y(z + h) = 0.$$

En substituant dans (9) on trouve comme transformée de S

$$\frac{\lambda^3 y^3}{x^3} = \frac{(z - h)^2}{\lambda^2 (z + h)^2}.$$

Nous savions déjà que les quadriques passant par Δ et Δ' ne convenaient pas. La transformée de S dépend linéairement comme on voit de λ^5.

2° (Q) passant par Δ, Δ' conjuguée par rapport à D et D' :

$$x(z + h) + \lambda y(z - h) = 0.$$

Substituons, on trouve

$$\frac{x^3}{\lambda^3 y^3} = \frac{(z + h)^2}{\lambda^2 (z - h)^2}.$$

C'est la même famille de surfaces que précédemment.

3° (Q) passant par D, D' conjuguée par rapport à Δ et Δ'. Ce sont les quadriques (10) qui échangent S et S_1.

4° (Q) conjuguée par rapport au quadrilatère D, D', Δ, Δ'. On retrouve la famille (13) qui est la famille cherchée.

VIII. — La courbe intersection d'une quadrique (13) et de S, comprend deux points triples sur Δ', deux points doubles sur Δ, sur D, sur D', et enfin quatre points doubles caractéristiques. En résumé, c'est une courbe du dixième degré avec 2 points triples et 10 points doubles. J'ignore si elle se décompose.

Si elle ne se décompose pas, elle est unicursale. En effet, supposons la quadrique (13) rapportée à ses génératrices rectilignes et soient λ, μ les coordonnées d'un de ses points. On démontre aisément la proposition suivante : la condition nécessaire et suffisante pour qu'une courbe tracée sur cette quadrique soit de degré 10 et ait 16 points doubles (distincts ou confondus en partie) est que l'on puisse exprimer les coordonnées d'un point de la courbe par $\lambda = \frac{P(t)}{Q(t)}$, $\mu = \frac{R(t)}{S(t)}$, P, Q, R, S étant des polynomes du cinquième degré en t.

ARNAUD DENJOY.

Bonnes solutions : MM. G. PÉLISSIER, à Toulouse; PARROD.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET BOURSES DE LICENCE (*Concours de* 1905, *fin.*)

GROUPE I

Épure.

1416. — *Un paraboloïde équilatère a une parabole principale de front. Cette parabole a pour sommet*

$$x = -4, \qquad y = 10, \qquad z = 12$$

et pour foyer

$$x = -4, \qquad y = 10, \qquad z = 11.$$

Représenter la surface opaque de ce paraboloïde comprise entre les deux plans de front $y = 6$, $y = 14$, *et au-dessus du plan horizontal* $z = 3$.

Déterminer les ombres produites en supposant les plans de projection opaques, les rayons lumineux étant à 45° sur la ligne de terre dans les deux projections.

On calculera les abscisses des points de rencontre de la ligne de terre avec le contour de l'ombre portée par l'objet ainsi défini.

L'axe de la surface est vertical et ses deux plans directeurs sont rectangulaires.

Ils ont pour traces horizontales les deux bissectrices sg, sg_1 de l'angle des axes menées par s.

Projections de la surface. — La parabole méridienne principale donnée par l'énoncé est une partie du contour apparent vertical ; cette courbe étant donnée, on la construit par points sans indications particulières et on la limite aux points a', b' de cote 3. Les sections de la surface par les plans de front $y = 6$ et $y = 14$ sont deux paraboles égales à la première et dont les projections verticales sont confondues puisque le plan $y = 10$ est un plan de symétrie de la surface. Nous obtenons les points de cette parabole qui sont sur les génératrices SG et SV situées dans le plan tangent au sommet en prenant les points d'intersection de ces génératrices par le plan de front $y = 14$, soient g, g' et v, v'. Nous en déduirons immédiatement le sommet e' puisque nous connaissons le paramètre de cette parabole $p = 2$, en prenant l'équation $x^2 = -2pz$ de cette parabole rapportée à son axe et sa tangente au sommet, et calculant la valeur de z qui correspond à l'abscisse $s'g' = eg = se = 4$, ce qui donne $s'e' = 4$. On pourrait aussi construire géométriquement le point e' en partant de la propriété connue de la sous-normale.

Cette parabole étant une section plane de la surface, il y a lieu de construire la tangente en un point, par exemple au point g' et pour cela prendre l'intersection du plan tangent à la surface en ce point avec le plan de front du point G. Ce plan tangent est défini par les deux génératrices qui passent au point G et dont l'une est SG ; l'autre a sa projection horizontale gl parallèle au second plan directeur et sera déterminée par le point où elle rencontre une génératrice du premier système. Choisissons celle qui est parallèle à la direction des rayons lumineux et dont la projection verticale s'obtient de suite, car étant inclinée à 45° sur l'axe de la parabole méridienne à laquelle elle est tangente, elle passe par le pied de la directrice et a son point de contact sur la perpendiculaire à l'axe menée par le foyer. On a ainsi $n'p'$, np dont la projection horizontale coupe au point m la génératrice considérée précédemment et fait connaître le point m qui détermine la projection verticale $m'g'$ de cette génératrice. On en déduit la ligne de front ls, $l's'$ du plan tangent en G et par suite la tangente $g't'$ parallèle à $l's'$. Nous avons aussi construit la génératrice bq, $b'q'$ qui donne la tangente en b' à la méridienne principale, ainsi que la tangente au point d' et la génératrice $d'u'$ qui déterminent le plan tangent en D à la surface.

Le contour apparent vertical de la surface est ainsi déterminé par les deux paraboles $a's'b'$, $c'e'd'$ et la projection $a'c'$, $b'd'$ de la section par le plan $z = 3$.

Le contour apparent horizontal est défini par les projections horizontales cd, c_1d_1 des paraboles de front et la section de la surface par le plan $z = 3$. Cette section est une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont les traces des plans directeurs gv_1 et vg_1 et dont les sommets réels sont les projections a et b des points où s'arrête la méridienne principale. On doit en construire un point courant et la tangente en ce point, par exemple celui qui est sur la génératrice GL, à l'intersection h, h' de cette génératrice et du plan $z = 3$. On obtient la tangente en h en menant la seconde génératrice qui passe par ce point ; soit hk parallèle à gs et qui rencontre en k, k' la génératrice de système différent sg_1, $s'g'$, d'où l'on déduit la projection verticale $k'h'$,

que l'on aurait pu aussi construire en menant de h' la seconde tangente à la méridienne. L'horizontale du plan des deux génératrices qui touche la surface au point H est la droite KG dont la projection horizontale kg donne la direction de la tangente au point h. Nous avons la tangente en d à l'hyperbole en menant la parallèle à l'horizontale zw du plan tangent en D à la surface.

Ombre propre. — La ligne d'ombre propre est l'intersection de la surface par le plan diamétral conjugué de la direction des rayons lumineux. Ici, cette direction étant parallèle au plan directeur SV_1, son plan diamétral est parallèle à ce plan directeur et coupe la surface suivant une génératrice du système correspondant et qui est précisément celle que nous avons considérée, puisque ce plan diamétral doit contenir la génératrice elle-même dont il est le plan conjugué. Nous avons ainsi comme ligne d'ombre propre nr, $n'r'$ entièrement vue en projection horizontale mais dont la partie $p'r'$ est cachée en projection verticale.

Pour reconnaître la région éclairée, il est nécessaire de distinguer les deux projections de la surface car, abstraction faite des lignes de contour apparent, toute la portion de surface vue en projection verticale est cachée en projection horizontale, et *vice versa*, quand on suppose la surface opaque. On pourrait dire, en ne considérant que la partie située en avant du plan de front de symétrie que l'une des portions est l'envers de l'autre en sorte que ce qui est éclairé sur l'une est nécessairement caché sur l'autre. Cela posé, si l'on regarde la projection verticale et qu'on mène par le point B une parallèle aux rayons lumineux mais en sens opposé, cette droite ne rencontre plus la surface, et il en est de même de tous les points de l'arc BD. Donc tous ces points sont dans la région éclairée pour un observateur qui regarde le plan vertical, et cette région s'étend jusqu'à la ligne d'ombre propre et au contour apparent vertical.

Si maintenant on regarde la projection horizontale, il résulte de ce qui a été dit plus haut que tous les points de cette région sont au contraire dans l'ombre, en sorte que la région éclairée est celle qui comprend le point a et s'arrête à la génératrice nr et à la ligne de contour apparent horizontal. On pourrait d'ailleurs le reconnaître directement comme pour l'autre projection.

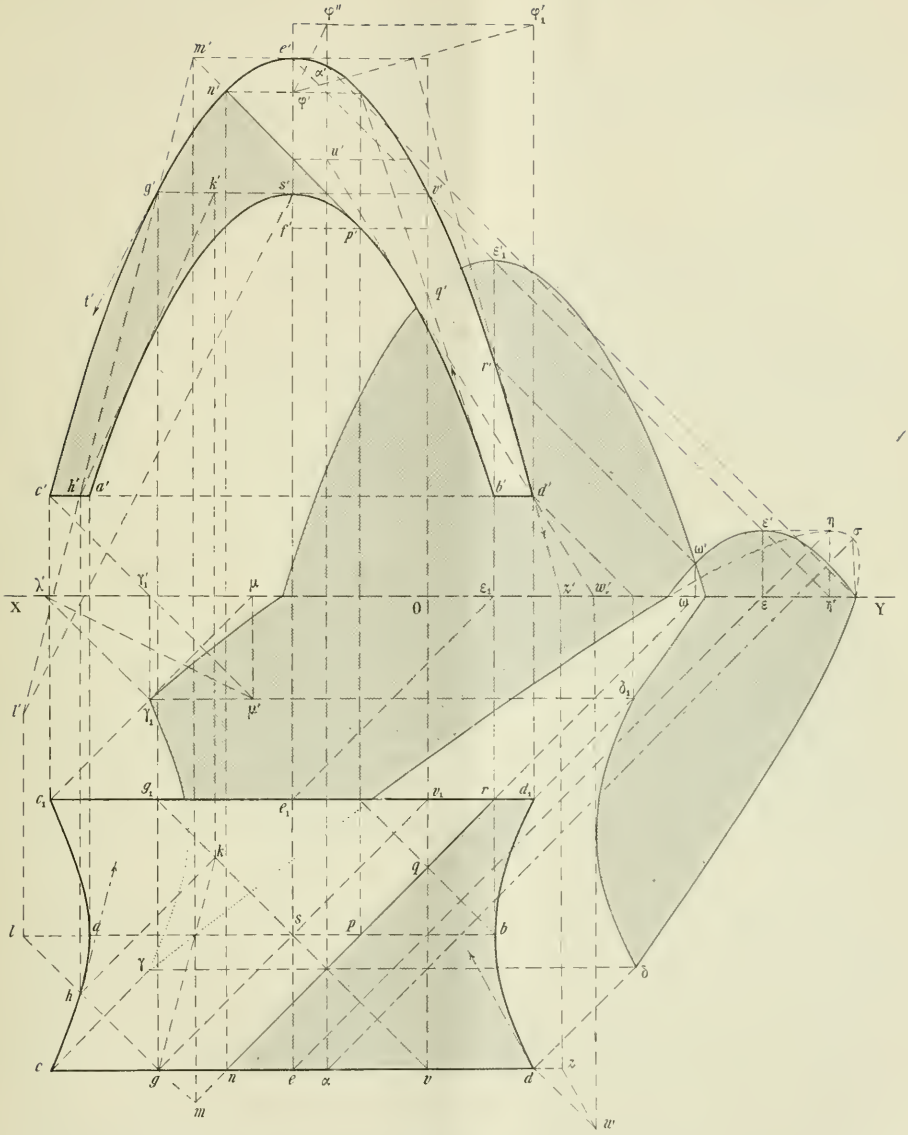
Ombre portée. — L'ombre portée est l'intersection de chaque plan de projection par le cylindre parallèle aux rayons lumineux et s'appuyant sur la ligne d'ombre propre. Or remarquons qu'ici la ligne d'ombre propre comprend en réalité les lignes de section de la surface par les plans de front et par le plan horizontal qui séparent l'endroit de l'envers, et que devrait traverser un mobile pour passer de la région éclairée à la région de l'ombre en passant de l'endroit à l'envers ou *vice versa*. Nous avons donc à considérer les deux cylindres paraboliques ayant pour bases les paraboles de front et le cylindre hyperbolique ayant pour base la section horizontale de la surface.

Plan vertical. — La ligne d'ombre portée sur le plan vertical se compose de deux paraboles identiques à la parabole de front déjà construite et dont les axes sont parallèles à son axe. On en a les sommets en prenant la trace verticale des rayons lumineux qui passent par les sommets ee', e_1e' des paraboles de front, soient ε' et ε'_1. On construira ces paraboles par points ou mieux, en reportant simplement la première préalablement tracée sur une pièce mobile. Les deux paraboles se coupent au point ω' où la génératrice d'ombre propre qui est commune aux deux cylindres traverse le plan vertical. Si à partir de ce point ω' on se dirige, sur le plan vertical, dans la région extérieure à la fois aux deux courbes, cette région est certainement éclairée. Il en sera donc de même de la région opposée par le sommet de l'angle curviligne ω', c'est-à-dire intérieure aux deux paraboles, tandis que l'autre partie du plan sera dans l'ombre.

Plan horizontal. — On a de suite la trace horizontale du cylindre hyperbolique qui se compose des deux arcs $\gamma\gamma_1$ et $\delta\delta_1$, égaux à cc_1 et dd_1. La trace du cylindre parabolique cd est une parabole dont on a de suite un diamètre $e\varepsilon_1$ conjugué de la direction parallèle à XY et qui peut servir à construire la courbe par points.

On a d'ailleurs l'axe de cette parabole en menant au cylindre un plan tangent parallèle à la direction horizontale, perpendiculaire sur $c\gamma_1$. A cet effet, nous avons déterminé la frontale $\lambda'\mu'$ d'un plan parallèle à ce plan tangent en menant par le point γ_1, trace horizontale d'une génératrice du cylindre une horizontale $\gamma_1\lambda$ de ce plan et joignant sa trace verticale λ' à celle μ' de la génératrice, ce qui a donné $\lambda'\mu'$. Nous avons ensuite pris le symétrique φ'' du foyer φ' de la parabole base du cylindre par rapport à la tangente cherchée qui est parallèle à $\lambda'\mu'$ et nous en avons déduit le point de contact $\alpha'\alpha$, puis la génératrice correspondante dont la trace horizontale a donné le sommet τ sur l'axe $\alpha\tau$ de la parabole.

On construirait pareillement la seconde parabole partant des ombres γ_1 et δ_1 portées par les points c_1 et d_1, mais comme on n'a que des arcs relativement très petits de cette courbe à tracer et sur une portion éloignée du sommet, on peut immédiatement joindre ces points à ceux où l'ombre de la parabole sur le plan vertical coupe la ligne de terre. On a d'ailleurs la région de l'ombre en la faisant correspondre à celle qu'on a déterminée sur le plan vertical, et qui indique les points d'XY situés dans l'ombre.



ÉCHELLE : $\frac{3}{5}$.

Le calcul permet de déterminer les points où l'ombre portée coupe XY. Le paraboloïde a pour équation par rapport aux axes de la figure

$$(x+4)^2-(y-10)^2=4(12-z).$$

La projection commune des paraboles de front a pour équation $(x+4)^2=4(16-z)$. La direction des rayons lumineux est $x=-y=-z$. Le plan diamétral correspondant est $x+y-8=0$.

Le cylindre parallèle à la direction considérée et ayant pour directrice la parabole

$$\left\{\begin{array}{l} y=6, \\ (x+4)^2-4(16-z)=0 \end{array}\right.$$

a pour équation

$$y-6=z-16+\left(\frac{x+y-2}{2}\right)^2.$$

Il est traversé par xy aux points ayant pour abscisses les racines de l'équation

$$(x-2)^2=40, \qquad \text{d'où} \qquad x=2\pm 2\sqrt{10}.$$

Le second cylindre a pour équation

$$y-14=z-16+\left(\frac{x+y-10}{2}\right)^2;$$

il est traversé par xy aux points ayant pour abscisses les racines de l'équation

$$(x-10)^2=8, \qquad \text{d'où} \qquad x=10\pm 2\sqrt{2}.$$

Le calcul permet de vérifier simplement les constructions précédentes.

GROUPE II

Physique.

1417. — 1° *Une membrane élastique infiniment mince, non pesante, est tendue dans l'intérieur d'une ouverture circulaire, horizontale, de rayon r, pratiquée dans la paroi d'un réservoir. La tension superficielle de la membrane est uniforme, en tout semblable à la tension superficielle d'un liquide. Elle vaut* T *dynes par centimètre.*

On exerce à l'intérieur du réservoir une pression $P+p$, *supérieure de p dynes par centimètre carré à la pression extérieure* P. *La membrane prend alors la forme d'une calotte sphérique de rayon* R, *et le milieu de cette membrane se soulève d'une hauteur h.*

On demande d'écrire la condition d'équilibre de la membrane. Elle donnera une relation entre les quantités T, *p et r. On calculera ensuite quelle est la hauteur d'eau équivalente à l'excès de pression p quand on a*

$$r=0^m,01; \qquad T=150 \text{ dynes par cm}; \qquad h=\frac{6}{10} \text{ de micron}.$$

2° *La membrane étant ainsi gonflée de la quantité qui vient d'être dite en dernier lieu, on place au-dessus et horizontalement une lame de verre à faces parallèles, dont la face inférieure est à un niveau plus élevé de 8 microns que le sommet de la calotte sphérique.*

On examine par réflexion la lame mince d'air limitée par la face inférieure de la plaque de verre et par la membrane que l'on suppose réfléchir la lumière comme le ferait du verre.

On demande de décrire, avec croquis à l'appui, l'aspect que présente la lame mince, en supposant que la lumière soit monochromatique et que sa longueur d'onde soit de $0^\mu,8$.

Comment cet aspect se modifie-t-il progressivement quand on laisse la membrane se dégonfler et redevenir plane ?

Qu'aurait-on vu, enfin, si l'on s'était servi d'une lumière formée de 2 radiations ayant respectivement comme longueurs d'onde $0^\mu,8$ *et* $0^\mu,4$?

1. Une relation connue entre la tension superficielle et la pression donne ici

$$p = \frac{2T}{R}.$$

Pour avoir p exprimé avec h et r, remarquons qu'on a $r^2 = h(2R - h)$, d'où $R = \frac{r^2 + h^2}{2h}$ ou, comme h est négligeable vis-à-vis de r, $R = \frac{r^2}{2h}$. Remplaçons,

$$p = \frac{4Th}{r^2}.$$

D'autre part, une colonne d'eau de hauteur x produit une pression xg. On doit donc avoir

$$\frac{4Th}{r^2} = xg, \qquad \text{d'où} \qquad x = \frac{4Th}{r^2 g} = \frac{4 \times 150 \times 0{,}00006}{1 \times 981} = 0^{cm}{,}000\,0367.$$

2. La lame d'air comprise entre la membrane et la plaque donne naissance à des anneaux de Newton. Il y a extinction là où l'épaisseur est un nombre pair de quarts de longueur d'onde, c'est-à-dire au milieu et à l'endroit où la hauteur de la membrane est $0^{\mu}{,}2$. Il y a maximum de lumière là où l'épaisseur est un nombre impair de quarts de longueur d'onde, en particulier sur les bords. Si la membrane se dégonfle, les plages sombres viennent s'évanouir au centre.

La longueur d'onde de la seconde radiation étant exactement la moitié de la première, les anneaux sombres de la seconde couleur sont deux fois plus serrés, c'est-à-dire coïncident à la fois avec les anneaux sombres et avec les anneaux brillants de la première.

Remarque. — $0^{\mu}{,}8$ est une longueur d'onde du commencement de l'infra-rouge : il est probable que la couleur ne serait pas visible. $0^{\mu}{,}4$ correspond à l'extrême violet.

Chimie.

1418. — *Un mélange* M *d'air et de vapeur d'eau passe sur du charbon chauffé au rouge : il en résulte un mélange gazeux* G *que l'on recueille sur la cuve à eau,* 25^{cc} *de ce mélange* G, *mis au contact d'une solution de potasse, sont réduits à* $21^{cc}{,}7$, *qu'une agitation avec une solution alcaline de pyrogallol ramène à* $21^{cc}{,}1$. *Ce dernier résidu est additionné de* 12^{cc} *d'oxygène et brûlé dans un eudiomètre ; après la détonation, le gaz restant occupe* $18^{cc}{,}1$; *agité avec une solution alcaline de pyrogallol, il est réduit à* $7^{cc}{,}9$. *On demande :*

1° *De déduire de ces données la composition en volume du mélange* G ;

2° *De vérifier que les résultats obtenus satisfont l'équation de condition qui résulte de la composition qualitative du mélange* M.

Les 25^{cc} du mélange G comprennent x de gaz carbonique, y d'oxyde de carbone, z d'hydrogène, u d'oxygène, v d'azote.

Le volume x est égal à l'absorption produite par la potasse : $x = 3{,}3$.

Le volume u est égal à l'absorption produite par le pyrogallol : $u = 0{,}6$.

Le résidu final ne peut être formé que d'azote : $v = 7{,}9$.

Il ne peut, en effet, rester d'hydrogène, car les 12^{cc} d'oxygène seraient capables de brûler complètement $21^{cc}{,}1$ d'un mélange quelconque formé d'oxyde de carbone et d'hydrogène.

Donc $$y + z = 25 - 3{,}3 - 0{,}6 - 7{,}9 = 13{,}2.$$

Considérons maintenant la combustion eudiométrique. Elle fait passer le volume du gaz soumis à la détonation de $21{,}1 + 12 = 33{,}1$ à $18{,}1$, produisant par conséquent une contraction de 15^{cc}. Or cette contraction doit représenter la moitié du volume de l'oxyde de carbone et une fois et demi le volume de l'hydrogène.

Donc $$\frac{1}{2}y + \frac{3}{2}z = 15.$$

Les deux dernières équations donnent $y \doteq 4{,}8$ et $z = 8{,}4$.

La composition du mélange G est donc

Gaz carbonique	3,3,
Oxyde de carbone	4,8,
Hydrogène	8,4,
Oxygène	0,6,
Azote	7,9.
Total	25,0.

L'oxygène total occuperait le volume $3{,}3 + 2{,}4 + 0{,}6 = 6{,}3$.

L'oxygène provenant de la vapeur d'eau, correspondant à l'hydrogène, occuperait 4,2.

La différence 2,1 provient de l'air : c'est bien la proportion correspondant à 7,9 d'azote.

Solution partielle de M. G. Cotty, de Dijon.

MÉCANIQUE

1410. — *On suppose que deux points matériels* M *et* μ *de masse* $2k$ *soient astreints à se mouvoir respectivement sur deux droites rectangulaires* D *et* Δ. *Chacun d'eux est attiré par l'autre et par le pied, sur la droite qu'il décrit, de la perpendiculaire commune à* D *et* Δ. *Les forces d'attraction sont proportionnelles à la distance et égales à* k *pour l'unité de distance.*

1° *Montrer que la droite* Mμ *engendre une surface du 4e degré,* S ; *évaluer le solide limité par la surface* S *entre deux plans parallèles à la fois à* D *et à* Δ.

2° *Un plan quelconque parallèle à* D *et à* Δ *donne dans la surface* S, *à distance finie, une ellipse. Lieu des foyers de cette ellipse.*

3° *Dans un cas particulier, la surface* S *se réduit à un paraboloïde hyperbolique. Les conditions initiales devenant alors arbitraires, trouver le lieu des axes de ce paraboloïde.*

4° *Si les droites* D *et* Δ *sont dans un même plan, la droite* Mμ *reste tangente à une courbe du 6e degré et de 4e classe qu'on peut considérer comme le lieu des centres des hyperboles équilatères tangentes à une ellipse, passant par le centre de cette ellipse et de directions asymptotiques données.*

1° Prenons la droite D pour axe des z, pour axe des x la perpendiculaire commune à D et Δ ; cette dernière droite aura pour équations

$$\left| \begin{array}{l} x - a = 0, \\ z = 0. \end{array} \right.$$

Soient $0, 0, z$ les coordonnées du point M et z_0, z_0' ses conditions initiales ; $a, y, 0$ celles du point μ et y_0, y_0' ses conditions initiales.

Le point matériel M est soumis aux deux forces dont les composantes sont $0, 0, -kz$ et $ka, ky, -kz$.

Nous n'avons pas, ici, à nous occuper de la réaction supposée normale de Oz sur le point matériel M. Son équation différentielle du mouvement est

$$2k\frac{d^2z}{dt^2} = -2kz \qquad \text{ou} \qquad \frac{d^2z}{dt^2} + z = 0$$

dont la solution est $$z = z_0 \cos t + z_0' \sin t.$$

De même l'y du point μ sera

$$y = y_0 \cos t + y'_0 \sin t.$$

Donc, les coordonnées d'un point quelconque de la surface (S) en fonction des deux paramètres t et λ sont

$$(1) \qquad x = \frac{a}{1+\lambda}, \qquad y = \frac{y_0 \cos t + y'_0 \sin t}{1+\lambda}, \qquad z = \frac{\lambda(z_0 \cos t + z'_0 \sin t)}{1+\lambda}.$$

Trouver son équation cartésienne revient presque de suite à éliminer t entre les deux équations

$$y_0 \cos t + y'_0 \sin t = y(1+\lambda), \qquad z_0 \cos t + z'_0 \sin t = \frac{z(1+\lambda)}{\lambda},$$

d'où l'on tire

$$\cos t = \frac{1+\lambda}{y_0 z'_0 - z_0 y'_0}\left(y z'_0 - \frac{z y'_0}{\lambda}\right), \qquad \sin t = \frac{1+\lambda}{y_0 z'_0 - z_0 y'_0}\left(\frac{z y_0}{\lambda} - y z_0\right)$$

et, par suite,

$$(1+\lambda)^2\left[\left(y z'_0 - \frac{z y'_0}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{y_0 z}{\lambda} - z_0 y\right)^2\right] = (y_0 z'_0 - z_0 y'_0)^2.$$

Comme on a $1+\lambda = \frac{a}{x}$ et $\lambda = \frac{a-x}{x}$, l'équation de la surface (S) est

$$(2) \qquad a^2[(y'a - x)z'_0 - xzy'_0]^2 + (xzy_0 - y'a - x)z_0)^2] = x^2(a-x)^2(y_0 z'_0 - z_0 y'_0)^2.$$

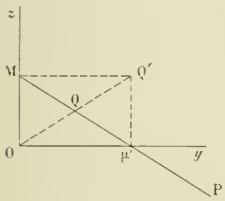
Elle est bien du quatrième degré. Mais ce calcul suppose que $y_0 z'_0 - z_0 y'_0$ soit différent de zéro. Si l'on a $y_0 z'_0 - z_0 y'_0 = 0$, la surface se réduit au paraboloïde hyperbolique équilatère

$$y'a - x)z_0 - xzy_0 = 0,$$

ce qu'il est aisé de prévoir puisque le z du point M et l'y du point μ sont proportionnels, et que, par suite, les points M et μ décrivent sur les droites D et Δ deux divisions semblables dont les pieds sur la perpendiculaire commune Ox sont deux points homologues.

Nous évaluerons plus loin le solide compris entre deux plans parallèles à la fois aux droites D et Δ.

2° Un plan quelconque, parallèle au plan des yz, donne une ellipse à distance finie dans la surface S. Les formules (1) et l'équation (2) le montrent de suite. On peut le voir géométriquement en cherchant la projection sur le plan des yz d'une section parallèle à ce plan. C'est le lieu d'un point P de la projection $M\mu'$ de $M\mu$ qui divise $M\mu'$ dans un rapport donné. Or, le point Q' de coordonnées $O\mu'$ et OM décrit une ellipse (composition de deux mouvements vibratoires rectilignes), donc aussi le point Q, milieu de OQ'. Or le rapport des coordonnées de même nom des points P et Q est constant. Le point P décrit donc comme le point Q une ellipse de centre O.



Une de ces ellipses a pour équations

$$(3) \qquad x = \frac{a}{1+\lambda}, \qquad y = \frac{y_0 \cos t + y'_0 \sin t}{1+\lambda}, \qquad z = \frac{\lambda(z_0 \cos t + z'_0 \sin t)}{1+\lambda}.$$

λ restant fixe, t variant. Cherchons les foyers de la projection sur le plan des yz. Exprimons pour cela que la droite $y - Y = m(z - Z)$ est tangente à cette projection, c'est-à-dire que l'équation

$$\frac{y_0 \cos t + y'_0 \sin t}{1+\lambda} - Y = \frac{m\lambda}{1+\lambda}(z_0 \cos t + z'_0 \sin t) - mZ$$

a ses racines confondues, ou que

$$\frac{(y_0 - m\lambda z_0)^2}{(1+\lambda)^2} + \frac{(y'_0 - m\lambda z'_0)^2}{(1+\lambda)^2} = (Y - mZ)^2.$$

Le point Y, Z sera foyer si cette équation en m a pour racines $\pm i$, d'où les conditions

$$(4)\qquad \begin{cases} YZ = \dfrac{\lambda(y_0z_0 + y_0'z_0')}{(1+\lambda)^2}, \\ Y^2 - Z^2 = \dfrac{y_0^2 + y_0'^2 - \lambda^2(z_0^2 + z_0'^2)}{(1+\lambda)^2}. \end{cases}$$

L'élimination de λ entre ces relations et la suivante

$$(5)\qquad X = \frac{a}{1+\lambda}$$

donne les équations de la courbe lieu des foyers :

$$YZ = \frac{X(a-X)}{a^2}(y_0z_0 + y_0'z_0'),$$

$$Y^2 - Z^2 = \frac{X^2}{a^2}(y_0^2 + y_0'^2) - \frac{(a-X)^2}{a^2}(z_0^2 + z_0'^2).$$

C'est l'intersection de deux quadriques.

Evaluation du solide. — Soit A l'aire de l'ellipse (3). Le solide cherché est $\int_{x_0}^{x_1} A\,dx$.

Evaluons A.

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} y\,dz - z\,dy = \frac{\lambda}{2(1+\lambda)^2}\int_0^{2\pi}(y_0z_0' - z_0y_0')\,dt,$$

$$A = \frac{\pi\lambda}{(1+\lambda)^2}(y_0z_0' - z_0y_0'), \qquad \text{ou, en fonction de } x,$$

$$A = \frac{\pi(y_0z_0' - z_0y_0')}{a^2}x(a-x).$$

D'où, pour expression du solide,

$$\frac{\pi(y_0z_0' - z_0y_0')}{a^2}\Big|\, x(a-x)\,\Big|_{x_0}^{x_1}.$$

Supposons que la surface S se réduise au paraboloïde hyperbolique $y(a-x) - \theta z x = 0$.

Faire varier les conditions initiales revient à faire varier θ.

Ce paraboloïde équilatère passe par D et Δ et aussi par Ox. Cette génératrice Ox est perpendiculaire au plan directeur yOz, donc elle contient le sommet, et l'axe diffère par rotation d'un angle droit autour de Ox de la génératrice perpendiculaire au plan directeur passant par Ox, génératrice dont les équations sont de la forme

$$\begin{cases} \theta x = \mu(a-x), \\ \mu z = y, \end{cases}$$

pour la valeur de $\mu = \dfrac{1}{\theta}$.

Les équations de l'axe sont donc

$$x = \frac{a}{1+\theta^2},$$

$$y + \theta z = 0,$$

et le lieu de l'axe a pour équation

$$x = \frac{az^2}{y^2 + z^2}.$$

C'est une surface du troisième degré qui a deux génératrices dans un plan perpendiculaire à Ox ; la construction de ces deux génératrices qui est aisée peut ainsi s'énoncer : en se donnant pour une

génératrice d'une surface réglée le point central et les plans tangents en deux points de cette génératrice, trouver le plan tangent au point central.

Nous nous bornons à ces remarques.

4° Si D et Δ sont dans le même plan, $M\mu$ a pour équation

$$(5)\qquad \frac{y}{y_0\cos t + y_0'\sin t} + \frac{z}{z_0\cos t + z_0'\sin t} = 1.$$

Identifions l'équation de cette droite avec l'équation $uy + vz + w = 0$; nous tirons

$$y_0\cos t + y_0'\sin t = -\frac{w}{u}; \qquad z_0\cos t + z_0'\sin t = -\frac{w}{v}.$$

D'où l'équation tangentielle de l'enveloppe de $M\mu$

$$\left(\frac{z_0'}{u} - \frac{y_0'}{v}\right)^2 + \left(\frac{z_0}{u} - \frac{y_0}{v}\right)^2 = \frac{1}{w^2}.$$

Elle est bien du quatrième degré et on remarquera que si le point Q' décrit un cercle, l'enveloppe de $M\mu$ est une hypocycloïde à quatre rebroussements. Pour avoir l'équation ponctuelle de cette courbe écrivons l'équation (5) sous la forme

$$(6)\qquad \frac{y}{y_0\cos(t+\alpha)} + \frac{z}{z_0\cos(t+\beta)} - 1 = 0.$$

La dérivée par rapport à t donne

$$\frac{y\sin(t+\alpha)}{y_0\cos^2(t+\alpha)} + \frac{z\sin(t+\beta)}{z_0\cos^2(t+\beta)} = 0,$$

ou

$$\frac{y}{\dfrac{y_0\cos(t+\alpha)}{\dfrac{\cos(t+\alpha)}{\sin(t+\alpha)}}} = \frac{z}{\dfrac{z_0\cos(t+\beta)}{-\dfrac{\cos(t+\beta)}{\sin(t+\beta)}}}$$

et, en tenant compte de (6),

$$\frac{y}{\dfrac{y_0\cos(t+\alpha)}{\dfrac{\cos(t+\alpha)}{\sin(t+\alpha)}}} = \frac{z}{\dfrac{z_0\cos(t+\beta)}{-\dfrac{\cos(t+\beta)}{\sin(t+\beta)}}} = \frac{1}{\dfrac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(t+\alpha)\sin(t+\beta)}},$$

ou enfin

$$y = \frac{y_0\cos^2(t+\alpha)\sin(t+\beta)}{\sin(\beta-\alpha)}, \qquad z = -\frac{z_0\cos^2(t+\beta)\sin(t+\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)}.$$

Ces expressions donnent en fonction de t les coordonnées d'un point d'une courbe du sixième degré, comme on le voit en prenant $\operatorname{tg}\frac{t}{2}$ pour variable.

Sous cette forme, on peut construire la courbe en cherchant les variations de y et z, qui montrent l'existence de quatre points de rebroussement, pour lesquels y' et z' sont nuls et qui sont donnés par

$$\cos(t+\alpha)\cos(t+\beta) - 2\sin(t+\alpha)\sin(t+\beta) = 0,$$

ou

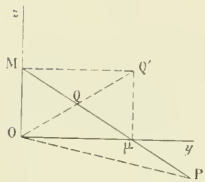
$$\cos(2t+\alpha+\beta) = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(2t+\alpha+\beta)]$$

ou enfin

$$3\cos(2t+\alpha+\beta) = \cos(\alpha-\beta).$$

Laissant le soin au lecteur d'achever la construction de la courbe, nous cherchons sa définition géométrique ponctuelle.

Rappelons pour cela qu'elle est l'enveloppe des droites $M\mu$ telles que le point Q', de coordonnées OM et $O\mu$, décrive une ellipse de centre O.



Cherchons les droites $M\mu$ qui passent par le point P. Elles seront obtenues en prenant les points communs à l'ellipse lieu du point Q, milieu de $M\mu$ et à la courbe lieu du point Q quand la droite $M\mu$ passe par le point fixe P.

Or les droites OQ et PQ se correspondent homographiquement. Donc ce second lieu est une conique passant par O et P. Elle a évidemment Oy et Oz comme directions asymptotiques et les tangentes en O et en P sont parallèles à la direction conjuguée harmonique de OP par rapport aux axes. Donc le centre de cette hyperbole équilatère est le milieu de OP. Ce sont là des conséquences immédiates de la génération de Chasles qui montrent que les quatre tangentes menées de P à la courbe enveloppe de $M\mu$ passent par les points communs à l'ellipse lieu de Q' et à une hyperbole équilatère passant par O, ayant Oy et Oz pour directions asymptotiques et de centre P. Exprimer que deux de ces quatre tangentes sont confondues, c'est exprimer que le point P est le point de contact de $M\mu$ avec son enveloppe et l'hyperbole équilatère que nous venons de considérer est alors tangente à l'ellipse lieu de Q'.

La proposition annoncée dans l'énoncé est donc prouvée.

Bonnes solutions : MM. G. Pélissier, à Toulouse; Dulimbert, à Grenoble ; M. Grangier, à Mouleydier ; Dessimond, à Alger.

PHYSIQUE

1421. — *Une bille est posée sans vitesse initiale sur une surface ayant la forme d'un cylindre circulaire droit dont l'axe est horizontal; calculer la longueur du pendule simple synchrone en fonction de la distance a du centre de la bille à l'axe du cylindre.*

Même question, la bille étant remplacée par un cylindre plein ou creux dont l'axe est parallèle à celui qui sert de support.

Soit r le rayon de la bille et v la vitesse de son centre.

On sait que la génératrice D du point de contact est un axe instantané de rotation et que les vitesses des divers points de la bille sont les mêmes, à un instant donné, que si celle-ci tournait autour de D avec une vitesse angulaire ω telle que $v = r\omega$. La force vive sera donc $\omega^2 I$, I désignant le moment d'inertie de la bille par rapport à D. Or, en désignant par M la masse de celle-ci, on a

$$I = M\left(r^2 + \frac{2}{5}r^2\right) = \frac{7}{5}Mr^2, \quad \text{d'où } \omega^2 I = \frac{7}{5}Mv^2.$$

D'autre part, si O désigne le centre de la bille et α l'angle de DO avec la verticale, le travail du poids de la bille est $Mga(\cos\alpha - \cos\alpha_0)$. On a donc, en appliquant le principe des forces vives,

$$\frac{7}{10}Mv^2 = Mga(\cos\alpha - \cos\alpha_0),$$

ou bien, en mettant en évidence la vitesse angulaire de rotation autour de l'axe du cylindre,

$$\frac{7}{10}a\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = g(\cos\alpha - \cos\alpha_0).$$

Comparons cette équation à celle qu'on obtient dans la théorie du pendule simple :

$$\frac{1}{2}\, l\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = g(\cos\alpha - \cos\alpha_0).$$

En les identifiant, nous aurons la longueur du pendule simple synchrone de la bille :

$$l = \frac{7}{5}\, a.$$

On ferait un raisonnement semblable pour le cas où la bille est remplacée par un cylindre. Si celui-ci est plein, on aura, r étant son rayon,

$$I = M\left(r^2 + \frac{1}{2} r^2\right), \qquad \text{d'où} \qquad l = \frac{3}{2}\, a.$$

S'il est creux et à parois minces

$$I = 2Mr^2, \qquad l = 2a.$$

M. LAURENCE.

Dans la solution qu'il nous a envoyée, M. Grangier a supposé que la bille glissait sur la surface sans rouler, comme si elle avait été suspendue à un fil.

EXAMENS DE 1905 (*Suite.*)

CERTIFICAT D'ÉTUDES SUPÉRIEURES (*Lyon, novembre* 1905.)

Mathématiques préparatoires à la physique et aux sciences industrielles.

Epreuve théorique.

I. — **1491.** Soit (C) la courbe représentée, en coordonnées rectangulaires, par l'équation $y = f(x)$. Soit M un point quelconque de (C), N le point où la normale menée à (C) au point M rencontre l'axe Ox et soit P le pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine O sur la normale MN.

1° Former l'équation différentielle à laquelle doit satisfaire la fonction $y = f(x)$ pour que l'on ait constamment $OP = MN$, lorsque M décrit la courbe (C).

2° Intégrer cette équation différentielle.

II. — Étude du mouvement d'un point matériel soumis à une force centrale. Etablir les équations différentielles dont il convient de faire usage dans l'étude de ce mouvement. Appliquer au cas du point matériel M attiré vers un point fixe O en raison inverse du carré de sa distance à ce point fixe.

Epreuve pratique.

Etant donnée la surface représentée, en coordonnées rectangulaires, par l'équation

$$7x^2 - 13y^2 + 6z^2 + 24xy + 12yz - 12zx = 84,$$

trouver la forme réduite à laquelle on peut ramener l'équation de cette surface, par un changement de coordonnées rectangulaires convenablement choisi. Calculer les formules de ce changement de coordonnées, et dire quelle est la surface considérée.

NOTA. — On remarquera que l'équation en S, qui sert à trouver la forme réduite et la transformation demandées, a ses racines rationnelles.

PRÉPARATION A L'ÉPREUVE DE DESSIN GRAPHIQUE

pour l'admission à l'École polytechnique.

Description. — La niche sphérique se compose d'un demi-cylindre creux surmonté d'un quart de sphère ; elle sert d'ornement en architecture et est ordinairement destinée à recevoir une statue, un vase, etc.

Dans notre exemple on distingue :

1° La niche proprement dite, excavation de la forme décrite ci-dessus pratiquée dans la muraille. La partie supérieure, en forme de quart de sphère creuse, se compose de cinq *voussoirs* V, V dont les *joints de coupe* J, J rayonnent vers le point O′ en projection verticale ; ces voussoirs se terminent à la partie inférieure sur un *voussoir* V_1 de forme tronconique appelé *trompillon*. Le plan de front passant par le centre de la sphère est orné autour de l'arc par une *archivolte* moulurée A ;

2° Deux pilastres P en forme de *gaine* ornant chaque côté de la niche et reposant sur une console C également en forme de *gaine* ;

3° Au-dessus des deux pilastres, deux consoles D, D ornées de cannelures supportant un entablement composé d'une frise F et d'une corniche G.

Exécution du dessin. — Cadre 250mm×200mm. — Les mesures sont données en centimètres ; sur le dessin au net, on les réduira à l'échelle de 0m,07 par mètre.

Trait. — Le trait de l'épreuve d'architecture pouvant, à l'examen, être demandé au crayon seulement, on recommande de tracer l'esquisse légèrement, de gommer faiblement et de faire ensuite, au crayon n° 3, le trait bien égal et bien ferme, pas trop fin.

Tracer d'abord les arcs de cercle pour faciliter les raccordements. On ne met pas de traits de force dans le dessin d'architecture.

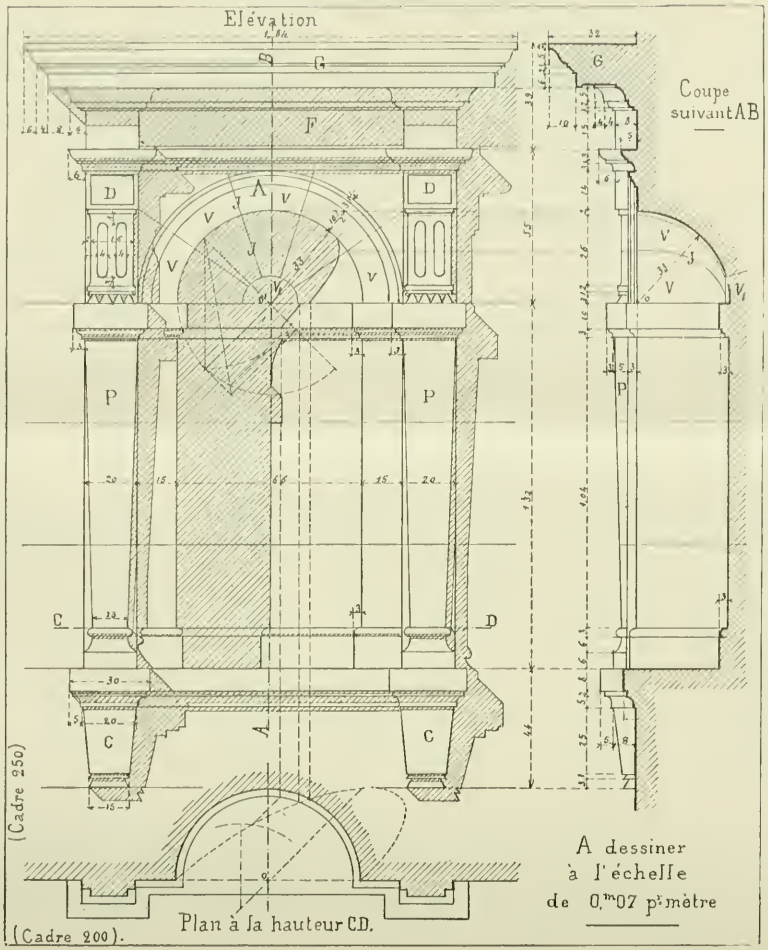
Lavis et ombres. — La pierre, en coupe, sera indiquée par une teinte rose très clair, de carmin ou de laque carminée.

La couleur de la pierre en élévation ne saurait être conventionnelle. Elle sera choisie au mieux de l'effet à produire.

Dans le dessin on a indiqué, sur l'élévation, toutes les ombres par des hachures.

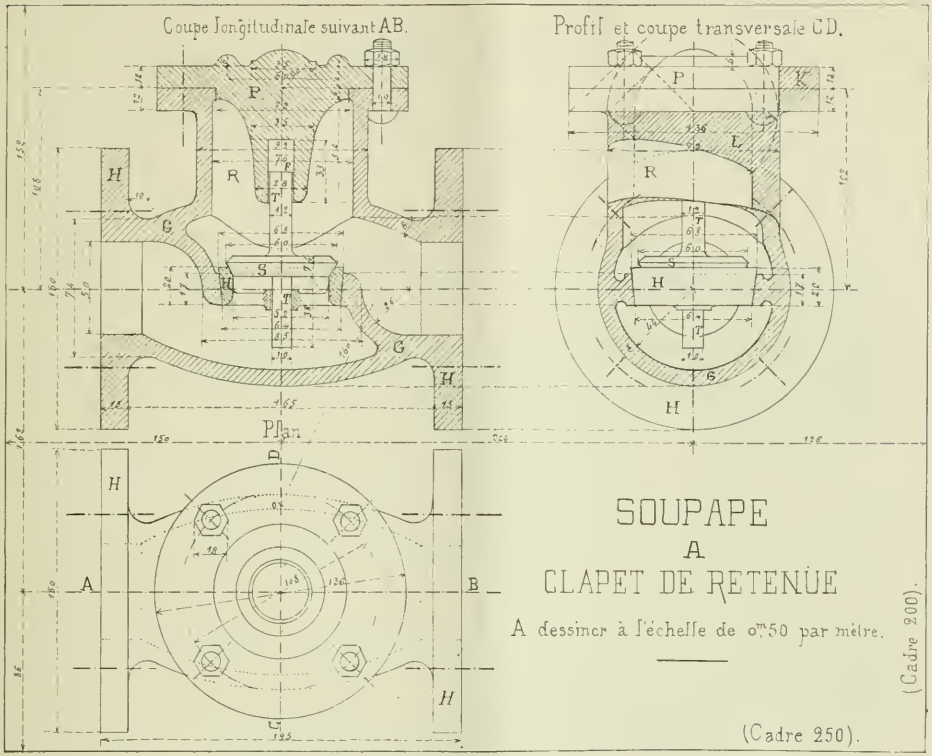
On passera d'abord une teinte légère sur *toutes les ombres* (1) et non pas seulement sur une partie d'entre elles, car un rendu d'architecture n'a de valeur que par l'ensemble de son effet. Si le temps ne fait pas défaut, on modèlera très simplement la niche (à teintes fondues), et on mettra ensuite les surfaces planes qui sont dans l'ombre en concordance de valeur avec les plans tangents de la sphère qui leur sont parallèles.

(1) On fera bien de la dégrader de haut en bas pour tenir compte de ce que les reflets terrestres dus au sol sont plus intenses quand on se rapproche de ce dernier.



J. Bordier, Del.

Niche sphérique, Hôtel de la Préfecture à Grenoble (Vestibule et escalier d'honneur).



Appareils de sûreté. J. Bordier, Del.

Description. — Les *soupapes de sûreté* sont des organes employés dans un grand nombre de machines, et particulièrement dans les pompes, pour ouvrir ou fermer alternativement l'orifice de communication entre deux capacités.

La *soupape* représentée ci-dessus est du genre de celles appelées *soupapes à soulèvement*. Dans cet exemple, la soupape, au lieu de tourner autour d'un axe comme les *clapets*, se sépare entièrement de l'orifice par un mouvement de translation perpendiculaire à son plan. Dans ce cas, la *soupape* S et son *siège* H ont ordinairement la forme d'un tronc de cône. La surface de la *soupape* et celle de son *siège* sont *rodées* de manière à former un joint hermétique. A la partie inférieure, la soupape est guidée par une tige T traversant une *bride* fixée aux parois de l'orifice. A la partie supérieure, la course de la tige est limitée par le fond d'un cylindre creux F où elle se meut verticalement.

Le tout est contenu dans une enveloppe en fonte G, de forme *fuselée*, terminée par deux disques H, H servant à raccorder l'appareil avec les tuyaux de circulation à l'aide de boulons.

A la partie supérieure se trouve un *regard* R, ouverture cylindrique fermée par une plaque P se démontant facilement pour les visites nécessitées par les nettoyages ou les réparations. La partie inférieure de cette plaque terminée en pointe, percée d'un cylindre creux F, reçoit la tige T de la soupape dans son mouvement de va-et-vient.

Exécution du dessin. — Cadre $250^{mm} \times 200^{mm}$. Les cotes sont données en millimètres ; faire le dessin à l'échelle de $0^{m},50$ par mètre.

Dessiner l'*échelle de réduction* dans l'intérieur du cadre avec la *contre-échelle* pour apprécier les dixièmes.

L'esquisse au crayon doit être soignée pour faciliter la mise à l'encre, qui doit être faite sans tâtonnements ; indiquer notamment avec précision les centres des cercles.

Trait à l'encre. — Tracer d'abord les arcs de cercle pour faciliter les raccordements. Ne pas se servir du trait de force, dont l'usage tend à disparaître.

Lavis. — Les hachures de fonte et de bronze seront remplacées dans le dessin au net par les teintes plates conventionnelles.

Ombres. — On lavera en couleur à l'effet, à teintes plates ou à teintes fondues, à volonté, les deux formes cylindriques R et P de la vue de profil dont les ombres sont indiquées par des hachures en K et L (*Ombre dite du listel*).

QUESTIONS PROPOSÉES

1492. — Soit dans un plan vertical la parabole

$$\begin{cases} x = p\,\mathrm{sh}\varphi, \\ y = \frac{p}{2}\,\mathrm{sh}^2\varphi\,; \end{cases} \qquad p > 0.$$

L'axe des y étant vertical et dirigé vers le bas. On suppose qu'un point matériel uniquement soumis à son poids soit astreint à se mouvoir sans frottement sur cette parabole.

1° Montrer que dans deux cas particuliers on peut exprimer t en fonction de φ à l'aide des fonctions introduites dans le cours.

2° Montrer que la réaction normale de la parabole sur le point matériel est, en chaque point, inversement proportionnelle au rayon de courbure.

Interpréter le cas où la réaction est constamment nulle.

3° *Application numérique.* — On suppose que le point matériel soit lancé en un point d'ordonnée $10p$ vers le sommet, la vitesse initiale étant telle que la vitesse s'annulerait au sommet. Calculer à $\frac{1}{100}$ près $\sqrt{\frac{g}{p}}\,t$, t étant le temps mis par le point matériel pour passer du point d'ordonnée $10p$ au point d'ordonnée $\frac{p}{2}$.

Th. L.

1493. — Soit un système de forces rapporté à trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy et Oz, ayant pour axe central l'axe Oz. La somme des projections des forces sur Oz a pour valeur h et le moment résultant du système par rapport à Oz a pour valeur h^2.

1° Montrer que les droites de moment nul par rapport au système de forces qui passent par un point donné A, de coordonnées a, b, c, sont situées dans un même plan P, dont on demande de former l'équation.

2° Lieu des points M tels que le moment résultant du système par rapport à chacun d'eux passe par le point A.

3° Montrer que le lieu de la droite AM est un cône du second ordre C. Déterminer les directions des plans qui coupent ce cône suivant des cercles.

4° Lieu des pieds sur les génératrices du cône C des perpendiculaires communes avec l'axe Oz.

5° Montrer qu'il est possible, d'une infinité de manières, de réduire le système des forces données à deux forces *rectangulaires* F et F′, dont l'une F soit appliquée en A. Lieu des lignes d'action des forces F et lieu des extrémités des forces F.

6° Montrer que les forces F′ sont situées dans le plan P et qu'elles enveloppent dans ce plan une parabole, dont on demande de déterminer le foyer.

Ch. Michel.

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES (*Cours préparatoires*).

Concours de 1905.

1437. — *Calculer avec trois décimales exactes les racines de l'équation*

$$3x^3 - 13x^2 + 15x - 4 = 0.$$

Une au moins des racines est commensurable.

Cette question est insignifiante. Le théorème de Descartes nous apprend d'abord que l'équation ne peut avoir que des racines positives ; ce fait est d'ailleurs évident, car si on donne à x une valeur négative, tous les termes de l'équation prennent des valeurs négatives et leur somme ne peut être nulle.

D'autre part, nous savons que si l'équation admet une racine commensurable, $\frac{p}{q}$, p est un diviseur de 4 et q un diviseur de 3. Les seuls nombres possibles sont donc

$$1, \quad 2, \quad 4, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{4}{3}.$$

Appliquons maintenant à ces nombres les procédés d'exclusion ordinaires : formons $f(1)$ et $f(-1)$, et rejetons tous les nombres tels que $f(1)$ ne soit pas divisible par $p-q$ ou $f(-1)$ par $p+q$; nous trouvons $f(1) = 1$ et $f(-1) = -35$; donc 1 est à rejeter ; d'autre part $4-1$ et $3-1$ ne divisent pas $f(1)$, donc 4 et $\frac{1}{3}$ sont à rejeter ; ensuite $2+1$ ne divise pas 35, donc 2 est aussi à rejeter. Il reste finalement à essayer $\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{3}$. On trouve de suite que $\frac{4}{3}$ convient et que le quotient de $f(x)$ par $x - \frac{4}{3}$ est

$$3x^2 - 9x + 3 ;$$

l'équation restante est donc

$$x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Cette équation admet pour racines $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ et il suffit de calculer $\sqrt{5}$ avec 3 décimales exactes ; on trouve ainsi $\sqrt{5} = 2{,}236$ à $\frac{1}{10^3}$ près par défaut et $\sqrt{5} = 2{,}237$ à $\frac{1}{10^3}$ près par excès.

La plus grande racine est fournie par le calcul $\frac{3 + 2{,}236}{2}$ et a pour valeur approchée 2,618, à $\frac{1}{10^3}$ près par défaut. L'autre racine est formée par le calcul $\frac{3 - 2{,}237}{2} = \frac{0{,}763}{2}$ et a pour valeur 0,381, à $\frac{1}{10^3}$ près par défaut aussi.

Bonnes solutions : MM. Paul Sarkösy, à Pannonhalma ; A. Ducos, lycée Carnot.
Assez bonnes solutions : MM. G. Fougry, à Roanne ; Croze, à Clermont-Ferrand ; Dessimond, à Alger.

1438. — *On considère un tronc de cône de hauteur h et dont les bases ont pour rayons* R *et* r. *On suppose que l'on attribue des valeurs constantes au volume* V *du tronc de cône et à la somme* $R + r = m$ *des rayons.*

Étudier les variations de la surface latérale S *du tronc quand* h, R, r *varient en restant assujettis à ces conditions. Cette surface* S *comporte-t-elle des maxima ou des minima ?*

Calculer avec deux décimales la valeur des maxima et minima, s'il y en a, quand $m = 2^{m}$, $V = 9^{mc},4248$. *On prendra* $\pi = 3,1416$.

La fonction à étudier est

$$S = \pi(R + r)\sqrt{h^2 + (R - r)^2},$$

h, R et r vérifiant les relations

$$R + r = m, \qquad \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr) = V,$$

m et V étant des nombres donnés positifs.

Nous en tirons

$$R^2 + r^2 + Rr = \frac{3V}{\pi h}, \qquad R^2 + r^2 + 2Rr = m^2$$

et, en retranchant,

$$Rr = m^2 - \frac{3V}{\pi h},$$

puis $$(R - r)^2 = (R + r)^2 - 4Rr = m^2 - 4\left(m^2 - \frac{3V}{\pi h}\right) \quad \text{ou} \quad (R - r)^2 = \frac{12V}{\pi h} - 3m^2.$$

On en déduit

$$S = \pi m\sqrt{h^2 + \frac{12V}{\pi h} - 3m^2};$$

la fonction S dépend ainsi de la seule variable h.

Mais, h étant donné, il faut qu'on puisse calculer des valeurs positives pour R et r ; or on a

$$R + r = m, \qquad (R - r)^2 = \frac{12V}{\pi h} - 3m^2.$$

Il faut d'abord que $(R - r)^2$ soit positif, ce qui donne la condition

$$h < \frac{4V}{\pi m^2}.$$

En outre, pour que R et r aient des valeurs positives, il faut qu'on ait $R - r < R + r$, ou $(R - r)^2 < (R + r)^2$,

ou enfin $$\frac{12V}{\pi h} - 3m^2 < m^2, \qquad \text{d'où} \qquad h > \frac{3V}{\pi m^2}.$$

h ne peut donc varier que de $\frac{3V}{\pi m^2}$ à $\frac{4V}{\pi m^2}$.

Dans ces conditions, la fonction S est continue ; elle admet une dérivée égale à

$$S' = \frac{\pi m}{\sqrt{h^2 + \frac{12V}{\pi h} - 3m^2}}\left(h - \frac{6V}{\pi h^2}\right).$$

Cette dérivée a le signe de $h^3 - \frac{6V}{\pi}$ ou de $h - \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}$; elle est positive si $h > \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}$ et négative si $h < \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}$.

Trois cas peuvent alors se présenter :

1° $$\sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}} < \frac{3V}{\pi m^2}, \qquad \text{ou} \qquad m^6 < \frac{9V^2}{2\pi^2};$$

2° $$\frac{3V}{\pi m^2} > \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}} < \frac{4V}{\pi m^2} \qquad \text{ou} \qquad \frac{9V^2}{2\pi^2} < m^6 < \frac{32V^2}{3\pi^2};$$

3° $$\frac{4V}{\pi m^2} < \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}} \qquad \text{ou} \qquad m^6 > \frac{32V^2}{3\pi^2}.$$

Premier Cas. $m^6 < \frac{9V^2}{2\pi^2}$.

Quand h croît de $\frac{3V}{\pi m^2}$ à $\frac{4V}{\pi m^2}$, S' est toujours positif, la fonction S croît, il n'y a ni maximum, ni minimum.

Deuxième Cas. $\frac{9V^2}{2\pi^2} < m^6 < \frac{32V^2}{3\pi^2}$.

Quand h croît de $\frac{3V}{\pi m^2}$ à $\sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}$, S décroît, puis quand h croît de $\sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}$ à $\frac{4V}{\pi m^2}$, S croît. La fonction est minimum pour $h = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}$.

Troisième Cas. $m^6 > \frac{32V^2}{3\pi^2}$.

Quand h croît de $\frac{3V}{\pi m^2}$ à $\frac{4V}{\pi m^2}$, S décroît ; il n'y a ni maximum ni minimum.

Application numérique. $m = 2$, $V = 9{,}4248$, $\pi = 3{,}1416$.
Remarquons que $V = 3\pi$, et par suite

$$\frac{3V}{\pi m^2} = \frac{9}{4}, \qquad \frac{4V}{\pi m^2} = 3, \qquad \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}} = \sqrt[3]{18}.$$

On a visiblement

$$\frac{9}{4} < \sqrt[3]{18} < 3;$$

par suite, nous sommes dans le deuxième cas, S a un minimum pour $h = \sqrt[3]{18}$, et la valeur de ce minimum est

$$S_1 = 2\pi\sqrt{\sqrt[3]{18^2} + \frac{36}{\sqrt[3]{18}} - 12},$$

ou, en remarquant que

$$\frac{36}{\sqrt[3]{18}} = \frac{36\sqrt[3]{18^2}}{18} = 2\sqrt[3]{18^2},$$

$$S_1 = 2\pi\sqrt{3\sqrt[3]{18^2} - 12} = 2\pi\sqrt{9\sqrt[3]{12} - 12}.$$

En nous aidant d'une table de logarithmes, nous trouvons

$$9\sqrt[3]{12} = 20{,}605 \qquad \text{et, par suite,} \qquad S_1 = 2\pi\sqrt{8{,}605}.$$

Nous avons

$$\log 2 = 0{,}30103$$
$$\log \pi = 0{,}49715$$
$$\frac{1}{2}\log 8{,}605 = 0{,}46737$$
$$\log S_1 = 1{,}26555$$

et

$$S_1 = 18^{mq}{,}43.$$

G. FOUCRY, à Roanne.

Bonnes solutions par MM. Dessimond, à Alger ; Grangier, à Mouleydier ; Janois, à Nantes.

ALGÈBRE

1428. — *Montrer que, pour toutes les valeurs de x qui n'appartiennent pas à l'intervalle $(-2, +2)$, la quantité*

$$\log(x+2) - 2\log(x+1) + 2\log(x-1) - \log(x-2)$$

est égale à la somme de la série

$$2M\left(y + \frac{1}{2}y^3 + \frac{1}{5}y^5 + \cdots\right),$$

où M désigne le module des logarithmes vulgaires et y l'expression $\frac{2}{x^3-3x}$.

La quantité

$$u = \log(x+2) - 2\log(x+1) + 2\log(x-1) - \log(x-2)$$

est égale à

$$u = \log\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x+1)^2(x-2)} = \log\frac{x^3-3x+2}{x^3-3x-2},$$

comme on s'en assure immédiatement en invoquant les propriétés de calcul des logarithmes et en développant le numérateur de la fraction soumise au signe logarithmique. Le dénominateur, changé de signe, se déduit du numérateur en changeant x en $-x$. Cela étant, posons $\frac{2}{x^3-3x} = y$; nous aurons

$$u = \log\frac{1+y}{1-y} = \log(1+y) - \log(1-y).$$

Or

$$L(1+y) = \frac{y}{1} - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \cdots,$$

et

$$L(1-y) = -\frac{y}{1} - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - \cdots,$$

pour toutes les valeurs de y comprises entre -1 et $+1$. Pour ces mêmes valeurs, nous avons donc

$$L\frac{1+y}{1-y} = 2\left(\frac{y}{1} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \cdots\right)$$

et

$$\log\frac{1+y}{1-y} = 2M\left(\frac{y}{1} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \cdots\right),$$

en désignant par M le module du système vulgaire.

Il nous reste à trouver maintenant quelles sont les valeurs de x pour lesquelles

$$-1 < y < 1,$$

ou

$$1 - y^2 > 0,$$

ou enfin

$$(x^3 - 3x)^2 - 4 > 0.$$

Cette inégalité s'écrit

$$(x^3 - 3x - 2)(x^3 - 3x + 2) > 0,$$

et elle se discutera en cherchant les racines des deux trinomes. Mais ces racines nous les connaissons d'après la manière même dont les trinomes ont été formés, et nous sommes ramenés à l'inégalité

$$(x-1)^2(x+1)^2(x-2)(x+2) > 0,$$

qui se réduit à

$$x^2 - 4 > 0,$$

et qui nous montre que x doit être en dehors de l'intervalle $(-2, +2)$.

W. MÉRIGOT.

Bonnes solutions : MM. P. Troy, à Toulouse ; Sizaire ; A. Darmon, à Alger ; J. Yernaux, à Mons ; Ducos, lycée Carnot ; M. Grangier, à Mouleydier ; H. Janois, à Nantes.

Assez bonnes solutions : MM. Queméneur, lycée de Rouen ; A. Dédiù, à Bucarest ; Amblard, à Ruines ; Foucry, à Roanne.

1429. — *Prouver de même que l'expression*

$$\log(x+5) - \log(x+4) - \log(x+3) + 2\log x - \log(x-3) - \log(x-4) + \log(x-5)$$

est, pour certaines valeurs de x, égale à la somme de la série

$$-2M\left(y + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5 + \cdots\right),$$

où M *désigne le module des logarithmes vulgaires et* y *la quantité* $\dfrac{72}{x^4 - 25x^2 + 72}$.

Trouver les intervalles acceptables pour x.

Cette question se traite absolument de la même manière que la question **1428**. Nous avons successivement

$$u = \log(x+5) - \log(x+4) - \log(x+3) + 2\log x - \log(x-3) - \log(x-4) + \log(x-5),$$

puis

$$u = \log\frac{x^2(x^2-25)}{(x^2-9)(x^2-16)},$$

$$u = \log\frac{x^4 - 25x^2}{x^4 - 25x^2 + 144}.$$

Si nous posons maintenant

$$\frac{1+y}{1-y} = \frac{x^4 - 25x^2}{x^4 - 25x^2 + 144},$$

nous aurons immédiatement

$$y = \frac{-72}{x^4 - 25x^2 + 72}.$$

Changeons le signe de y et posons alors

$$y = \frac{72}{x^4 - 25x^2 + 72},$$

nous aurons

$$u = \log\frac{1-y}{1+y},$$

puis

$$u = -2M\left(\frac{y}{1} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \cdots\right),$$

pour toutes les valeurs de y comprises entre -1 et $+1$.

Cette restriction nous impose l'inégalité

$$1 - y^2 > 0,$$

ou

$$(x^4 - 25x^2 + 72)^2 - 72^2 > 0,$$

qui se transforme en

$$x^2(x^2 - 25)(x^4 - 25x^2 + 144) > 0,$$

ou enfin en

$$(x+5)(x+4)(x+3)(x-3)(x-4)(x-5) > 0.$$

Cette inégalité est vérifiée dans les intervalles $(-\infty, -5)$, $(-4, -3)$ $(3, 4)$ $(5, +\infty)$.

W. MÉRIGOT.

Bonnes solutions : MM. Sizaire : P. Troy, lycée de Toulouse ; Foucry, à Roanne ; J. Yernaux, à Mons ; M. Grangier, à Moulevdier ; A. Darmon, à Alger ; H. Janois, à Nantes.

Assez bonnes solutions : MM. A. Dédit, à Bucarest ; Amblard, à Ruines.

QUESTIONS PROPOSÉES

1494. — Un point se meut de manière que son accélération normale variable soit dans un rapport constant k^2 avec le rayon de courbure de la trajectoire, et que son accélération tangentielle ait une valeur constante a. Trouver l'hodographe et la trajectoire de ce mobile.

Girod.

1495. — Un point se meut de manière que son accélération normale variable soit dans un rapport constant k^2 avec le rayon de courbure de la trajectoire, et que son accélération *totale* ait une valeur constante a. Trouver l'hodographe et la trajectoire de ce mobile.

Girod.

1496. — Un pendule pesant composé d'une boule fixée à l'extrémité inférieure d'une tige oscille d'abord dans l'air avec un amortissement négligeable. On trouve une durée d'oscillation simple égale à $0^{sec},582$. On fait ensuite plonger dans un liquide légèrement visqueux une lame mince fixée au-dessous de la boule, de manière à introduire une résistance proportionnelle à la vitesse sans changer sensiblement le poids apparent du pendule. Il se produit alors un amortissement considérable et l'on trouve, entre deux élongations successives un rapport sensiblement constant et égal à 1,29. Chercher de combien se trouve modifiée la durée d'une oscillation.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

16e Année. N° 9. Juin 1906.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LES CUBIQUES UNICURSALES

par M. **Ch. Michel**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Dijon.

1. Théorème. — *Pour que deux points d'une cubique gauche se correspondent en involution, il faut et il suffit que la droite qui les joint varie dans un système de génératrices rectilignes d'une quadrique passant par la cubique.*

1° *C'est nécessaire.* — Soient en effet deux points M et M′ d'une cubique gauche se correspondant en involution sur cette courbe. Projetons la figure sur un plan P d'un point O pris sur la cubique. La cubique se projette suivant une conique, les deux points M et M′ de la cubique se projettent sur la conique en deux points m et m' qui se correspondent en involution. D'après le théorème de Frégier, la droite mm' passe par un point fixe ω du plan P ; donc, la droite MM′ rencontre constamment la droite fixe $O\omega$. En remplaçant successivement le point O de la cubique par deux autres points O′ et O″ de cette courbe, on obtiendra deux droites $O'\omega'$ et $O''\omega''$ analogues à la droite $O\omega$. Ainsi, la droite MM′ rencontre les trois droites fixes $O\omega$, $O'\omega'$, $O''\omega''$; donc, elle varie dans un système de génératrices rectilignes d'une quadrique, laquelle passe évidemment par la cubique.

2° *C'est suffisant.* — Soit en effet une quadrique passant par une cubique gauche. Considérons sur cette surface le système des génératrices rectilignes qui rencontrent la cubique en deux points tels que M et M′ et prenons une génératrice quelconque de l'autre système, s'appuyant en un seul point O sur la cubique. Cette dernière droite rencontre toutes les droites MM′. Projetons du point O la figure sur un plan P qui rencontre cette droite en ω. La cubique se projette suivant une conique, les points M et M′ se projettent en deux points m et m' de la conique et la droite mm' passe par le point fixe ω. D'après la réciproque du théorème de Frégier, les points m et m' se correspondent en involution sur la conique. Les points M et M′ se correspondent eux-mêmes en involution sur la cubique.

2. De ce théorème on peut déduire un théorème sur les cubiques planes à point double.

Soit une cubique gauche et considérons sur cette courbe deux points variables M et M′ se correspondant en involution. La droite MM′, nous venons de le voir, engendre une quadrique Q. Projetons sur un plan P d'un point quelconque S de l'espace. La cubique gauche se projette suivant une cubique plane ayant un point double qui est la trace sur le plan P de la droite menée par S et s'appuyant en deux points sur la cubique gauche. Les points M et M′ se projettent sur la cubique plane en deux points μ et μ' qui se correspondent en involution. La droite $\mu\mu'$ est la trace sur le plan P du plan passant par S et par la génératrice rectiligne MM′ de la quadrique Q. Or, un tel plan enveloppe le cône circonscrit à la quadrique Q, de sommet S. Par suite, la droite $\mu\mu'$ enveloppe une conique, trace de ce cône sur le plan P. On a ainsi le théorème suivant :

Si deux points variables μ et μ' d'une cubique plane à point double se correspondent en involution, la droite $\mu\mu'$ enveloppe une conique, qui est tangente en trois points à la cubique.

En particulier, supposons que le point S soit sur la quadrique Q. Les génératrices rectilignes de

cette quadrique telles que MM′ rencontrent toutes une des deux génératrices de la quadrique qui passe par le point S. Cette génératrice s'appuie en un point sur la cubique gauche et par suite sa trace sur le plan P est un point α de la cubique plane. D'ailleurs, l'autre génératrice passant par S, qui est une droite MM′, a pour trace sur le plan P le point double de la cubique plane; par suite, le point double se correspond à lui-même dans l'involution formée par les points μ et μ', de telle façon que, lorsque μ tend à se confondre avec le point double en se déplaçant sur une des branches de la cubique plane qui passent au point double, le point μ' tend à se confondre avec le point double, mais en se déplaçant sur l'autre branche. On a donc le théorème suivant :

Si deux points variables μ et μ' d'une cubique plane à point double se correspondent en involution, de façon qu'au point double considéré comme appartenant à une des branches qui passent par ce point corresponde le point double considéré comme appartenant à l'autre branche, la droite $\mu\mu'$ passe par un point fixe α de la cubique.

On reconnaît immédiatement que, *réciproquement, si une droite variable passe par un point fixe α d'une cubique plane à point double, elle rencontre à nouveau la cubique plane en deux points variables qui se correspondent en involution, de façon qu'au point double considéré comme appartenant à une des branches qui s'y croisent corresponde le point double considéré comme appartenant à l'autre branche.*

De ce dernier théorème et de sa réciproque, on peut déduire les propriétés les plus essentielles des cubiques planes à point double. C'est ce que je montrerai ultérieurement.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES

Concours de 1905.

1430. — *Soient deux axes rectangulaires, Ox et Oy ; on considère une parabole* P, *de paramètre donné p, qui se déplace de manière que son foyer reste sur l'axe des y et que la corde interceptée par elle sur cet axe ait pour milieu l'origine* O.

1° *Trouver et construire le lieu du sommet de la parabole* P.

2° *Calculer l'aire comprise entre ce lieu et les deux parallèles à Oy dont les abscisses sont $\frac{p}{4}$ et $\frac{p}{2}$.*

En désignant par β l'ordonnée du foyer et par φ l'angle que fait l'axe de la parabole avec Ox, l'équation de cette ligne sera

$$x^2 + (y - \beta)^2 - (x \cos\varphi + y \sin\varphi - \lambda)^2 = 0.$$

Nous aurons λ en écrivant que le paramètre est égal à p, c'est-à-dire que la distance du foyer à la directrice est égale à p ; nous trouvons ainsi

$$\beta \sin\varphi - \lambda = \pm p, \qquad \text{d'où} \qquad \lambda = \beta \sin\varphi - \varepsilon p,$$

ε étant égal à $+1$ ou à -1. D'autre part, si nous faisons $x = 0$ dans l'équation de la parabole, la demi-somme des racines de l'équation du second degré en y ainsi obtenue doit être nulle, et cela nous donne

$$\beta - \lambda \sin\varphi = 0.$$

Nous avons donc

$$\lambda = \lambda \sin^2\varphi - \varepsilon p,$$

et, par suite,

$$\lambda = \frac{-\varepsilon p}{\cos^2\varphi}, \qquad \beta = \frac{-\varepsilon p \sin\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

Peu importe alors le signe que l'on prenne pour ε ; si l'on prend successivement $\varepsilon = +1$ et $\varepsilon = -1$, on obtient deux faisceaux de paraboles identiques, car on passe de l'un à l'autre en changeant φ en $\varphi + \pi$.

Nous prendrons $\varepsilon = -1$, et nous aurons successivement

$$\lambda = \frac{p}{\cos^2\varphi}, \qquad \beta = \frac{p\sin\varphi}{\cos^2\varphi};$$

et, pour équation de la parabole variable,

$$x^2 + \left(y - \frac{p\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\right)^2 - \left(x\cos\varphi + y\sin\varphi - \frac{p}{\cos^2\varphi}\right)^2 = 0.$$

1° L'axe a pour équation $\qquad \dfrac{x}{\cos\varphi} = \dfrac{y-\beta}{\sin\varphi};$

c'est la perpendiculaire abaissée du foyer sur la directrice. Le sommet est l'intersection de cette droite avec la parabole. Si on appelle ρ la valeur commune des rapports précédents, on a

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \beta + \rho\sin\varphi,$$

et l'équation de la parabole donne

$$\rho^2 - \left(\rho + \beta\sin\varphi - \frac{p}{\cos^2\varphi}\right)^2 = 0, \qquad \text{puis} \qquad \rho = \frac{p}{2}.$$

Le lieu du sommet a donc pour équations paramétriques

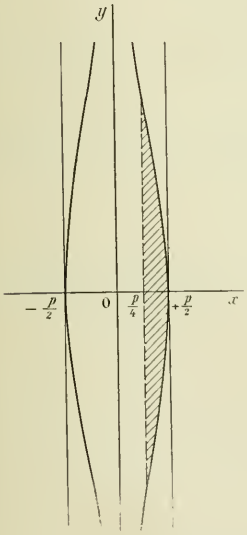
$$x = \frac{p}{2}\cos\varphi, \qquad y = \frac{p\sin\varphi}{\cos^2\varphi} + \frac{p}{2}\sin\varphi$$

ou

$$(1) \qquad x = \frac{p}{2}\cos\varphi, \qquad y = \frac{p\sin\varphi}{2\cos^2\varphi}(2+\cos^2\varphi).$$

La première équation donne $\cos\varphi = \dfrac{2x}{p}$; on a donc $\sin\varphi = \sqrt{\dfrac{p^2-4x^2}{p^2}}$, puis

$$2y\frac{4x^2}{p^2} = \sqrt{p^2-4x^2}\left(2 + \frac{4x^2}{p^2}\right);$$



l'équation cartésienne finale du lieu est

$$(2) \qquad 16x^4y^2 = (p^2-4x^2)(2x^2+p^2)^2,$$

ou

$$y^2 = \frac{(p^2-4x^2)(2x^2+p^2)^2}{16x^4}.$$

Elle montre que la courbe est symétrique par rapport à Ox et qu'elle est tout entière comprise entre les droites $x = -\dfrac{p}{2}$ et $x = \dfrac{p}{2}$. Les deux points de Ox ayant ces nombres pour abscisses sont des sommets et la droite $x = 0$ est une asymptote. La forme de la courbe est dès lors bien évidente.

2° L'aire demandée est égale, à cause de la symétrie, à

$$A = 2\int_{\frac{p}{4}}^{\frac{p}{2}} y\,dx.$$

Or $dx = -\dfrac{p}{2}\sin\varphi\,d\varphi$; d'autre part, pour $\varphi = 0$, $x = \dfrac{p}{2}$

et pour $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$, $x = \dfrac{p}{4}$; l'aire A a donc pour expression

$$A = -2\frac{p^2}{4}\int_{\frac{\pi}{3}}^{0}\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}(2+\cos^2\varphi)\,d\varphi \qquad \text{ou} \qquad A = \frac{p^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}(2+\cos^2\varphi)\,d\varphi.$$

Pour calculer l'intégrale indéfinie, nous la décomposerons en deux : d'abord $\int \sin^2\varphi d\varphi$; puis, $\int \frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} d\varphi$. Cette dernière se décompose à son tour en $\int \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$ et $-\int d\varphi$, dont les expressions sont immédiates. Nous avons donc

$$\int \frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} d\varphi = \operatorname{tg}\varphi - \varphi.$$

Nous avons aussi

$$\int \sin^2\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2\varphi) d\varphi = \frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4}.$$

L'intégrale indéfinie d'où dérive A est

$$p^2(\operatorname{tg}\varphi - \varphi) + \frac{p^2}{4}\left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right).$$

Il n'y a plus qu'à prendre la variation de cette fonction de 0 à $\frac{\pi}{3}$. Pour $\varphi = 0$, elle est nulle; pour $\varphi = \frac{\pi}{3}$, elle vaut

$$(3) \qquad p^2\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{p^2}{4}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Telle est la valeur de A.

En tenant compte de $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, on a de suite $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. Finalement

$$A = p^2\left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{16}\right) - p^2\frac{\pi}{4}, \qquad \text{ou} \qquad A = \frac{p^2}{16}(15\sqrt{3} - 4\pi).$$

La valeur de $\sqrt{3}$ est 1,7321 ; celle de π est 3,1416. Il est alors facile d'achever le calcul de A; on trouve ainsi

$$A = 0{,}8384p^2.$$

Bonnes solutions : MM. G. Pélissier, à Toulouse : G. Foucry, à Roanne : A. Dediû, à Bucarest ; M. Grangier, à Mouleydier. Assez bonnes solutions : MM. H. Coir, à Boulogne-sur-Mer ; Dessimond, à Alger ; H. Janois, à Nantes ; A. Darmon, à Alger.

1431. — *On considère un champ de forces défini par les équations*

$$X = yz, \qquad Y = zx, \qquad Z = xy,$$

(X, Y, Z *désignant les composantes de la force* F *appliquée au point dont les coordonnées rectangulaires sont* x, y, z.)

On demande :

1° *Les équations des lignes de force ;*

2° *L'équation différentielle des surfaces de niveau ;*

3° *Les positions d'équilibre d'un point assujetti à demeurer, sans frottement, sur la droite*

$$x = az + p, \qquad y = az - p$$

(a *et* p *étant des constantes*), *et sollicité par la force* F.

Puisque les composantes de la force au point (x, y, z) sont yz, zx et xy, la différentielle du travail est

$$dT = yzdx + zxdy + xydz;$$

c'est une différentielle totale et la fonction T est égale à $xyz + c$. Il en résulte que les surfaces de niveau du champ ont pour équation $xyz = k$, k désignant une constante arbitraire. Chacune de ces surfaces se compose de quatre nappes asymptotiques aux plans de coordonnées : ainsi, par exemple, si

nous supposons $k > 0$, une des nappes est située dans le trièdre $oxyz$ où les trois coordonnées sont positives, une autre dans le trièdre $ox'y'z$, où x et y sont négatifs, et ainsi de suite.

Quant aux lignes de force, ce sont les enveloppes des lignes de support des divers vecteurs X, Y, Z; elles satisfont aux équations différentielles

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{zx} = \frac{dz}{xy}, \qquad \text{ou} \qquad xdx = ydy = zdz.$$

L'intégration est immédiate et donne

$$x^2 + \alpha = y^2 + \beta = z^2 + \gamma.$$

α, β, γ étant trois constantes arbitraires. Ces lignes ont donc pour équations simultanées

$$x^2 - y^2 = h, \qquad z^2 - x^2 = k,$$

h et k étant deux nouvelles constantes arbitraires. Les projections de l'une de ces lignes sur les plans des xy et des zx sont donc deux hyperboles équilatères ayant les axes correspondants pour axes de symétrie.

Les lignes de force sont les trajectoires orthogonales des surfaces de niveau.

Considérons enfin un point M du champ de forces, mobile sans frottement sur la droite

$$\text{(D)} \qquad x = az + p, \qquad y = az - p.$$

Ce point sera en équilibre si la direction de la force X, Y, Z est perpendiculaire à la droite donnée, dont les paramètres sont a, a et 1. Ceci donne la condition $a(yz + zx) + xy = 0$, ou, en remplaçant x et y par $az + p$ et $az - p$, $3a^2z^2 - p^2 = 0$.

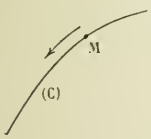
Nous tirons de là deux valeurs de z, $z = \frac{p}{a\sqrt{3}}$ et $z = \frac{-p}{a\sqrt{3}}$; elles fournissent immédiatement les positions d'équilibre du point M :

$$x = p\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}, \qquad y = p\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}, \qquad z = \frac{p}{a\sqrt{3}};$$

et

$$x = p\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}, \qquad y = -p\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}, \qquad z = \frac{-p}{a\sqrt{3}}.$$

Nous allons chercher maintenant si le point M est alors en équilibre stable ou instable. Pour cela, nous nous laissons guider par les considérations suivantes : quand le point M se meut sur une ligne (C) du champ de force, le travail accompli par la force du champ est positif ou négatif à chaque instant suivant que la fonction de force (ici xyz) va en croissant ou en décroissant. Il y a équilibre aux points où cette fonction passe par un maximum ou un minimum, c'est-à-dire aux points où la ligne (C) est tangente à une surface de niveau. S'il y a maximum, le point correspondant M_0 est une position d'équilibre stable, car lorsque le point M tend à s'en éloigner, le travail élémentaire est négatif et la force agissante dans la direction de la tangente à (C), c'est-à-dire la composante de la force du champ dans cette direction tend à ramener le point M en M_0. S'il y a minimum, l'équilibre est instable.



Or ici la fonction de force xyz devient une fonction de z : $a^2z^3 - p^2z$; sa dérivée, $3a^2z^2 - p^2$, admet pour racines les z des positions d'équilibre $z_0 = \frac{p}{a\sqrt{3}}$ et $z_1 = \frac{-p}{a\sqrt{3}}$.

On voit que z_1 correspond à un maximum et z_0 à un minimum. L'équilibre est instable dans la première position et stable dans la seconde.

Solutions satisfaisantes : MM. M. Grangier, à Mouleydier ; G. Pélissier, à Toulouse ; M. Laurence ; Dessimond, à Alger ; Amblard, à Ruines ; A. Darmon, à Alger.

1432 — *Un point M se meut dans un plan de telle façon que sa distance à un point fixe O du plan croisse proportionnellement au temps et que le rayon vecteur OM tourne autour de O avec une vitesse constante.*

Trouver en fonction du temps la vitesse V et l'accélération γ du mouvement du point M. Exprimer en outre γ en fonction de V.

Prenons pour axe des x la position de OM au moment où le mobile passe en O et orientons Ox dans le sens du mouvement; prenons en outre pour sens positif des angles le sens de rotation du vecteur OM. Les coordonnées polaires du point M pourront alors se représenter par $\rho = vt$, $\omega = \alpha t$, et le lieu du point mobile aura pour équation $\rho = \frac{v}{\alpha}\omega = a\omega$, a étant une constante. La trajectoire du point M est donc une spirale d'Archimède.

Les composantes de la vitesse sont $\frac{d\rho}{dt} = v$ et $\rho\frac{d\omega}{dt} = v\alpha t$. La vitesse a pour valeur

$$V = v\sqrt{1 + \alpha^2 t^2}.$$

Les composantes de l'accélération sont

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2, \qquad + \frac{2d\rho}{dt}\frac{d\omega}{dt} + \rho\frac{d^2\omega}{dt^2},$$

et, par suite, elles ont pour valeurs $-v\alpha^2 t$, $2v\alpha$.

Donc l'accélération elle-même est donnée par $\gamma^2 = v^2\alpha^2(4 + \alpha^2 t^2)$.

On a ensuite $\gamma^2 = \alpha^2(3v^2 + V^2)$.

Bonnes solutions : MM. H. Cuis, conducteur à Boulogne ; Amblard, conducteur à Ruines (Cantal) ; A. Darmon, à Alger ; R. Manen, à Albi ; A. Deiiu, à Bucarest ; G. Pelissier, à Toulouse ; M. Laurence ; M. Grangier, à Mouleydier.

1433. — *Un rayon lumineux linéaire, situé dans un plan horizontal, vient frapper un écran vertical perpendiculaire à sa direction. Sur le trajet du rayon et à 1^m de distance de l'écran, on place un petit prisme de verre dont les arêtes sont verticales et dont la section droite est un triangle équilatéral. Ce point lumineux se déplace, sur l'écran, d'un intervalle qui dépend de la déviation subie par le rayon.*

Si on fait tourner le prisme avec une vitesse uniforme d'un tour par seconde, autour d'un axe vertical passant à égale distance de ses trois arêtes ; si en même temps on imprime à l'écran un mouvement de translation vertical avec une vitesse d'un mètre par seconde, le point lumineux va décrire sur l'écran une courbe qui représentera les variations de la déviation en fonction du temps ou de l'angle de rotation décrit par le prisme.

L'indice du verre étant supposé égal à $\sqrt{2}$, on demande :

1° De calculer les limites entre lesquelles variera la déviation, et les valeurs de la déviation qui correspondront à une discontinuité de la courbe ;

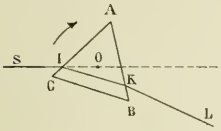
2° De discuter la forme générale de la courbe. On n'aura pas à chercher l'équation, mais seulement à se servir des points correspondant aux valeurs spéciales de la déviation déjà calculées. On admettra d'ailleurs que, vu la petitesse du prisme, tous les rayons émergents rencontrent sensiblement l'axe de rotation. On ne tiendra pas compte des rayons qui pourraient émerger après avoir subi des réflexions intérieures.

3° Supposant la courbe enregistrée par un procédé photographique, chercher si l'étude de cette courbe permettrait de vérifier que les angles du prisme sont bien égaux, d'en calculer l'indice, ainsi que les vitesses de rotation du prisme et de translation de l'écran.

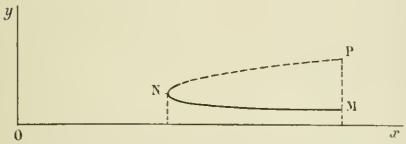
Soit ABC la section droite du prisme, SI le rayon incident, KL le rayon émergent. Supposons, pour fixer les idées, que le prisme tourne de gauche à droite autour de son axe O.

1. On sait que pour que le rayon émergent existe, l'angle d'incidence sur la face d'entrée doit être

compris entre $\frac{\pi}{2}$ et un angle i_0 tel que $\sin i_0 = n \sin(A - \lambda)$, λ étant l'angle limite. Ici, on aura $\lambda = \text{arc} \sin \frac{1}{\sqrt{2}} = 45^0$ et $\sin i_0 = \sqrt{2} \sin(60^0 - 45^0)$, d'où $i_0 = 21^0 \frac{1}{2}$ environ.



Au moment où, par suite de la rotation, AC devient face d'entrée, l'angle d'incidence est égal à -60^0 et il n'y a pas émergence par la face AB. Quand l'incidence est i_0, l'émergence commence à se produire parallèlement à AB et alors la déviation, dont l'expression générale est $i + i' - A$, a la valeur $D = i_0 + 90^0 - 60^0 = 51^0 \frac{1}{2}$ environ. A partir de ce moment, la déviation décroît, comme l'on sait, pour passer par un minimum d donné par l'équation $\sin \frac{A+p}{2} = n \sin \frac{A}{2}$, d'où $d = 30^0$ exactement; l'incidence correspondante est $\frac{A+d}{2} = 45^0$. Puis la déviation augmente de nouveau jusqu'au moment où l'angle d'incidence est de 90^0 et alors elle reprend sa première valeur D. En réalité, si le rayon incident est dirigé exactement vers l'axe de rotation, il cesse de rencontrer la face AC et, par conséquent, le rayon émergent que nous considérons cesse d'exister quand $i = 60^0$; la déviation correspondante est alors un peu supérieure à 32^0.



2. L'angle d'incidence varie proportionnellement au temps. La vitesse angulaire du prisme étant 2π, si l'on prend pour origine du temps t l'instant où le rayon incident est normal à l'une des faces, on aura $i = 2\pi t$. D'autre part, si Δ désigne la déviation, les coordonnées de la courbe seront respectivement

$$x = \text{tg}\, \Delta \qquad \text{et} \qquad y = t = \frac{i}{2\pi}.$$

Le premier point extrême, M, de la courbe aura pour coordonnées

$$x = \text{tg}\, D = 1^m,25, \qquad y = \frac{i_0}{2\pi} = 0^m,06.$$

Le second point extrême, P, en supposant qu'il existe, aura même abscisse et pour ordonnée

$$y = \frac{\pi}{2} : 2\pi = 0^m,25.$$

Le point N, correspondant à la déviation minimum aura pour coordonnées

$$x = \text{tg}\, d = 0^m,58, \qquad y = \frac{\pi}{4} : 2\pi = 0^m,125.$$

Considérons la direction de la tangente. On a

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d\, \text{tg}\, \Delta}{dt} = \frac{2\pi}{\cos^2 \Delta} \frac{d\Delta}{di}.$$

Or si l'on se reporte aux formules du prisme, on a

$$\frac{d\Delta}{di} = 1 - \frac{\cos i \cos r'}{\cos r \cos i'}.$$

Pour l'incidence initiale i_0, $i' = 90^0$, $\cos i' = 0$ et $\frac{dx}{dy} = -\infty$; la tangente en M est parallèle à Ox. En N, la tangente est évidemment verticale. En P, $\cos i = 0$ et $\frac{dx}{dy} = \frac{2\pi}{\cos^2 D}$; le calcul donne pour l'inverse $\frac{dy}{dx} = 0,06$ environ.

Il est donc facile de se rendre compte de la forme générale de la courbe.

3. Le passage de chaque face donne la courbe précédente et une courbe analogue, de forme symétrique, située à gauche de Oy. On pourra reconnaître que les angles du prisme sont bien égaux à ce que trois courbes consécutives situées du même côté seront rigoureusement superposables, ou simplement à ce que les sommets N auront même abscisse.

L'abscisse du point N est égale à tg d. Sa mesure permettra donc de déterminer d et, par suite, l'indice par la formule usuelle.

Enfin, désignons d'une manière générale par v la vitesse de translation de l'écran, par ω la vitesse angulaire de rotation du prisme, par a la distance des sommets N de trois en trois ou, ce qui sera plus facile à déterminer, la distance de points de même abscisse. La durée d'un tour du prisme peut se représenter soit par $\frac{a}{v}$, soit par $\frac{2\pi}{\omega}$. On aura donc $\frac{v}{\omega} = \frac{a}{2\pi}$.

Remarque. — Il importe de remarquer que, par suite des phénomènes de réflexion, la lumière transmise s'évanouit aux incidences limites. On ne pourra donc, pour ce qui précède, observer et utiliser que les parties voisines des sommets.

M. LAURENCE.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

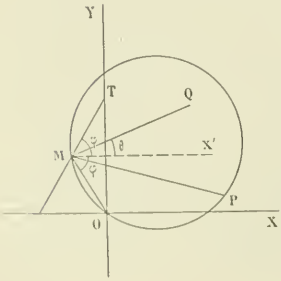
1420. — *Par les points de rencontre d'une hyperbole équilatère* H *et d'un cercle* C *passant par son centre, on mène les parallèles à une direction* Δ *et les symétriques par rapport à ces droites des tangentes à l'hyperbole. Montrer que les quatre droites ainsi obtenues concourent en un point* P *du cercle* C.

Soient $x^2 - y^2 - a^2 = 0$ et $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0$ les équations des deux courbes, x_0, y_0 les coordonnées de P, m le coefficient angulaire de la direction Δ.

Si nous écrivons que la droite joignant P à un point $M(x, y)$ de H, et la tangente en M à l'hyperbole sont également inclinées sur Δ, nous avons

$$\frac{\dfrac{y-y_0}{x-x_0} - m}{1 + m.\dfrac{y-y_0}{x-x_0}} + \frac{\dfrac{x}{y} - m}{1 + m.\dfrac{x}{y}} = 0,$$

ou
$$x^2 + y^2 - x_0x - y_0y - k(y_0x - x_0y) = 0, \qquad \text{avec} \qquad k = \frac{2m}{1-m^2}.$$



Comme on peut identifier cette équation à celle du cercle C, la proposition est démontrée.

On a d'ailleurs $x_0 + ky_0 = 2\alpha$, $y_0 - kx_0 = 2\beta$.

Lorsque la direction Δ varie, le point P décrit bien le cercle C; car, en éliminant k entre les deux équations précédentes, on a

$$x_0^2 + y_0^2 - 2\alpha x_0 - 2\beta y_0 = 0.$$

Solution géométrique. — Soient OX, OY les asymptotes de l'hyperbole, MT la tangente à la courbe en l'un de ses points d'intersection avec le cercle, MQ la parallèle à la direction Δ.

Les droites OM, MT étant également inclinées sur OX, on a

$$\widehat{OMP} = \widehat{OMQ} - \widehat{PMQ} = \widehat{OMQ} - \widehat{QMT} = (\varphi + \theta) - (\varphi - \theta),$$
$$\widehat{OMP} = 2\theta.$$

Le point P est donc fixe sur le cercle, et ne dépend pas de la grandeur de l'hyperbole.

VASNIER.

Même solution analytique par M. Guadet, élève au lycée Louis-le-Grand ; M. Guadet remarque en outre que a^2 n'intervient pas dans les résultats et que par suite, pour une même direction Δ, le point P reste le même pour toutes les coniques homothétiques et concentriques à l'hyperbole proposée. Ce résultat rapproche le cercle précédent de l'hyperbole d'Apollonius.

Solution géométrique analogue de M. Dulimbert, à Grenoble.

Autre solution. — Prenons pour axes la parallèle et la perpendiculaire à la direction Δ menées par le centre de l'hyperbole.

Soient $$x^2 - y^2 + 2Bxy + F = 0, \qquad x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0$$
les équations du cercle et de l'hyperbole, et soient x_0, y_0 les coordonnées d'un de leurs points communs.

L'équation de la tangente à l'hyperbole en ce point est
$$x[x_0 + By_0] - y[y_0 - Bx_0] + F = 0 ;$$
l'équation d'une droite symétrique de cette dernière par rapport à une parallèle à l'axe Ox est
$$x[x_0 + By_0] + y[y_0 - Bx_0] - x_0^2 - y_0^2 = 0$$
ou, puisque le point x_0, y_0 est sur le cercle donné,
$$x[x_0 + By_0] + y[y_0 - Bx_0] - 2[\alpha x_0 + \beta y_0] = 0,$$
ce qui peut s'écrire $$x_0[x - By - 2\alpha] + y_0[y + Bx - 2\beta] = 0.$$

Cette droite passe par suite par un point fixe indépendant du point x_0, y_0, intersection des droites
$$x - By - 2\alpha = 0, \qquad Bx + y - 2\beta = 0.$$

Ces deux droites sont rectangulaires, elles passent par les extrémités du diamètre d'intersection du cercle avec les axes et par suite se coupent sur le cercle, ce qui démontre la proposition.

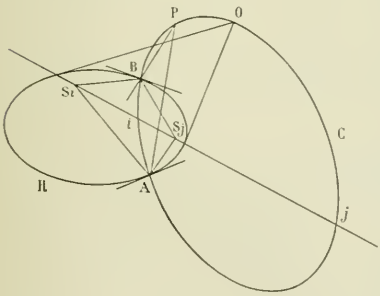
Remarque. — Nous n'avons pas fait intervenir la condition pour le point (x_0, y_0) d'être sur l'hyperbole, on peut alors énoncer la proposition suivante :

Si par un point pris sur un cercle passant par le centre d'une hyperbole équilatère, on mène la parallèle à une direction Δ et la symétrique par rapport à cette droite de la parallèle à la polaire de ce point par rapport à l'hyperbole, la droite ainsi obtenue passe par un point fixe du cercle, indépendant du point considéré.

R. BOUVAIST.

Autre solution géométrique et généralisation. — Remarquons d'abord que le théorème proposé n'est qu'un cas particulier du théorème plus général énoncé ci-dessous :

Soient deux coniques H *et* C, *harmoniquement inscrite et circonscrite l'une à l'autre* ; *Oij un triangle autopolaire par rapport à* H *et inscrit à* C ; S_i *et* S_j *deux points de la droite ij astreints seulement à être conjugués harmoniques par rapport à i et j. Par chacun des quatre points communs aux coniques* H *et* C *on mène la droite conjuguée harmonique, par rapport aux deux droites qui joignent ce point à* S_i *et* S_j, *de la tangente en ce point à la conique* H. *Les quatre droites ainsi obtenues sont concourantes en un point* P *de la conique* C.



Pour démontrer ce théorème, nous allons considérer le cas particulier où les points S_i et S_j sont les points cycliques. S'il est reconnu vrai dans ce cas particulier, une transformation homographique conservant le rapport anharmonique, le cas général sera établi.

Quand S_i et S_j sont les points cycliques, la conique C est une hyperbole équilatère passant par le centre O de la conique H. Les droites Oi et Oj sont les axes de cette conique H, puisqu'elles sont conjuguées par rapport à H et par rapport aux droites isotropes OS_i et OS_j. L'hyperbole équilatère C a donc ses points à l'infini sur les axes de la conique H. La droite, conjuguée harmonique de la tangente à la conique H en un point A par rapport aux droites isotropes AS_i et AS_j, et passant par A, est la normale en A à la conique H. Les quatre droites que nous disons concourantes en un point P de l'hyperbole équilatère C, sont donc les normales à H aux points communs à C et H.

Or, soit P le second point de rencontre avec l'hyperbole équilatère C de la normale à la conique H en un de ces points communs A aux deux coniques. L'hyperbole d'Apollonius relative au point P aura en commun

avec l'hyperbole C les points P, O, A et les deux points à l'infini. Elles sont confondues. Les droites qui joignent P aux autres points d'intersection des deux coniques sont donc normales à H.

Les quatre normales aux points d'intersection sont bien concourantes en un point P de l'hyperbole. La proposition est démontrée.

GUADET.

Bonnes solutions : MM. M. Laurence; Parrod ; Quéméneur, à Rouen ; J. Yernaux.
Solutions satisfaisantes : MM. Grangier, à Mouleydier ; Sizaire ; G. Foucry, à Roanne.

MÉCANIQUE

1436. — *Soit un segment de droite* OP, *la cote de* P *étant inférieure à celle de* O. *Un point matériel pesant* M *est assujetti à se mouvoir sans frottement sur* OP.

1° *On suppose le point matériel* M *abandonné à lui-même en* O *et le point* P *variable sur une droite* D. *Étudier les variations du temps employé par* M *pour descendre de* O *en* P. *Montrer que ce temps est minimum pour un point de* D *dont on cherchera le lieu quand la droite* D *passe par un point fixe ou reste parallèle à une direction fixe.*

2° *Le point* M *est toujours abandonné à lui-même en* O *mais le point* P *décrit un cercle* C. *Montrer que deux points de ce cercle sont atteints au bout du temps* t *et que la droite les joignant passe par un point fixe quand* t *varie.*

3° *On suppose de nouveau que le point* P *décrive une droite* D *mais que le point matériel ait une vitesse initiale* v_0. *Combien de points de la droite* D *peuvent-ils être atteints au bout du temps* t ? — *Le temps* t *étant donné, la droite* D *se déplaçant dans un plan passant par* O, *lieu du milieu de* P_1P_2 *quand* OP_1 *et* OP_2 *sont rectangulaires.*

1. Prenons trois axes de coordonnées rectangulaires, O étant l'origine et Oz la verticale descendante. Soient

$$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma}$$

les équations de la droite D.

Un point P variable de cette droite a pour coordonnées

$$x_0+\alpha\rho,\qquad y_0+\beta\rho,\qquad z_0+\gamma\rho,$$

ρ variant.

Si un point matériel pesant décrit OP sans frottement, il le décrit d'un mouvement uniformément accéléré dont l'accélération est $g\dfrac{z_0+\gamma\rho}{d}$, en posant

$$d=\sqrt{(x_0+\alpha\rho)^2+(y_0+\beta\rho)^2+(z_0+\gamma\rho)^2}.$$

Et le temps mis par le point matériel pour aller de O en P est donné par

$$d=\frac{1}{2}g\frac{z_0+\gamma\rho}{d}t^2,\qquad \text{ou enfin}\qquad t^2=\frac{2}{g}\frac{d^2}{z_0+\gamma\rho}.$$

Nous sommes donc ramenés à chercher les variations de la fraction

$$\frac{gt^2}{2}=\frac{(x_0+\alpha\rho)^2+(y_0+\beta\rho)^2+(z_0+\gamma\rho)^2}{z_0+\gamma\rho}$$

en faisant remarquer que si le point P a une cote inférieure à celle du point O, le point matériel décrit le segment OP et que, au contraire, si le point P a une cote supérieure à celle de O, le point matériel décrit le segment PO. Cette remarque est nécessaire pour l'interprétation des résultats.

Le numérateur de la dérivée de la fraction rationnelle en ρ donne, annulé, l'équation

$$(1)\quad 2(z_0+\gamma\rho)[\alpha(x_0+\alpha\rho)+\beta(y_0+\beta\rho)+\gamma(z_0+\gamma\rho)]-\gamma[(x_0+\alpha\rho)^2+(y_0+\beta\rho)^2+(z_0+\gamma\rho)^2]=0.$$

Pour interpréter, supposons que Ox rencontre la droite D. Nous pourrons prendre $y_0 = z_0 = 0$, pour α, β, γ les cosinus directeurs eux-mêmes et supposer γ et x_0 positifs.

L'équation précédente devient alors

$$\frac{gt^2}{2} = \frac{x_0^2 + 2\alpha x_0\rho + (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\rho^2}{\gamma\rho}, \qquad \text{ou encore} \qquad \frac{\gamma g t^2}{2} = \frac{x_0^2}{\rho} + 2\alpha x_0 + \rho\,;$$

l'équation du second degré en ρ devient

$$-\frac{x_0^2}{\rho^2} + 1 = 0, \qquad \rho^2 = x_0^2 \qquad \text{ou} \qquad \rho = \pm x_0.$$

Cette fois, dire que ρ est positif, c'est dire que la cote de P est inférieure à celle de O. La dérivée a donc une seule racine acceptable $\rho = x_0$ pour laquelle elle passe du négatif au positif.

Donc si le point P descend sur la droite D à partir du point A qui a même cote que le point O, le temps diminue de l'infini pour le point A à un minimum pour le point P_1 tel que $AP_1 = AO$, puis augmente indéfiniment quand le point P descend indéfiniment.

La seconde racine $\rho = -x_0$ s'interprète ainsi :

Si P est un point de la droite D de cote supérieure à 0 et que le point P descende sur la droite jusqu'au point A, le temps mis par un point matériel à parcourir un segment PO passe par un minimum pour le point P_2 tel que $AP_2 = AO$.

Reprenons maintenant l'équation (1). Elle donne dans le cas général les ρ des points P_1 et P_2 de coordonnées

$$x = x_0 + \alpha\rho, \qquad y = y_0 + \beta\rho, \qquad z = z_0 + \gamma\rho.$$

Nous devons chercher le lieu de ces points quand la droite D reste parallèle à une direction fixe ou passe par un point fixe.

Remarquons pour cela que l'équation (1) s'écrit encore

$$(2) \qquad 2z(\alpha x + \beta y + \gamma z) - \gamma(x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

Si la droite D est parallèle à une direction fixe, α, β, γ sont proportionnels à des nombres donnés ; donc l'équation (2) donne le lieu du point x, y, z. C'est un cône du second degré qui a son sommet au point O.

Si la droite D passe par le point fixe x_0, y_0, z_0, on aura le lieu des points P_1 et P_2 en remplaçant dans la relation (2) α, β, γ par $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$; d'où l'équation

$$2z[x(x - x_0) + y(y - y_0) + z(z - z_0)] - (z - z_0)(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

ou encore

$$z(x^2 + y^2 + z^2) - 2z(xx_0 + yy_0 + zz_0) + z_0(x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

C'est une surface du troisième degré qui passe par le cercle de l'infini et qui a un point conique au point O.

Remarques géométriques. — Si on abandonne un point pesant en O sur tous les segments de droite tels que OP, au bout du temps t, les positions de ce point matériel sont sur une sphère dont le diamètre est $O\mu$, en appelant μ la position qu'occuperait le point matériel s'il descendait librement sur la verticale du point O.

Nous allons donc considérer les sphères tangentes en O au plan horizontal de ce point et situées sous ce plan horizontal.

Quand t est très petit, ces sphères ne coupent pas la droite D. Quand t est très grand, elles coupent la droite D en un point voisin de A et en un point très éloigné vers le bas.

Or, il existe une seule sphère du faisceau considéré tangente à la droite D en un point situé en dessous du point O ; et elle la touche en P_1 tel que $AO = AP_1$. Soit τ le temps correspondant à cette sphère. Quand $t < \tau$, la sphère ne rencontre pas la droite D ; quand $t > \tau$, la sphère la rencontre.

τ est donc le minimum que nous obtenons ainsi par des considérations purement géométriques.

Le point P_2 est le point de contact avec D d'une sphère du faisceau située au-dessus du plan horizontal du point O.

Quant aux lieux des points P_1 et P_2, leur recherche se ramène au problème suivant :

Lieux des points de contact des tangentes parallèles à une direction fixe ou passant par un point fixe, menées aux sphères tangentes à un plan donné en un point donné.

Nous laisserons au lecteur le soin d'en poursuivre l'étude géométrique.

2. Reprenons les sphères tangentes en O au plan horizontal et situées sous ce plan.

Elles coupent le plan Q du cercle C suivant des cercles γ ayant pour axe radical commun la droite d'intersection Δ du plan Q et du plan horizontal du point O, et ne coupant pas cet axe radical en des points réels.

Mais nous n'avons à considérer que ceux de ces cercles qui sont sous la droite Δ. Il sera donc nécessaire et suffisant pour qu'un point du cercle C puisse être atteint que ce cercle ait des points de cote inférieure à ceux de Δ. Si cette condition est remplie, deux points du cercle C situés sur un même cercle γ seront atteints au bout du même temps: La droite qui joint ces deux points est l'axe radical du cercle C et d'un cercle γ et l'on sait que ces axes radicaux, quand le cercle γ varie, passent par un point fixe B situé sur la droite Δ.

Cette méthode peut encore donner la variation du temps quand le point P décrit le cercle C. Le maximum et le minimum possibles sont les temps qui correspondent aux cercles γ qui sont tangents au cercle C. Il y en a deux dont les points de contact avec le cercle C sont les points de contact des tangentes issues du point B à ce cercle.

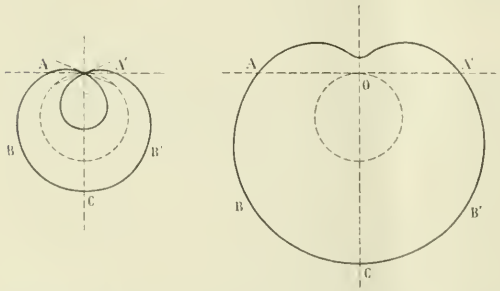
Bornons-nous à énoncer les résultats suivants :

Si le cercle C coupe la droite Δ, le temps varie de $+\infty$ à un minimum. Si le cercle C ne coupe pas la droite Δ, le temps varie entre un minimum et un maximum.

3. Quand on abandonne en O un point matériel pesant sur toutes les droites d'un plan passant par O, le lieu de ses positions au bout du temps t est un cercle tangent en O à l'horizontale.

Si on le lance avec une vitesse v_0, le lieu de ses positions au bout du temps t sera un limaçon de Pascal obtenu en ajoutant et en retranchant $v_0 t$ au rayon vecteur compté à partir du point O d'un point du cercle précédent. On ajoutera $v_0 t$ si la vitesse est dirigée vers le bas ; on retranchera $v_0 t$ si la vitesse est dirigée vers le haut.

Dans les figures suivantes, le premier cas est représenté par les parties ABCB'A' des limaçons.



On voit que si l'on suppose que v_0 puisse être dirigé vers le haut, il n'est plus nécessaire pour qu'un point de la droite D puisse être atteint que sa cote soit inférieure à celle du point O et, suivant le sens de v_0, on est ramené à chercher le nombre de points communs à une droite et à l'une ou l'autre des parties distinguées sur le limaçon.

Se donner t, faire déplacer la droite D dans un plan passant par O, chercher le lieu du milieu de P_1P_2 quand OP_1 et OP_2 sont rectangulaires, revient à chercher le lieu des milieux des cordes d'un limaçon de Pascal qui sont vues du point double sous un angle droit.

Soit $\rho = a\cos\omega + b$ l'équation du limaçon rapporté aux coordonnées polaires habituelles.

Soient ω, $a\cos\omega + b$ les coordonnées du point P_1, celles de P_2 sont $\omega + \frac{\pi}{2}$, $-a\sin\omega + b$.

Les coordonnées cartésiennes sont

$$P_1 \begin{cases} (a\cos\omega + b)\cos\omega, \\ (a\cos\omega + b)\sin\omega \end{cases} \qquad P_2 \begin{cases} -(-a\sin\omega + b)\sin\omega, \\ (-a\sin\omega + b)\cos\omega. \end{cases}$$

Les coordonnées du milieu sont donc

$$2x = a + b(\cos\omega - \sin\omega) = a + b\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} + \omega\right),$$

$$2y = b(\cos\omega + \sin\omega) = b\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \omega\right),$$

et le lieu de ce point est le cercle

$$(2x - a)^2 + 4y^2 = 2b^2.$$

Solutions satisfaisantes de MM. Dulimbert, à Grenoble ; M. Grangier, à Mouleydier.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE (1905)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

Mathématiques (M. Tannery).

575. — Etudier la fonction $y = \sin x^2$. Evaluer l'aire d'une arche. Arrive-t-on à une limite finie en comptant les aires positivement en dessus de Ox et négativement en dessous ? Même question en comptant toutes les aires positivement (On comparera à l'intégrale $\int \frac{x}{a}\sin x^2 dx$).

576. — Trouver toutes les droites qui rencontrent un hyperboloïde à une nappe en deux points confondus à l'infini.

577. — Trouver la fonction y donnée par l'équation différentielle

$$(1 - x^2)y'' - xy' + l^2 y = 0.$$

(On posera $x = \cos t$).

Peut-on avoir pour y un polynome entier en x ?

578. — Etudier la surface définie par les équations

$$x = u + v, \qquad y = uv, \qquad z = u^3 + v^3.$$

Y a-t-il des points réels donnés par des valeurs imaginaires de u et v ? Directions asymptotiques. Génératrices. Enveloppe des projections de ces génératrices sur le plan des yz.

579. — Soient MT la tangente et MN la normale à une courbe en un point M limitées à l'axe des x. Déterminer cette courbe de façon que l'aire du triangle MTN soit constante et égale à a^2.

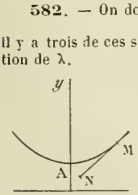
580. — Sections cycliques de l'hyperboloïde à une nappe.

581. — Etant donnée $f(x) = x^3 + px + q$; soit $\varphi(x)$ un trinome du second degré. Intégrer $\int \left[\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right]^2 dx$. On suppose les racines de $f(x)$ réelles et distinctes et on met la fraction sous la forme $\sum \frac{A}{(x - x_1)^2} + \sum \frac{B}{x - x_1}$. Déterminer la fonction φ de façon que les coefficients B soient nuls. On a pour déterminer φ une équation différentielle. Solution générale de cette équation différentielle. Manière de trouver l'intégrale comme fonction symétrique $\sum \frac{A}{x - x_1}$.

582. — On donne les surfaces

$$(A - \lambda)x^2 + (B - \lambda)y^2 + (C - \lambda)z^2 - 1 = 0.$$

Il y a trois de ces surfaces tangentes à un plan donné. Nature de ces surfaces. Coordonnées des points de contact en fonction de λ.



583. — Construire la courbe $y = \operatorname{ch} x$. Sur la tangente à cette courbe et dans le sens des x décroissants on porte une longueur MN égale à la longueur de l'arc AM. Lieu du point N. Construire ce lieu. Tangente au point N.

584. — Montrer que l'hyperboloïde à une nappe admet deux systèmes de génératrices rectilignes.

585. — Trouver une courbe $\rho = f(\omega)$, telle que la tangente MT et la normale MN en chaque point interceptent un segment de longueur constante sur la perpendiculaire au rayon vecteur mené par l'origine. Construire cette courbe.

586. — On considère l'intégrale définie $\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$; effectuer le changement de variable $x = \varphi(t)$. Dans la nouvelle expression $\int_{t_0}^{t_1} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$ on a en général plusieurs déterminations pour t_0 et t_1. Faut-il choisir entre ces déterminations et de quelle manière : 1° quand $f(x)$ est définie et continue pour toute valeur de x ; 2° quand $f(x)$ n'est définie et continue que dans un intervalle (a, b) comprenant l'intervalle (x_0, x_1) ?

587. — Etude de la surface $$x^2(z-a)^2 + y^2(z+a)^2 = x^2y^2.$$

Points doubles. Cette surface est-elle réglée? Equation d'une génératrice en fonction d'un paramètre, en fonction rationnelle d'un paramètre. La surface est unicursale. Section par un plan ; elle est unicursale. Cas où le plan est tangent ; préciser alors la décomposition. Montrer que toute génératrice rectiligne est tangente à un cylindre. Comment opérerait-on pour trouver sur la surface une courbe qui coupe orthogonalement en chacun de ses points la génératrice rectiligne qui passe en ce point ?

588 — On considère l'équation $f(x) = 0$, $f(x)$ étant un polynome entier, et on pose $y = \varphi(x)$, $\varphi(x)$ étant aussi un polynome entier. On élimine x entre ces équations ; on obtient une équation $F(y) = 0$. Degré de cette équation, montrer qu'il n'y a pas d'exception. En supposant qu'on puisse résoudre cette équation, comment en tirerait-on les racines de $f(x) = 0$? Supposant que $f(x) = 0$ n'ait que des racines simples, dans quel cas le *p.g.c.d.* entre $f(x)$ et $\varphi(x) - y_0$ est-il d'un degré supérieur à 1 ?

Mathématiques (M. Guichard.)

589. — On donne un angle trièdre SABC. Montrer que si par chaque arête on mène un plan perpendiculaire sur la face opposée, les trois plans ainsi obtenus se coupent suivant une même droite SD. Etudier la correspondance entre la droite SA et la droite SD, ces deux droites étant supposées variables et les droites SB, SC, fixes. Lieu de SD quand SA décrit un plan passant par S.

590. — Démontrer que les trois diagonales d'un quadrilatère complet ont leurs milieux en ligne droite. Généraliser ce théorème par projection.

591. — Théorème sur les séries alternées.

592. — Étudier les séries $u_n = \frac{n!}{n^n}$, $u_n = \frac{n^n}{x^{n^2}}$.

593. — Limite de $\sqrt[n]{n}$, quand n grandit indéfiniment.

594. — Étudier la série de terme général $u_n = \sqrt[n]{n} - 1$.

595. — On donne une directrice d'ellipse et un sommet du petit axe. Trouver le lieu des autres sommets et des foyers (solutions analytiques et géométriques.)

596. — Théorème de Descartes et questions accessoires.

597. — On donne trois axes rectangulaires $oxyz$. Une droite D qui perce le plan des yz en A, des zx en B et des xy en C est astreinte aux conditions que AB et AC restent constantes. Donner les équations générales de cette droite. Un point M de cette droite est invariablement lié à A, B, C ; trouver son lieu lorsque la droite varie. Analogue en géométrie plane. Démontrer que toutes ces droites D sont normales à une surface.

598. — Équation de la cycloïde. Tangente en un point ; coefficient angulaire de cette tangente. Propriété géométrique qu'on peut en déduire. Rectifier cette courbe. Longueur de l'arc entre un point M quelconque et le sommet de la branche qui porte le point M. Montrer que c'est le double de la longueur de la tangente en M jusqu'au point de rencontre avec la tangente au sommet. Rayon de courbure ; développée. Aire et centre de gravité de la branche correspondante. Montrer que la normale passe au point de contact du cercle générateur avec l'axe des x par la considération du centre instantané de rotation.

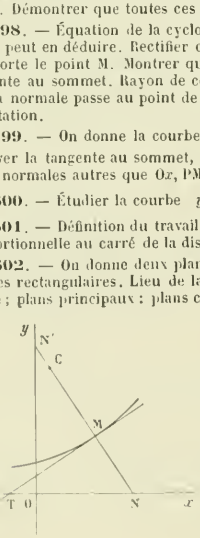
599. — On donne la courbe $$x^2 - 2xy + y^2 + 4x = 0.$$

Trouver la tangente au sommet, l'axe, le sommet, le paramètre. Soit P un point de l'axe des x ; de ce point on mène les deux normales autres que Ox, PM et PN. Lieu du milieu de MN quand le point P décrit Ox.

600. — Étudier la courbe $y = \frac{\sin 2x}{1 - 2\cos x}$. Calculer l'aire comprise entre l'axe des x, la courbe et une ordonnée.

601. — Définition du travail élémentaire d'une force ; expression analytique. Cas d'une force constante inversement proportionnelle au carré de la distance et attractive ; travail total.

602. — On donne deux plans qui se coupent ; par un point de leur intersection, on mène dans ces deux plans deux droites rectangulaires. Lieu de la droite perpendiculaire au plan des deux précédentes. Ce lieu est un cône du second degré ; plans principaux ; plans cycliques.



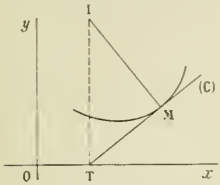
603. — Calculer l'intégrale $\int \frac{x^2dx}{(x^2+x+1)^2}$.

604. — MT et MNN' sont la tangente et la normale à une courbe limitées comme l'indique la figure. Déterminer cette courbe de façon que MN soit constante, ou que $\frac{ON}{OT} = c^{te}$, ou que $\frac{MC}{MN} = c^{te}$, C étant le centre de courbure, ou que $\frac{MN}{MN'} = c^{te}$.

605. — Lieu des centres des hyperboles équilatères ayant une directrice donnée et passant par un point donné. Lieu des sommets.

606. — Soient MT et MI la tangente et la normale en un point d'une courbe (C) ;

MT coupe Ox en T, et la parallèle à Oy menée par T coupe MI en I. Déterminer (C) pour que I décrive une droite. On peut chercher l'équation cartésienne et on peut encore procéder ainsi : on pose $OT = \xi$, $(Tx, TM) = \varphi$ et $TM = r$; existe-t-il une relation entre φ, r et ξ ? De quel genre est cette relation ? La trouver. En s'appuyant sur ce résultat définir la courbe (C) comme enveloppe d'une droite TM qui ne dépend plus que d'un paramètre. Examiner aussi le cas où I décrit une parabole ayant son sommet sur Ox. Profiter de l'indétermination de l'origine pour simplifier les résultats.



607. — Normales à une ellipse par un point. Hyperbole d'Apollonius. L'ellipse étant rapportée à ses axes, on mène les tangentes à l'ellipse aux pieds des normales ; équation tangentielle de la parabole tangente à ces quatre droites ; ses particularités : trouver sa directrice comme lieu des points d'où la parabole est vue sous un angle droit : pouvait-on prévoir qu'elle passerait à l'origine ? Trouver son équation ponctuelle, son foyer.

608. — On considère deux triangles ABC et A'B'C' ; par A on mène la perpendiculaire à B'C' ; par B, la perpendiculaire à C'A' ; par C, la perpendiculaire à A'B'. Montrer que si ces perpendiculaires concourent en un même point, la propriété analogue est vérifiée par le triangle A'B'C'.

609. — Montrer que deux triangles polaires réciproques par rapport à une conique sont homologiques.

Physique (M. Maurain).

610. — Electrophore. — Replenisher de William Thomson ; comment varient les charges ?

611. — Lunette de Galilée ; marche des rayons lumineux. Peut-elle servir à faire des visées ?

612 — Champ magnétique terrestre. Dilatation des corps solides.

613. — Equivalent mécanique de la calorie.

614. — Influence électrique ; expérience de Faraday. — Electrophore ; variation du potentiel quand on enlève le plateau.

615. — Achromatisme des lentilles ; peut-on achromatiser trois couleurs ?

616. — Chaleurs spécifiques.

617. — Réfraction à travers un dioptre sphérique.

618. — Expériences sur la tension superficielle.

619. — Les condensateurs en électricité. — Phénomènes qui se produisent quand on éloigne une armature de l'autre.

620. — Lunette astronomique. — Grossissement quand l'image finale n'est pas à l'infini.

621. — Capillarité. — Loi de Jurin. — Tension superficielle. — Equation différentielle de la surface libre d'un liquide.

622. — Machines d'Atwood et de Morin.

623. — Approximations de la loi de Mariotte. — Isothermes d'Amagat. — Loi des états correspondants. — Formule de Van der Waals.

EXAMENS DE 1905 (*Suite.*)

CERTIFICAT D'ÉTUDES SUPÉRIEURES (*Rennes, juin 1905.*)

Mathématiques préparatoires à la physique et aux sciences industrielles.

Épreuve écrite.

I. — Théorie des enveloppes des courbes planes.

II. — **1497.** Trouver l'enveloppe de la droite $x \cos \alpha + y \sin \alpha - a\alpha = 0$, α désignant un paramètre variable.

Exprimer les coordonnées d'un point de l'enveloppe en fonction de α.

Trouver l'expression de l'arc, du rayon de courbure, des coordonnées du centre de courbure en fonction du même paramètre.

Reconnaître la nature de la développée.

Epreuve pratique.

I. — Résoudre l'équation différentielle

$$\frac{d^3u}{dx^3} + \frac{du}{dx} = 0.$$

II. — Calculer l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$$

à un dix-millième près.

QUESTIONS PROPOSÉES

1498. — On donne une hémisphère solide, homogène, de centre O et de rayon R. Calculer à $\frac{1}{1000}$ près le rapport dans lequel un plan sécant parallèle au plan de base doit partager le rayon OA perpendiculaire au plan de base pour que les deux portions déterminées par ce plan dans l'hémisphère aient même moment d'inertie par rapport à l'axe OA.

CH. MICHEL.

1499. — Soit la courbe (C) $\rho = a(1+\cos\omega)$.

1° Calculer le rayon de courbure et construire la développée.

2° On suppose que la courbe (C) soit dans un plan vertical, que l'axe polaire soit horizontal et on astreint un point matériel uniquement soumis à son poids à décrire sans frottement la courbe (C). Montrer que dans ce mouvement, en posant $\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = \lambda$, on a

$$dt = \frac{d\lambda}{\sqrt{(1+\lambda^2)f(\lambda)}},$$

$f(\lambda)$ étant un polynome du quatrième degré.

3° Faire la discussion, d'après les conditions initiales, du mouvement du point matériel sur la courbe. En particulier, supposer la vitesse initiale nulle.

Application numérique. — Le point matériel est abandonné au point de la courbe $\omega = \frac{\pi}{2}$. Calculer à 1 minute près, en grades, l'angle polaire de l'autre extrémité de sa course, sur la courbe. Quelle approximation en résulte-t-il pour la valeur en radians si on prend $\pi = 3,14$?

(On suppose le point initial $\omega = \frac{\pi}{2}$ situé en dessous de l'axe polaire.)

4° Calculer la réaction normale de la courbe (C) sur le point matériel et discuter ses changements de sens.

TH. L.

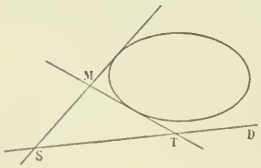
DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES (*Cours préparatoires.*)

Concours de 1905.

1439. *Étant donnée une conique, on demande le lieu des points* M *tels que les deux tangentes issues de ce point à la conique détachent sur une droite donnée* D *un segment* ST *de longueur donnée.*

Discuter les cas particuliers et notamment celui où la droite D *est tangente à la conique.*



Nous prendrons la droite D pour axe des x et le diamètre conjugué de cette direction pour axe des y.

L'équation de la conique sera alors

$$ax^2 + by^2 + 2cy + d = 0,$$

et le faisceau des tangentes issues d'un point $M(\alpha, \beta)$ à cette conique aura pour équation

$$(a\alpha^2 + b\beta^2 + 2c\beta + d)(ax^2 + by^2 + 2cy + d) - [a\alpha x + (b\beta + c)y + c\beta + d]^2 = 0.$$

L'équation aux abscisses des points d'intersection de cette conique impropre avec l'axe des x est donc

$$ax^2(b\beta^2 + 2c\beta + d) - 2a\alpha(c\beta + d)x + ad\alpha^2 + (bd - c^2)\beta^2 = 0,$$

et l'on a, entre les coefficients et les racines, les relations

$$x' + x'' = \frac{2a\alpha(c\beta + d)}{a(b\beta^2 + 2c\beta + d)}, \qquad x'x'' = \frac{ad\alpha^2 + (bd - c^2)\beta^2}{a(b\beta^2 + 2c\beta + d)}.$$

D'autre part, en appelant l la longueur interceptée sur Ox, on a aussi

$$|x' - x''| = l. \qquad \text{ou} \qquad (x' - x'')^2 = l^2.$$

et comme

$$(x' - x'')^2 = (x' + x'')^2 - 4x'x'',$$

$$l^2 = \frac{4a^2\alpha^2(c\beta + d)^2 - 4a(b\beta^2 + 2c\beta + d)[ad\alpha^2 + (bd - c^2)\beta^2]}{a^2(b\beta^2 + 2c\beta + d)^2}.$$

Cette équation est du quatrième degré en α et β; le lieu du point M est donc une quartique en général.

Si la droite D est tangente à la conique, d est nul et l'équation devient, après suppression du facteur β^2,

$$\frac{al^2}{4c^2}(b\beta + 2c)^2 = a\alpha^2 + b\beta^2 + 2c\beta,$$

ou

$$k(b\beta + 2c)^2 = a\alpha^2 + b\beta^2 + 2c\beta, \qquad \text{en posant} \qquad k = \frac{al^2}{4c^2}.$$

Elle représente une conique osculatrice à la conique proposée au point le plus haut et qui coupe l'axe des x en deux points équidistants de l'origine et situés à une distance égale à l du point O. Ces résultats particuliers étaient évidents *a priori*.

Si la conique donnée est une ellipse, celle-ci peut-être une ellipse, une hyperbole ou une parabole; en particulier, c'est une parabole si $kb = 1$. Si la conique donnée est une hyperbole, celle-ci est toujours une hyperbole et si la conique donnée est une parabole, celle-ci est toujours une parabole égale, c'est-à-dire osculatrice à la première au point à l'infini sur Oy.

Il est à remarquer encore que, lorsque l varie de 0 à $+\infty$, on obtient toutes les coniques osculatrices à la conique proposée au point le plus haut et pour lesquelles le paramètre k est positif; mais aucune de celles pour lesquelles k est négatif (en supposant a positif, bien entendu).

Cela s'explique sans peine, en remarquant que, d'après la définition, le lieu du point M doit être dans la région extérieure de la conique donnée, et que celle-ci est la région positive, si a est positif.

Bonnes solutions : MM. Dessimond, à Alger ; Grangier, à Mouleydier. Ces deux correspondants ont tracé approximativement la quartique.

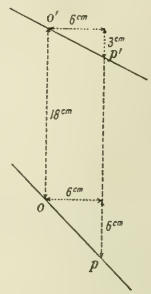
1440. — *On donne les points* (o, o') *et* (p, p') *définis par le croquis ci-contre.*

On considère : 1° *la sphère de centre* (o, o') *qui a un rayon de* 6^{cm} ; 2° *le cône de révolution d'axe* $(op, o'p')$ *dont le sommet se trouve sur la sphère entre les points* (o, o') *et* (p, p') *et dont l'angle au sommet est de* 60°.

Représenter le solide commun à cette sphère et à ce cône (les lignes qui limitent ce solide en noir, celles qui sont cachées étant pointillées ; les lignes de construction en rouge).

On déterminera directement les points de contact des projections de la courbe d'intersection des deux surfaces avec leurs contours apparents.

Contours apparents du cône. — On obtient le sommet du cône en rabattant le plan vertical OP sur le plan de l'équateur ; le point P vient en p'_1 et le diamètre op'_1 coupe le grand cercle en s'_1 qui se relève en s, d'où le sommet s, s'. Pour avoir le contour apparent du cône, nous construisons la génératrice du plan méridien vertical rabattue en $s'_1 b'_1$, qui fait 30° avec l'axe $s'_1 o$, et pour cela il suffit de décrire du point i'_1 comme centre avec un rayon $i'_1 c'_1$ égal au rayon de la sphère un arc qui coupe en c'_1 et b'_1 la circonférence, puis de joindre $s'_1 b'_1$. La circonférence de centre o et tangente à $s'_1 b_1$ donne le contour apparent horizontal d'une sphère inscrite dans le cône, en sorte qu'il suffit de lui mener les tangentes par le point s pour avoir les génératrices de contour apparent horizontal du cône. On a de même, en menant par s' les tangentes à la projection verticale de la même sphère, le contour apparent vertical du cône.



Projection horizontale de la section. — L'axe du cône, passant par le centre de la sphère, est un axe de révolution commun pour les deux surfaces ; elles se coupent donc suivant deux parallèles dont l'un est réduit à un point S, le sommet du cône, puisqu'il est sur l'autre surface ; l'autre a son plan perpendiculaire à SO et sa trace sur le plan méridien vertical SO est rabattue suivant la corde $b'_1 c'_1$ dont les extrémités sont sur les génératrices situées dans ce plan. On a ainsi en ω'_1 le rabattement du centre du parallèle dont le diamètre est $b'_1 c'_1$. La projection de ce cercle est une ellipse dont le grand axe est perpendiculaire à $s\omega$ et a pour longueur $b'_1 c'_1$, le petit axe étant le relèvement du diamètre $b'_1 c'_1$ lui-même, qui est dirigé dans l'espace suivant la ligne de pente du plan. Connaissant les deux demi-axes ωa et ωb de l'ellipse, on peut la construire par points.

On en doit construire directement les points sur le contour apparent de chaque surface : pour la sphère, il suffit de mener l'horizontale du plan du cercle située dans le plan de l'équateur.

On en connait un point t où le diamètre $b'_1c'_1$ traverse la charnière so. On peut donc tracer cette horizontale qui donne les points cherchés m et n. Pour le cône, il suffit de prendre les traces, sur le plan sécant, des génératrices de contour apparent horizontal. Or le plan de ces génératrices est perpendiculaire au méridien vertical SO et passe par les points de contact tels que k avec la sphère inscrite ; sa trace sur le plan vertical SO est donc rabattue en $s'_1k'_1p'_1$, et son intersection avec $b'_1c'_1$, trace du plan de base du cône sur le même plan SO, donne la projection de l'horizontale cherchée qui fait connaître les points p où l'ellipse touche le contour apparent horizontal.

Projection verticale. — La projection verticale du cercle de section peut être déterminée par ses axes comme la première, en rabattant le plan de bout de l'axe du cône SO sur le plan de front du centre de la sphère, ce qui revient à faire un changement de plan horizontal. On a ainsi l'axe du cône en s_1o' et on reprend exactement les mêmes constructions que précédemment. On obtient ainsi le demi-grand axe $\omega'd' = \frac{f_1r_1}{2}$ et le demi-petit axe $\omega'f'$. Les points sur le contour apparent vertical de la sphère sont donnés par la ligne de front $q'h'$ du plan de la section et ceux sur le contour apparent du cône par la frontale v_1v' construite à l'aide du point v_1, v' en raisonnant comme pour la projection horizontale.

Nous avons construit directement la tangente en un point de la section en choisissant le point de contact où cette tangente est de profil, ce qui donne le point le plus à droite et le point le plus à gauche de la courbe ; la construction est indiquée seulement pour le premier, z' ; le plan du cercle Ω ayant été rabattu sur le plan de front de son centre, on a déterminé le rabattement d'une ligne de profil, $d't'$ par exemple, en $d't_2$ et on a mené au cercle rabattu une tangente parallèle à $d't_2$; le point de contact est l'extrémité z_2 du rayon perpendiculaire à $d't_2$ et on en a déduit le point cherché z'. On aurait le point le plus à gauche en menant le diamètre $z'\omega'$ de l'ellipse.

Solide commun. — Il est limité par les portions de génératrices de contour apparent du cône intérieures à la sphère et la calotte sphérique intérieure au cône ; les deux surfaces ont en commun le cercle de section qui subsiste entièrement et dont on découvre en projection horizontale l'arc $mpbn$ et en projection verticale l'arc $v'h'f'v'$. En effet, sur la projection horizontale, par exemple, l'arc bp est vu à la fois sur les deux surfaces (il suffit de considérer le point h, h'). Or un mobile qui suivrait la courbe traverserait en p le contour apparent pour devenir caché par la portion de surface à laquelle appartient le prolongement de sp qui est enlevée ; donc il reste visible jusqu'au point m où il traverse le contour apparent de la sphère pour être caché par la portion de surface conservée, à savoir la calotte ωA.

Le même raisonnement est applicable à la projection verticale.

ALGÈBRE

1442. — *On donne un polynome du troisième degré* $f(x) \equiv ax^3 + bx^2 + cx + d$, *et on demande de déterminer un polynome du second degré* $x^2 + px + q$ *tel que pour les racines de ce polynome,* x' *et* x'', *on ait*

$$f(x') = x'', \qquad f(x'') = x'.$$

Indiquer le nombre des solutions et le moyen de calculer p *et* q.

Trouver dans quel cas on a $\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = 1$ *et donner alors les valeurs de* p *et* q *à l'aide de* a, b, c, d.

Divisons $f(x)$ par $x^2 + px + q$ et désignons le quotient par $ax + \lambda$ et le reste par $Ax + B$; nous aurons

$$f(x) \equiv (ax + \lambda)(x^2 + px + q) + Ax + B.$$

Les conditions imposées vont nous donner A et B ; en effet, pour x' et x'' la première partie du second membre est nulle et nous avons $Ax' + B = x''$, $Ax'' + B = x'$; donc, en retranchant, $A = -1$ et $B = x' + x'' = -p$. Par conséquent, l'identité indiquée devient

$$ax^3 + bx^2 + cx + d \equiv (ax + \lambda)(x^2 + px + q) - x - p,$$

et elle donne

$$ap + \lambda = b, \qquad aq + \lambda p - 1 = c, \qquad \lambda q - p = d\,;$$

λ est donné par la première de ces équations et égal à $b - ap$, et alors p et q sont solutions des deux équations

$$aq + p(b - ap) - c - 1 = 0, \qquad q(b - ap) - p - d = 0.$$

La première donne

$$q = \frac{ap^2 - bp + c + 1}{a},$$

et, en portant cette valeur dans la seconde, elle devient

$$(ap - b)(ap^2 - bp + c + 1) + a(p + d) = 0.$$

C'est une équation du troisième degré en p, qui donne trois valeurs pour p; le problème admet donc trois solutions.

Si l'on veut que $\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = 1$, il faudra prendre $q = -p$, et alors les deux équations en p et q deviendront

$$-ap^2 + (b - a)p - c - 1 = 0, \qquad ap^2 - (b + 1)p - d = 0;$$

en ajoutant ces deux équations, elles donnent

$$-p(a + 1) - c - d - 1 = 0,$$

d'où

$$p = -\frac{c + d + 1}{a + 1}.$$

Il n'y a plus qu'à porter cette valeur dans la seconde équation pour avoir la relation qui existe entre les coefficients du polynome proposé; cette relation est

$$a(c + d + 1)^2 + (b + 1)(c + d + 1)(a + 1) - d(a + 1)^2 = 0,$$

et l'on a alors

$$q = -p = \frac{c + d + 1}{a + 1}.$$

Le calcul que nous venons de faire suppose $a \neq -1$. Si $a + 1$ est nul, la relation se réduit à $c + d + 1 = 0$, les deux équations du second degré en p ont deux racines communes, et p a deux valeurs qui sont les racines de l'équation

$$ap^2 - (b + 1)p - d = 0, \qquad \text{ou} \qquad p^2 + (b + 1)p + d = 0,$$

puisque $a = -1$. On a toujours $q = -p$ et le problème posé admet deux solutions.

M. Camille Massing, qui nous a envoyé une solution détaillée de cette question, examine aussi le cas où $\frac{1}{x} + \frac{1}{x''}$ est quelconque et il montre alors qu'il y a trois trinomes $x^2 + px + q$ satisfaisant à la condition imposée, et cela quelle que soit l'équation donnée du troisième degré.

Solutions satisfaisantes : MM. Ducos, lycée Carnot; J. Vernaux, à Mons; A. Darmon, à Alger; G. Pélissier, à Toulouse; Amblard, à Rennes; H. Janois, à Nantes; R. Manen, à Lille; Ivan Zenoff, à Sophia.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1441. — *Par l'un des points de rencontre de deux cercles, on mène une sécante variable qui rencontre à nouveau les deux cercles en* A *et* B. *Trouver le lieu du conjugué harmonique du premier point par rapport aux deux points* A *et* B.

Prenons pour axe des y l'axe radical des deux cercles et pour axe des x la ligne des centres. Les

équations des deux cercles seront

$$x^2 + y^2 - 2bx - a^2 = 0, \qquad x^2 + y^2 - 2b'x - a^2 = 0,$$

et ces cercles se coupent en deux points A et A′ dont les coordonnées sont $(0, a)$ et $(0, -a)$. Faisons passer par le point A une sécante quelconque, $y - a = \lambda x$, et cherchons les abscisses de ses points de rencontre avec les deux cercles ; nous aurons ainsi

$$x = \frac{2(b - a\lambda)}{\lambda^2 + 1} \qquad \text{et} \qquad x = \frac{2(b' - a\lambda)}{\lambda^2 + 1}.$$

En appelant x l'abscisse du conjugué harmonique A par rapport à ces deux points et écrivant la relation harmonique, nous avons de suite

$$x = \frac{4(b - a\lambda)(b' - a\lambda)}{(\lambda^2 + 1)(b + b' - 2a\lambda)}.$$

D'autre part, le point du lieu vérifie aussi l'équation $y - a = \lambda x$ de la sécante, et nous aurons le lieu demandé en éliminant λ entre les deux équations, c'est-à-dire en remplaçant λ par $\dfrac{y - a}{x}$ dans la première équation. Nous obtenons de cette façon l'équation

$$[x^2 + (y - a)^2][(b + b')x - 2a(y - a)] = 4[bx - a(y - a)][b'x - a(y - a)];$$

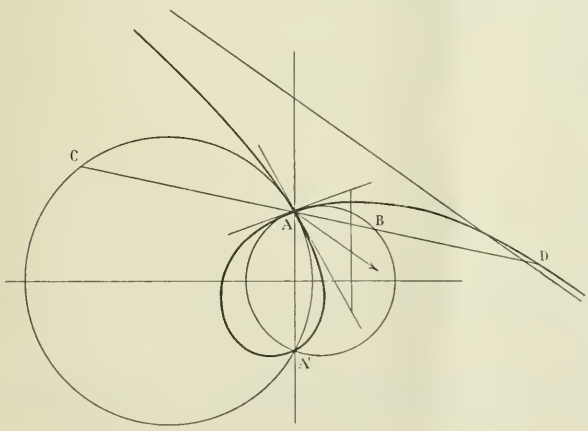
elle représente une cubique circulaire ayant pour point double le point A dont les coordonnées sont 0 et a. Cette équation se simplifie en portant les axes parallèlement à eux-mêmes au point A et devient

$$(x^2 + y^2)[(b + b')x - 2ay] - 4(bx - ay)(b'x - ay) = 0.$$

Nous voyons alors que les tangentes au point double sont justement les droites $bx - ay = 0$ $b'x - ay = 0$, qui sont aussi les tangentes aux deux cercles au point A. Cela est évident géométriquement *a priori*.

Quant à la direction asymptotique $(b + b')x - 2ay = 0$, elle a pour coefficient angulaire la demi-somme des coefficients angulaires de ces deux tangentes ; elle est donc conjuguée harmonique de l'axe radical par rapport aux tangentes aux deux cercles ; c'est la droite passant par le point A et qui rencontre les deux cercles en deux points symétriques par rapport au point A.

L'asymptote a pour équation $\quad (b + b')x - 2ay + \dfrac{4a^2(b - b')^2}{4a^2 + (b + b')^2} = 0.$



La courbe passe aussi au point A′, comme cela est évident *a priori* et se vérifie d'ailleurs immédiatement sur l'équation

Remarque. — MM. G. Pélissier et R. Bouvaist ont étudié géométriquement le lieu par une méthode directe et remarqué, en outre, en considérant deux sécantes infiniment voisines ABCD et AB′C′D′, que la tangente en D est la polaire du point A par rapport aux deux tangentes aux cercles en B et C. Cette construction donne aisément l'asymptote.

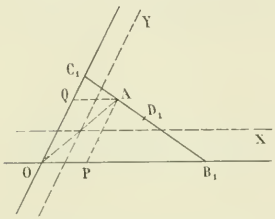
Solution géométrique. — Soient B et C les points de rencontre de la sécante avec les deux cercles et D le conjugué harmonique de A par rapport aux deux points B et C. Nous avons $\frac{AB}{AC} = -\frac{DB}{DC}$.

Transformons la figure par rayons vecteurs réciproques en prenant le point A pour origine et une puissance quelconque d'inversion k. Les deux cercles deviendront deux droites se coupant sous le même angle que les deux cercles en un point A_1 homologue de A', et si nous désignons par B_1, D_1, C_1 les homologues de B, D, C, nous aurons

$$BD = \frac{B_1D_1 \cdot AB \cdot AD}{k}, \qquad CD = \frac{C_1D_1 \cdot AC \cdot AD}{k}, \qquad \text{donc} \qquad \frac{DB}{DC} = \frac{D_1B_1}{D_1C_1}\frac{AB}{AC};$$

par suite $\frac{D_1B_1}{D_1C_1} = -1$ et le point D_1 est le milieu de B_1C_1.

Ceci est d'ailleurs évident autrement : en effet, l'inversion transforme les points d'une droite qui passe au pôle en une autre série homographique à la première et en involution avec elle ; les quatre points A, B, C, D deviennent A_1, B_1, C_1, D_1 et forment encore une division harmonique, dans laquelle A_1 et D_1 sont conjugués de B_1 et C_1 ; or A_1 est à l'infini, donc D_1 est au milieu de B_1C_1.



Nous sommes ramenés à trouver le lieu du milieu d'une sécante limitée à deux droites fixes et qui passe par un point fixe. Ce lieu est une hyperbole qui passe en A, qui est tangente en ce point à une droite ayant ce point pour milieu et s'appuyant sur les deux droites fixes, et qui admet pour asymptotes les deux droites X et Y parallèles à OB_1 et OC_1 et qui se coupent au milieu de OA. Tout cela résulte immédiatement de la considération de deux faisceaux homographiques parallèles à OB_1 et OC_1 et dont les rayons homologues se coupent en D_1.

La figure inverse de cette hyperbole par rapport au point A est une cubique circulaire ayant un point double en A, pour tangentes en ce point, les parallèles à OB_1 et OC_1 et pour asymptote une parallèle à la tangente en A à l'hyperbole.

J.-D. DUFAUT, à Poitiers.

Autre solution géométrique : M. G. Pélissier, à Toulouse. Bonnes solutions analytiques : MM. J. Yernaux, à Mons ; Dessimond, à Alger ; G. Foucry, à Roanne ; R. Bouvaist ; G. Pélissier ; A. Ducos, lycée Carnot ; A. Darmon, à Alger ; Amblard, à Ruines ; P. Sarközy, à Pannonhalma ; Mattei, à Agde ; A. Dediu, à Bucarest ; M. Grangier, à Mouleydier ; H. Janois, à Nantes.

CONCOURS DE 1905 (*Suite*).

ÉCOLE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE

Physique et Chimie.

I. — Chimie.

Exposer brièvement les opérations et réactions qui sont utilisées dans l'industrie pour la préparation du chlore, à partir des produits naturels.

II. — Physique.

1500. — A. Une pile de force électromotrice égale à 3^{volts}, alimente un appareil à électrolyse à azotate cuivrique et à électrodes en platine, d'une force c. é. m. de $1^{\text{volt}},6$. La résistance de la pile est de $0^{\text{ohm}},1$, celle de l'appareil à électrolyse de $0^{\text{ohm}},3$.

On demande : 1° l'intensité du courant ; 2° la quantité de cuivre déposée en une heure.

B. La même pile alimente en parallèle l'appareil à cuivre précédent et un appareil à électrolyse à sulfate de zinc et à électrodes en platine. Sur l'un des deux circuits, on place un rhéostat et on règle sa résistance de telle manière que le poids du cuivre soit le double du poids du zinc déposé dans le même temps.

La force c. è. m. de l'appareil à sulfate de zinc est de $2^{\text{volts}},7$, sa résistance de $0^{\text{ohm}},2$.

On demande : 1° la résistance du rhéostat, l'intensité des courants passant par les deux dérivations, le poids de chacun des deux métaux déposé en une heure ; 2° la quantité de chaleur (en petites calories) dégagée dans rhéostat en une heure.

N. B. — La résistance des fils sera considérée comme négligeable.

Rappel de certaines constantes numériques :

Poids d'argent libéré par le passage d'un coulomb : $1^{\text{mg}},118$.

Poids atomiques : argent, 108 ; cuivre, 63 ; zinc, 65.

La petite calorie équivaut à 4,17 joules.

Mathématiques.

1501. — I. Etude de l'expression $u_n = \dfrac{x^n}{n!}$,

x étant un nombre positif donné et n un entier positif quelconque.

Pour quelle valeur de n, u_n est-il maximum ?

Montrer que, quel que soit le nombre positif ε, on peut trouver un rang ν à partir duquel u_n est certainement plus petit que ε.

II. u_n ayant toujours la même signification, on considère les polynomes :

$$\begin{array}{ll} P_1 = u_1, & P_2 = 1 - u_2, \\ P_3 = P_1 - u_3, & P_4 = P_2 + u_4, \\ P_5 = P_3 + u_5, & P_6 = P_4 - u_6, \\ \dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, \\ P_{2n+1} = P_{2n-1} + (-1)^n u_{2n+1}, & P_{2n} = P_{2n-2} + (-1)^n u_{2n}. \end{array}$$

Étudier les fonctions P_3, P_5, P_7, P_9 et les représenter graphiquement en portant en abscisses x (on se bornera à $x > 0$) et en ordonnées respectivement P_3, P_5, P_7, P_9. Situations de ces courbes les unes par rapport aux autres et positions de leurs points de rencontre avec l'axe x par rapport aux points d'abscisses 1, 2, 3 et 4 de cet axe.

Quant aux fonctions paires P_2, P_4, P_6, ..., on ne les envisagera qu'autant qu'elles seront utiles pour la discussion précédente.

III. Dans la deuxième partie on trouvera en particulier que P_7 a une racine a_7 entre 3 et 4. Utiliser cette remarque pour calculer deux valeurs approchées de cette racine : 1° par la méthode de Newton qu'on démontrera sur cet exemple particulier ; 2° par la méthode des parties proportionnelles en substituant à P_7 la fonction linéaire ayant même valeur que P_7 pour $x = 3$ et $x = 4$. Montrer que ces deux méthodes donnent des valeurs approchées, l'une par excès, l'autre par défaut.

Quelle approximation en résulte-t-il ?

IV. Montrer par voie de récurrence que

$$P_{10} = 0, \qquad P_{11} = 0, \qquad P_{12} = 0, \qquad \dots\dots, \qquad P_n = 0$$

ont une racine et une seule entre 0 et 4, a_{10}, a_{11}, ..., a_n, ...

Si on forme les suites

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11} & a_{15} & a_{19} & \dots\dots & a_{4n-1} & \dots\dots \\ a_{13} & a_{17} & a_{21} & \dots\dots & a_{4n+1} & \dots\dots \end{array}$$

Montrer que la première est croissante et a tous ses termes plus petits qu'un terme quelconque de la deuxième ; que la deuxième est décroissante et a tous ses termes plus grands qu'un terme quelconque de la première.

Elles tendent donc vers des limites ; montrer que ces limites sont les mêmes.

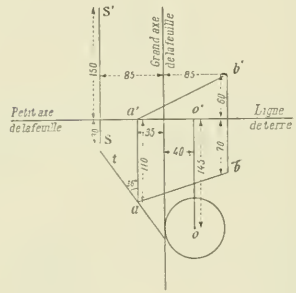
V. Montrer que si on donne à x une valeur bien définie, la suite P_1, P_3, P_5, P_7, ... tend vers une limite. Calculer cette limite à un millième près par défaut et par excès pour $x = 1$ et $x = \dfrac{\pi}{2}$.

(On n'invoquera pas les développements en série des fonctions trigonométriques.)

Trigonométrie.

Dans un triangle, on donne : $A = 5° 10' 25'',3$, $a = 117^m,523$, $b = 124^m,371$.

Calculer B, C, c, S.



Géométrie descriptive.

1502. — Un cône de sommet S, S' a pour base un cercle horizontal de centre O, O' et de 40^{mm} de rayon. Un cube est défini par la diagonale *ab*, *a'b'* d'une de ses faces inférieures, face dont on donne en outre la trace horizontale *at* qui fait un angle de 36° avec les lignes de bout (les cotes sont en millimètres).

Représenter à l'encre de chine, en distinguant les parties vues et cachées, le solide formé par l'ensemble du cube et du cône, ce dernier étant limité à son sommet et à sa base.

Reproduire à l'encre (traits continus de couleur) les constructions pour la mise en place du cube, la détermination d'un point courant de l'intersection avec la tangente, des points et tangentes remarquables. Les intersections du cône avec les prolongements des faces du cube ne devront pas être tracées. L'usage du pistolet pour le tracé des courbes est interdit.

Titre : *Cône et cube.*

QUESTIONS PROPOSÉES

1503. — Étudier les variations de la surface totale d'un cône de révolution circonscrit à une sphère. Trouver la surface minimum et la distance du sommet de ce cône particulier au centre de la sphère.

Trouver par le calcul intégral le volume compris entre la surface du cône circonscrit proprement dite et celle de la sphère qui prolonge celle-ci, dans le cas particulier où la surface est minimum.

Trouver le centre de gravité de ce volume particulier.

E. H.

1504. — On donne une strophoïde S et on considère les cercles variables Γ tangents au point double O à une droite donnée Δ et rencontrant S en des points A et B.

1° Trouver le lieu du pôle P de la droite AB par rapport à Γ.

2° Montrer que le cercle Σ de centre P et de rayon PA passe par deux points fixes C et D.

3° Montrer que si la direction de Δ varie, le cercle circonscrit au triangle OCD passe par un point fixe ω.

4° On suppose que la strophoïde S varie en conservant mêmes tangentes au point double, et en passant en outre par un point fixe α. Montrer que le lieu de ω est alors un cercle. — Cas où le point α est à l'infini.

G. Pelissier, à Toulouse.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

16e Année. N° 10. Juillet 1906.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

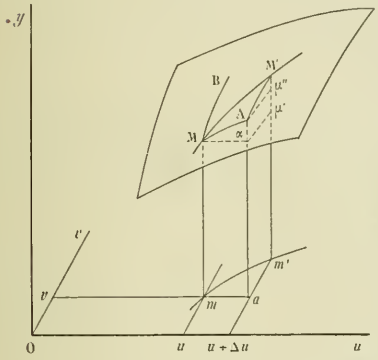
PREMIÈRE PARTIE

SUR LE THÉORÈME DES FONCTIONS COMPOSÉES

Par M. **G. Fontené.**

Il peut être intéressant d'exposer sur une figure la démonstration du théorème des fonctions composées pour le cas de deux fonctions u et v.

1. Soit $y = f(u, v)$, u et v étant des fonctions de x continues et admettant une dérivée ; on suppose que la fonction de deux variables indépendantes $Y = f(U, V)$ est continue, et admet des dérivées partielles du premier ordre dont chacune est une fonction continue des deux variables U et V (f'_U, par exemple, est une fonction continue de la variable de dérivation V, et aussi du paramètre U). Prenons trois axes de coordonnées Ou, Ov, Oy, ou OU, OV, OY ; *considérons la surface* $Y = f(U, V)$, *et la courbe* $y = f(u, v)$ *tracée sur cette surface.* Soit M un point de la courbe, M′ un point voisin ; on peut aller de M en M′ par le chemin MAM′ tracé sur la surface, l'élément de courbe MA étant dans le plan $V = v$, l'élément de courbe AM′ étant dans le plan $U = u + \Delta u$. Les ordonnées étant mM, aA, $m'M'$, menons $M\alpha$ parallèle et égale à ma, menons $\alpha\mu'$ et $A\mu''$ parallèles et égales à am' ; nous aurons



$$\Delta y = \overline{\mu'M} = \overline{\mu'\mu''} + \overline{\mu''M'} = \overline{\alpha A} + \overline{\mu''M'},$$
$$= \frac{\overline{\alpha A}}{\Delta u}\Delta u + \frac{\overline{\mu''M'}}{\Delta v}\Delta v,$$
$$= (Y'_U + \varepsilon)\Delta u + (\overline{Y'_V} + \varepsilon')\Delta v.$$

$\overline{Y}$ désignant l'ordonnée sur la courbe AM′ (on applique ici le théorème des accroissements finis, et on tient compte de ce que les dérivées partielles sont des fonctions continues des variables de dérivation) ; en considérant la section MB de la surface par le plan $U = u$, au lieu de la section AM′ par le plan $U = u + \Delta u$, on peut écrire

$$\Delta y = (Y'_U + \varepsilon)\Delta u + (Y'_V + \varepsilon' + \varepsilon'')\Delta v,$$

puisque la dérivée partielle par rapport à V est une fonction continue du paramètre U. Donc...

2. J'ajouterai la remarque suivante. De même que, pour la courbe représentée par l'équation $y = f(x)$, l'existence de la tangente est subordonnée à l'existence de la dérivée, de même, pour la surface représentée par l'équation $Y = f(U, V)$, l'existence du plan tangent est subordonnée à la possibilité d'appliquer le théorème des fonctions composées à la fonction $y = f(u, v)$, dans laquelle on suppose que u et v sont des fonctions d'une variable x, continues et admettant une dérivée : lorsque le théorème s'applique, si l'on trace sur la surface une courbe $y = f(u, v)$ passant en M, on

a. en prenant les dérivées par rapport à la variable x dont dépendent alors u et v,

$$y' = Au' + Bv',$$

A et B étant f'_u et f'_v ; d'où l'on conclut que la tangente en M à cette courbe est dans le plan

$$Y = AU + BV + C,$$

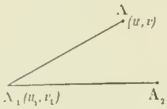
déterminé par les tangentes en M aux deux sections MA et MB de la surface. La propriété du plan tangent est donc une *traduction géométrique* du théorème des fonctions composées, le plan tangent n'existant que si le théorème s'applique ; la détermination de ce plan par les tangentes en M aux deux sections MA et MB correspond d'ailleurs à l'expression de la dérivée d'une fonction composée au moyen des dérivées partielles f'_u, f'_v (et des dérivées u' et v'). On commettrait une erreur grave en renversant l'ordre des termes, je veux dire en prétendant déduire le théorème des fonctions composées de l'existence du plan tangent : on négligerait en effet de tenir compte des conditions dans lesquelles le théorème des fonctions composées est applicable ; dans la démonstration de ce théorème, la figure peut servir uniquement à illustrer l'exposé des faits analytiques.

MOUVEMENT D'UNE FIGURE PLANE SEMBLABLE A UNE FIGURE DONNÉE

SURFACES DES TRAJECTOIRES

par M. **L. Bickart.**

Soient A_1, A_2 deux points de la figure, dont nous supposerons que les trajectoires soient des courbes fermées données. Soit A un troisième point de la figure. Suivant des notations déjà employées, on peut écrire



$$(1) \qquad \left| \begin{array}{l} u = hu_2 + (1-h)u_1, \\ v = kv_2 + (1-k)v_1, \end{array} \right.$$

$$h = \frac{A_1A}{A_1A_2} e^{i\widehat{A_2A_1A}}, \qquad k = \frac{A_1A}{A_1A_2} e^{-i\widehat{A_2A_1A}}, \qquad u = x + iy, \qquad v = x - iy,$$

l'origine étant un point quelconque O.

L'élément d'aire dS balayée par le vecteur OA est donné par

$$4idS = vdu - udv,$$

d'où, en posant

$$(2) \qquad \left| \begin{array}{l} v_1du_1 - u_1dv_1 = 4idS_1, \\ v_2du_2 - u_2dv_2 = 4idS_2, \\ v_1du_2 - u_2dv_1 = 4idP, \\ v_2du_1 - u_1dv_2 = 4idQ, \end{array} \right.$$

$$(3) \qquad dS = (1-h)(1-k)dS_1 + hkdS_2 + h(1-k)dP + k(1-h)dQ,$$

u, v, u_1, v_1, u_2, v_2 sont fonctions d'une même variable t. Nous supposons que la figure, partant d'une position F_0 pour $t = t_0$, se retrouve à la même position pour $t = t_1 = t_0 + c^{te}$ après avoir passé par toutes les positions qu'elle peut occuper pour les valeurs de t comprises dans l'intervalle t_0t_1. Nous pouvons supposer par exemple que t soit un angle, $t_0 = 0$ et $t_1 = 2\pi$.

Intégrons l'équation (3) de t_0 à t_1. Il vient

$$(4) \qquad S = (1-h)(1-k)S_1 + hkS_2 + k(1-h)Q + h(1-k)P,$$

ou

$$(S_1 + S_2 - P - Q)hk - (S_1 - P)h - (S_1 - Q)k + S_1 - S = 0 ;$$

posons (5)

$$\frac{S_1 - Q}{S_1 + S_2 - P - Q} = h_0, \qquad \frac{S_1 - P}{S_1 + S_2 - P - Q} = k_0,$$

l'équation (4) devient

$$(6) \qquad (h-h_0)(k-k_0) = h_0k_0 + (h_0+k_0-1)\frac{S-S_1}{S_1-S_2},$$

h_0 et k_0 sont parfaitement déterminés. Donc si on se donne S l'équation (6) exprime que le point h,k décrit dans la figure mobile un cercle de centre h_0, k_0. Donc : *Les points qui décrivent une courbe d'aire donnée sont sur un cercle, dont le centre reste fixe quelle que soit cette aire.*

Corollaire. — Si 3 points d'un cercle décrivent 3 aires égales à S, tout point du même cercle décrira une aire égale à S.

Avant d'aller plus loin, remarquons que les calculs précédents n'ont plus de sens si

$$P+Q-S_1-S_2 = 0;$$

dans ce cas

$$dP + dQ = dS_1 + dS_2,$$

équation d'où l'on déduit, d'après les formules (2),

$$\frac{d(u_2-u_1)}{u_2-u_1} = \frac{d(v_2-v_1)}{v_2-v_1}, \qquad \text{ou} \qquad (u_2-u_1) = C(v_2-v_1)$$

relation qui exprime que la droite A_1A_2 reste parallèle à une droite fixe. Tous les points de la figure décrivent alors des droites concourantes ou parallèles, cas sans intérêt.

Supposons donc $P+Q-S_1-S_2 \neq 0$. Nous allons donner à l'équation (6) une forme très simple.

Posons

$$(h-h_0)(k-k_0) = \rho^2;$$

l'équation (6) devient

$$\rho^2 = h_0k_0 + (h_0+k_0-1)\frac{S-S_1}{S_1-S_2}.$$

Appelons σ l'aire décrite par le centre h_0, k_0 du cercle

$$0 = h_0k_0 + (h_0+k_0-1)\frac{\sigma-S_1}{S_1-S_2},$$

d'où

$$\rho^2 = \frac{h_0+k_0-1}{S_1-S_2}(S-\sigma),$$

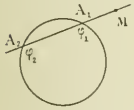
d'où enfin (7)

$$\frac{S-\sigma}{\rho^2} = c^{te}.$$

Telle est la formule que nous voulions établir.

Exemple. — *Epicycloïdes et hypocycloïdes.*

Sur un cercle de rayon 1 considérons deux points d'arguments φ_1, φ_2. On sait que la droite A_1A_2 enveloppe une épi — ou hypocycloïde s'il existe entre φ_1 et φ_2 une relation linéaire qu'on peut toujours mettre sous la forme $A\varphi_1 = B\varphi_2$.



Si la courbe est algébrique, A et B sont des nombres entiers.

En appelant m un nombre entier, on peut donc poser

$$\left|\begin{array}{l} u_1 = e^{i\varphi}, \\ v_1 = e^{-i\varphi}; \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} u_2 = e^{mi\varphi}, \\ v_2 = e^{-mi\varphi}. \end{array}\right.$$

Il est aisé de vérifier que la droite A_1A_2 touche son enveloppe au point

$$\left|\begin{array}{l} u_M = \dfrac{e^{i\varphi_2}d\varphi_1 + e^{i\varphi_1}d\varphi_2}{d\varphi_1+d\varphi_2} = \dfrac{e^{mi\varphi}+me^{i\varphi}}{1+m}, \\[2ex] v_M = \dfrac{e^{-i\varphi_2}d\varphi_1 + e^{-i\varphi_1}d\varphi_2}{d\varphi_1+d\varphi_2} = \dfrac{e^{-mi\varphi}+me^{-i\varphi}}{1+m}. \end{array}\right.$$

Si l'on pose

$$u = hu_2 + (1-h)u_1,$$
$$v = kv_2 + (1-k)v_1,$$

il vient, suivant l'équation (3),

$$4\frac{dS}{d\varphi} = 2(m+1)hk - 2(h+k) + (m+1)[h(1-k)e^{(m-1)i\varphi} + k(1-h)e^{(1-m)i\varphi}].$$

Intégrons de 0 à 2π par rapport à φ en remarquant que, si m est entier et différent de 1,

$$\int_0^{2\pi} e^{(m-1)i\varphi}d\varphi = \int_0^{2\pi} e^{(1-m)i\varphi}d\varphi = 0.$$

Il vient
$$S = (m+1)\pi\left(hk - \frac{h+k}{1+m} + \frac{1}{1+m}\right),$$

d'où
$$h_0 = k_0 = \frac{1}{m+1}.$$

Le centre du cercle dont il est question plus haut a donc pour coordonnées

$$\left|\begin{array}{l} u_0 = h_0u_2 + (1-h_0)u_1 = \dfrac{e^{mi\varphi} + me^{i\varphi}}{1+m} = u_M, \\ v_0 = k_0v_2 + (1-k_0)v_1 = \dfrac{e^{-mi\varphi} + me^{-i\varphi}}{1+m} = v_M\,; \end{array}\right.$$

c'est-à-dire précisément le point de contact de A_1A_2 avec son enveloppe. On peut déduire de là la surface de l'épicycloïde.

On sait que
$$\frac{MA_1}{MA_2} = -\frac{d\varphi_1}{d\varphi_2} = \frac{-1}{m}.$$

Dans l'équation (7) écrite sous la forme

$$\frac{S_2 - \sigma}{\rho_2^2} = \frac{S_1 - \sigma}{\rho_1^2},$$

on peut donc remplacer ρ_1 et ρ_2 respectivement par 1 et m, d'où

$$\sigma = \frac{m^2S_1 - S_2}{m^2 - 1}.$$

Mais lorsque A_1 décrit une fois la circonférence, A_2 la décrit m fois puisque $\varphi_2 = m\varphi_1$. Donc

$$S_2 = mS_1 = m\pi R^2,$$

d'où
$$\sigma = \frac{m^2 - m}{m^2 - 1}S_1 = \frac{m}{m+1}\pi R^2.$$

ANALYSE

1435. — *Intégrer l'équation différentielle*

$$x(x-a)\frac{dy}{dx} + b^2 - (x+a)y = 0.$$

Montrer que les courbes intégrales sont des hyperboles, admettant une asymptote fixe, et une autre passant par un point fixe. Enveloppe de leurs axes.

L'équation proposée est linéaire par rapport à y et $\frac{dy}{dx}$; pour l'intégrer, nous poserons $y = uv$, u et v désignant deux fonctions de x, dont l'une pourra être choisie arbitrairement.

Nous en tirons $\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$, et en remplaçant y et $\frac{dy}{dx}$ par ces valeurs dans l'équation différentielle donnée, celle-ci devient

$$x(x-a)\left[u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\right] - (x+a)uv + b^2 = 0,$$

ou, en mettant u en facteur,

$$(1) \qquad u\left[x(x-a)\frac{dv}{dx}-(x+a)v\right]+x(x-a)v\frac{du}{dx}+b^2=0.$$

Déterminons v de manière que le coefficient de u soit nul ; nous avons

$$x(x-a)\frac{dv}{dx}-(x+a)v=0$$

ou

$$\frac{dv}{v}=\frac{x+a}{x(x-a)}dx,$$

ou, encore, en décomposant le second membre en éléments simples,

$$\frac{dv}{v}=\frac{2dx}{x-a}-\frac{dx}{x}.$$

Il est alors facile d'intégrer ; nous obtenons

$$\mathrm{L}v=\mathrm{L}(x-a)^2-\mathrm{L}x$$

ou

$$v=\frac{(x-a)^2}{x}.$$

Il est inutile d'introduire une constante arbitraire, car nous pouvons particulariser la fonction v.

Remplaçons v par cette valeur dans l'équation (1), le coefficient de u est nul, et il reste

$$(x-a)^3\frac{du}{dx}+b^2=0$$

ou

$$du=-\frac{b^2dx}{(x-a)^3}=-b^2(x-a)^{-3}dx.$$

Nous en tirons, en intégrant,

$$u=-b^2\frac{(x-a)^{-2}}{-2}+\mathrm{C}=\frac{b^2}{2(x-a)^2}+\mathrm{C},$$

C désignant une constante arbitraire, et par suite

$$y=uv=\left[\frac{b^2}{2(x-a)^2}+\mathrm{C}\right]\frac{(x-a)^2}{x},$$

ou enfin

$$y=\frac{b^2+2\mathrm{C}(x-a)^2}{2x}.$$

Telle est l'intégrale générale de l'équation proposée.

Cette relation peut s'écrire

$$2x[y-\mathrm{C}x+2\mathrm{C}a]=b^2+2\mathrm{C}a^2,$$

et sous cette forme, on reconnait qu'elle représente une hyperbole ayant pour asymptotes les deux droites $x=0$, $y-\mathrm{C}x+2\mathrm{C}a=0$.

La première est fixe, la deuxième passe par le point fixe $x=2a$, $y=0$.

Comme les axes sont les bissectrices des asymptotes, l'équation de l'ensemble des axes est

$$x=\frac{y-\mathrm{C}x+2\mathrm{C}a}{\pm\sqrt{1+\mathrm{C}^2}}$$

ou, en élevant au carré et en ordonnant par rapport à C,

$$4\mathrm{C}^2a(x-a)+2\mathrm{C}y(x-2a)+x^2-y^2=0.$$

Exprimons que cette équation du deuxième degré par rapport à C a une racine double ; nous avons

$$y^2(x-2a)^2-4a(x-a)[x^2-y^2]=0,$$

ou

$$x^2[y^2-4a(x-a)]=0.$$

C'est l'équation de l'enveloppe des axes. Elle se décompose en deux, $x^2=0$, $y^2-4a(x-a)=0$.

La première représente une enveloppe singulière, qui est le lieu des points doubles de l'ensemble des axes, ou le lieu des centres des hyperboles.

La véritable enveloppe est la parabole définie par l'équation $y^2 - 4a(x - a) = 0$. Son foyer est le point $(2a, 0)$ et la directrice est l'axe des y.

M. GRANGIER, à Mouleydier.

Bonnes solutions par MM. Amblard, conducteur des ponts et chaussées, à Ruines (Cantal); Henri Cuir, à Boulogne-sur-Mer : Darmon, lycée d'Alger; Dessimond, lycée d'Alger; J.-D. Dufaut, à Poitiers; Dulimbert, à Grenoble; G. Foucry, à Roanne; Janois, à Nantes : M. Laurence; R. Manen, à Albi; G. Pélissier, à Toulouse; Quémeneur, lycée de Rouen; Jules Yernaux, écoles des mines, à Mons.

GÉOMÉTRIE

1445. — *On considère une ellipse* E *située dans l'espace et dont la projection sur un plan* P *soit un cercle. On prend sur elle un point fixe* A *et un point mobile* M.

1° *La trace sur le plan* P *du plan perpendiculaire à* AM *en son milieu enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements* H. *Trouver géométriquement ses rebroussements.*

2° *Si le point* A *varie sur l'ellipse* E, *l'hypocycloïde* H *reste de grandeur constante et reste tangente à deux droites fixes* P *et* Q; *la droite qui joint les points de contact des droites* P *et* Q *enveloppe une hypocycloïde à quatre rebroussements.*

3° *A deux points* A *et* A′ *de l'ellipse* E *correspondent deux hypocycloïdes* H *et* H′ *qui ont, en dehors des droites* P *et* Q, *une troisième tangente commune* R *qui est en même temps une corde commune.*

4° *Le problème précédent peut être ainsi généralisé : soit une biquadratique admettant un plan* P *pour plan de symétrie et se projetant sur lui suivant un cercle. Le lieu des centres des sphères qui, passant par les extrémités d'une corde* D *de la courbe perpendiculaire au plan* P, *sont doublement tangentes à cette courbe est une hypocycloïde à trois rebroussements* H; *si la corde* D *se déplace, la courbe* H *reste de grandeur constante; enfin, les traces sur le plan* P *des plans normaux à la biquadratique enveloppent une hypocycloïde à quatre rebroussements.*

Cette question a été tirée d'un article de Laguerre, publié dans le *Bulletin de la Société mathématique* (1879) et reproduit dans l'édition de ses œuvres (Tome II).

Nous nous appuierons sur le théorème suivant :

Toute courbe de troisième classe dont l'équation tangentielle est de la forme

$$au^3 + 3bu^2v + 3cuv^2 + dv^3 = w(u^2 + v^2), \tag{1}$$

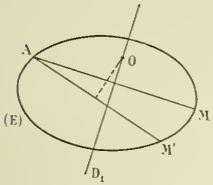
c'est-à-dire qui admet la droite de l'infini pour tangente double, les points circulaires étant les points de contact, est une hypocycloïde à trois rebroussements.

L'hypocycloïde à trois rebroussements est ainsi définie : c'est le lieu d'un point fixe d'un cercle qui roule sans glisser à l'intérieur d'un cercle de rayon triple.

Partant de cette définition, on trouve facilement les coordonnées d'un point de la courbe en fonction d'un paramètre et aussi l'équation tangentielle, sous forme canonique. Et on peut ainsi montrer que, par un changement de coordonnées, la forme (1) se ramène à cette forme canonique. Mais on peut donner du théorème énoncé plus haut une démonstration moins précise et plus rapide :

Il est aisé de vérifier que les hypocycloïdes à trois rebroussements dépendent, dans un plan, de quatre paramètres, un de grandeur et trois de position. De plus, on démontre facilement qu'une hypocycloïde à trois rebroussements est de troisième classe, bitangente à la droite de l'infini aux points circulaires. Donc l'équation (1) est bien l'équation générale des hypocycloïdes à trois rebroussements. Cela étant, abordons le problème proposé.

1° Soit l'ellipse E, située dans un plan Q, projetée sur le plan P suivant un cercle. Sur cette ellipse, prenons un point A fixe, un point M variable. Le plan perpendiculaire à AM en son milieu



coupe le plan Q suivant une droite D_1 et le plan P suivant une droite D qui est la projection oblique de D_1, la direction des projetantes étant normale au plan Q.

Le point de contact de D_1 avec son enveloppe s'obtient en menant AM' infiniment voisine de AM. On voit ainsi que c'est la limite du centre O du cercle circonscrit au triangle AMM', c'est-à-dire le centre du cercle passant par A et tangent en M à l'ellipse E.

Il en résulte donc que : *L'enveloppe de la droite* D *dans le plan* P *est le lieu des centres des sphères passant par* A, *tangentes à l'ellipse* E *et ayant leurs centres dans le plan* P.

Cette courbe enveloppe, C, est de troisième classe. En effet, soit un point quelconque F du plan P. Cherchons combien de droites D passent par ce point F. Pour cela, considérons la sphère de centre F et passant par A. Elle coupe de nouveau l'ellipse E aux points B_1, B_2, B_3. Il y a donc trois droites D passant par F et elles sont obtenues par les trois cordes AB_1, AB_2, AB_3 de l'ellipse E.

La courbe C n'a qu'une seule tangente parallèle à une direction donnée parce que l'enveloppe de D_1 dans le plan Q n'a évidemment qu'une seule tangente parallèle à une direction donnée.

La courbe C est donc bitangente à la droite de l'infini. Cherchons les points de contact. Un point de la courbe C est le centre d'une sphère passant par A et tangente à l'ellipse E. Il ne peut s'éloigner indéfiniment que si la sphère se réduit à un plan perpendiculaire au plan P, passant par A et par les points à l'infini de l'ellipse E. Comme la projection de (E) sur le plan P est un cercle, le centre de la sphère ne peut s'éloigner indéfiniment que dans les directions isotropes du plan P.

La courbe C est donc une hypocycloïde à trois rebroussements.

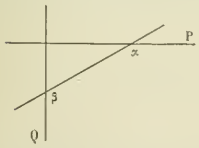
Cherchons ses trois rebroussements. Un tel point est caractérisé par cette propriété que les trois tangentes issues de ce point sont confondues. Le raisonnement fait plus haut pour montrer que la courbe C est de troisième classe montre que l'on est ramené à chercher les cercles osculateurs de l'ellipse E dont le quatrième point d'intersection avec cette courbe est le point A. On sait qu'il y en a trois ; c'est une conséquence immédiate de ce qu'entre les anomalies excentriques $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ de 4 points d'une ellipse situés sur un cercle, il y a la relation $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 2k\pi$.

La propriété que les trois tangentes de rebroussement à la courbe C sont concourantes correspond à ce théorème de Steiner, que la méthode précédente démontre :

Etant donné sur une ellipse E *un point quelconque* A, *les trois cercles osculateurs passant par* A *ont pour points de contact trois points situés sur un cercle passant par* A.

Pour terminer, faisons la remarque que l'hypocycloïde C est tangente à la trace sur le plan P du plan normal en A à l'ellipse E, cette tangente provenant du point M de l'ellipse confondu avec le point A.

2° et 3° Parmi les tangentes à la courbe C, il faut en signaler deux, P et Q, qui sont rectangulaires et indépendantes du point A. Ce sont les traces sur le plan P des plans passant par les axes de l'ellipse E et perpendiculaires à son plan Q. Elles correspondent à des sphères qui seront bitangentes à l'ellipse E, l'un des points de contact étant le point A. Les points de contact α et β des droites P et Q avec la courbe C sont donc dans le plan normal en A à l'ellipse E.



La droite $\alpha\beta$ nous apparait donc à la fois comme tangente à l'hypocycloïde et comme joignant les points de contact des deux tangentes rectangulaires P et Q.

Deux hypocycloïdes C et C' correspondant aux deux points A et A' de l'ellipse E ayant six tangentes communes rejetées à l'infini en ont une troisième à distance finie en dehors des deux premières P et Q. C'est évidemment la trace R du plan perpendiculaire à AA' en son milieu. Le point de contact de R avec l'hypocycloïde C est dans le plan normal en A' à l'ellipse E.

Je dis que la tangente commune R est en même temps une corde commune. Je dois pour cela prouver qu'il existe deux cercles tangents à l'ellipse E et passant par deux de ses points A et A′ et cette propriété est une conséquence de la relation déjà appliquée plus haut qui existe entre les anomalies excentriques de 4 points d'une ellipse situés sur un cercle.

Il reste maintenant à démontrer :

1° Que les deux hypocycloïdes à trois rebroussements C et C′ sont égales ;

2° Que la droite $\alpha\beta$ définie plus haut qui joint les points de contact des deux tangentes rectangulaires P et Q enveloppe une hypocycloïde à quatre rebroussements. (Il est déjà en évidence qu'elle enveloppe la projection oblique de la développée de l'ellipse E et il serait facile, partant de là, d'achever la démonstration.)

La première de ces deux propositions résulte de ce que les deux hypocycloïdes ont une tangente commune qui est en même temps une corde commune ; la seconde, de ce que $\alpha\beta$ a une longueur constante, et ces deux propositions se rattachent de suite l'une et l'autre à la propriété suivante de l'hypocycloïde à trois rebroussements, que je me borne à énoncer et qu'on déduit facilement de la définition de la courbe donnée au début :

Soient U *et* V *les points d'intersection avec la courbe, autres que le point de contact, d'une tangente variable à une hypocycloïde à trois rebroussements. La longueur* UV *est constante et les tangentes en* U *et* V *sont rectangulaires.*

4° Pour étendre les propriétés précédentes au cas où, au lieu de l'ellipse E, on aurait une biquadratique projetée sur le plan P suivant un cercle, il suffit de n'utiliser dans la solution précédente que la propriété de la courbe C d'être le lieu des points du plan P qui sont centres de sphères passant par A et tangentes à l'ellipse E.

M. Quémeneur, élève du lycée de Rouen, a envoyé une solution détaillée de cette question.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1434. — *On donne une cubique circulaire à point double et l'on envisage toutes les hyperboles* (H) *ayant une asymptote parallèle à celle de la cubique et une autre perpendiculaire et passant par le point double* O. *On demande :*

1° *Le lieu des centres des hyperboles* (H) *tangentes à la cubique ;*

2° *Le lieu des centres de celles de ces hyperboles qui coupent la cubique en deux points vus de* O *sous un angle droit.*

3° *Ce dernier lieu est un cercle dont on demande l'enveloppe et le lieu du centre quand les tangentes à la cubique au point double varient en faisant entre elles un angle constant.*

Nous ferons tout d'abord observer que l'énoncé manque de clarté et que l'on a oublié d'y mettre que l'asymptote de la cubique est fixe.

Si nous ajoutons cette hypothèse aux autres, que nous prenions pour origine le point double et que nous désignions par $x - a = 0$ l'équation de l'asymptote, nous pourrons écrire l'équation de la cubique ainsi

$$x(x^2 + y^2) + Ax^2 + 2Bxy - ay^2 = 0,$$

A et B étant deux paramètres, fixes d'abord, mais qui varieront dans la dernière partie.

Cela posé, soit

$$xy - \alpha y - \beta x = 0$$

l'équation de l'hyperbole (H) ; nous aurons l'équation des rayons joignant l'origine aux points de rencontre des deux lignes en éliminant la variable d'homogénéité entre les deux équations, ce qui nous

donnera, $x = 0$ d'abord, qui correspond au point à l'infini, puis

$$(x^2 + y^2)(\alpha y + \beta x) + Ax^2y + 2Bxy^2 - ay^3 = 0,$$

qui fournit les coefficients angulaires des trois autres rayons :

$$(1 + m^2)(\alpha m + \beta) + Am + 2Bm^2 - am^3 = 0,$$

ou

$$(\alpha - a)m^3 + (2B + \beta)m^2 + (A + \alpha)m + \beta = 0.$$

1° Pour traiter la première partie, il faut écrire que cette équation en m a une racine double, c'est-à-dire annuler son discriminant. Ceci nous donne une équation du quatrième degré en α et β ; par conséquent le lieu du point (α, β) est une quartique. C'est une quartique unicursale, car les deux dérivées, par rapport à m et par rapport à la variable d'homogénéité, sont linéaires en α et β et les expressions de α et de β sont rationnelles en m :

$$\alpha = \frac{am^4 + (3a + A)m^2 - 4Bm - A}{(1 + m^2)^2}, \qquad \beta = \frac{2m^2[-Bm^2 - (a + A)m + B]}{(1 + m^2)^2}.$$

Mais nous apercevrons mieux la nature de cette courbe en regardant α et β comme des coordonnées courantes dans l'équation en m et remarquant que le fait d'exprimer que l'équation en m à une racine double revient à trouver l'enveloppe de la droite ainsi définie. Nous voyons alors que cette enveloppe est une courbe de troisième classe doublement tangente à la droite de l'infini, car la droite mobile va deux fois à l'infini, une fois pour $m = i$ et une autre fois pour $m = -i$. D'ailleurs pour $m = i$, les coordonnées homogènes du point de contact de la droite avec son enveloppe sont

$$-2(a + A) - 4Bi, \qquad 2(a + A)i - 4B, \qquad 0;$$

c'est l'un des points cycliques. La courbe est donc doublement tangente à la droite de l'infini aux points cycliques ; c'est une hypocycloïde à trois rebroussements.

Pour $m = 0$, la droite mobile se réduit à l'axe des x ; son point de contact a pour coordonnées $-A$ et 0. C'est le point de rencontre de Ox avec la cubique, autre que le point O.

Pour $m = \infty$, la droite mobile se réduit à l'asymptote $\alpha - a = 0$; elle touche son enveloppe au point $(a, -2B)$, et le pied A de cette asymptote sur Ox est un point du cercle tritangent à l'hypocycloïde.

Nous aurons les points de rebroussement en exprimant que l'équation en m a une racine triple, c'est-à-dire que les trois dérivées secondes ont une même racine commune ; ceci nous donne les trois équations

$$3m(\alpha - a) + 2B + \beta = 0,$$
$$m(2B + \beta) + A + \alpha = 0,$$
$$m(A + \alpha) + 3\beta = 0.$$

En éliminant m entre ces équations prises deux à deux, on obtient les deux équations

$$\frac{2B + \beta}{3(\alpha - a)} = \frac{A + \alpha}{2B + \beta} = \frac{3\beta}{A + \alpha}.$$

En égalant les deux rapports extrêmes à celui du milieu, nous obtenons les deux coniques

$$(A + \alpha)^2 - 3\beta(2B + \beta) = 0, \qquad 3(A + \alpha)(\alpha - a) - (2B + \beta)^2 = 0,$$

qui se coupent d'abord au point $\alpha = -A$, $\beta = -2B$, qui est à rejeter, puisque pour ces valeurs de α et β le second rapport est indéterminé, et en trois autres points, qui sont les points de rebroussement cherchés. Nous aurons le cercle qui passe en ces trois points en retranchant la première équation de la seconde ; ceci nous donne

$$\alpha^2 + \beta^2 + \frac{\alpha}{2}(A - 3a) + B\beta - \frac{A}{2}(A + 3a) - 2B^2 = 0.$$

Le centre de ce cercle, qu'on appelle aussi parfois le centre de l'hypocycloïde, est le point

$$\alpha = \frac{3a - A}{4}, \qquad \beta = -\frac{B}{2}.$$

Les tangentes issues de ce point ont pour coefficients angulaires les trois nombres fournis par

l'équation

$$(a + A)m^3 - 6Bm^2 - 3(A + a)m + 2B = 0;$$

ce sont les coefficients angulaires des tangentes de rebroussement.

Nous pouvons d'ailleurs les obtenir encore en éliminant α et β entre les équations fournies par les dérivées secondes, et nous avons ainsi

$$\begin{vmatrix} 3m & 1 & 2B - 3am \\ 1 & m & A + 2Bm \\ m & 3 & Am \end{vmatrix} = 0,$$

équation qui, développée, coïncide avec la précédente.

Nous connaissons maintenant suffisamment d'éléments de l'hypocycloïde pour placer cette courbe.

2° Le second lieu s'obtient en exprimant que deux racines de l'équation aux coefficients angulaires vérifient la relation $m'm'' = -1$ et que, par suite, l'une des racines m, est le nombre $\frac{\beta}{\alpha + a}$. Ce calcul très simple nous donne, après suppression du facteur étranger $\beta = 0$,

$$2(\alpha^2 + \beta^2) + \alpha(A - 3a) + 2B\beta - a(A - a) = 0.$$

C'est l'équation d'un cercle, du cercle tritangent à l'hypocycloïde, et nous vérifions de suite qu'il a le même centre que le précédent. Il serait facile de vérifier en outre que son rayon est trois fois moindre que celui du précédent. Ce cercle passe au point A, $\alpha = a$, $\beta = 0$, que nous avons déjà signalé, et qui restera fixe dans la troisième partie.

3° Si nous appelons V l'angle des tangentes en O à la cubique, nous aurons entre A et B la relation

$$4(B^2 + aA) = \operatorname{tg}^2 V(A - a)^2, \qquad \text{ou} \qquad B^2 + aA = k^2(A - a)^2,$$

k désignant la constante $\frac{\operatorname{tg} V}{2}$.

D'autre part, les coordonnées du centre du cercle sont fournies par les équations

$$4x = 3a - A, \qquad 2y = -B;$$

donc le lieu de ce centre est immédiat : c'est la conique

$$4y^2 + a(3a - 4x) = k^2(2a - 4x)^2.$$

Cette conique est une hyperbole ayant ses axes parallèles aux axes de coordonnées et ses asymptotes inclinées de l'angle V sur Ox ; elle est en outre bitangente à la parabole

$$4y^2 + a(3a - 4x) = 0,$$

aux deux points de rencontre de cette parabole avec la droite $x - \frac{a}{2} = 0$. Cette parabole a pour foyer le point $(a, 0)$ et pour directrice justement la droite des contacts. Donc l'hyperbole a le même foyer et la même directrice.

La podaire du lieu des centres par rapport au point A $(a, 0)$ est donc un cercle. En outre, l'enveloppe du cercle mobile, qui est la courbe homothétique de cette podaire par rapport au point A et dans le rapport 2, est aussi un cercle ; c'est le cercle directeur de l'hyperbole ayant pour centre le second foyer.

J. HAAG, élève à l'Ecole normale supérieure.

Remarque. — De nombreuses questions relatives à l'hypocycloïde à trois rebroussements ont paru autrefois dans la Revue et permettraient non seulement d'éclairer encore la question précédente, mais aussi d'en donner une solution géométrique. M. Haag en a envoyé une basée sur ces propriétés auxquelles je fais allusion et que je ne publie pas uniquement dans le but d'abréger.

Solutions satisfaisantes : MM. G. Pélissier, à Toulon ; G. Fouchy, à Roanne ; J. D. Dufaut, à Poitiers.

MÉCANIQUE

1409. — *Un point mobile parcourt la parabole* $y^2 - 2px = 0$ *de façon que son accélération projetée sur* Oy *soit proportionnelle à la composante de la vitesse suivant* Ox, $\gamma_y = k^2 v_x$; *à l'époque* 0 *le mobile est au sommet de la parabole et possède une vitesse* v_0 *dirigée dans le sens* Oy.

1° *Déterminer les composantes de la vitesse et de l'accélération en fonction de l'ordonnée du mobile.*

2° *Trouver l'hodographe du mouvement et trouver la forme de la courbe décrite par l'extrémité du vecteur vitesse.*

3° *Trouver les équations du mouvement. En déduire les limites d'excursion du mobile quand* t *varie; en déduire aussi les arcs des courbes du* 2° *qui correspondent à des positions effectives du mobile.*

1. Entre les coordonnées (x, y) du mobile on a les relations

$$y^2 - 2px = 0, \tag{1}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = k^2 \frac{dx}{dt}. \tag{2}$$

De la première on déduit $y\dfrac{dy}{dt} - p\dfrac{dx}{dt} = 0$, ou

$$\frac{dx}{dt} = \frac{y}{p}\frac{dy}{dt},$$

et, en remplaçant $\dfrac{dx}{dt}$ par cette valeur dans la relation (2), on a

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{k^2}{p} y \frac{dy}{dt}.$$

Intégrons ; nous obtenons

$$\frac{dy}{dt} = \frac{k^2}{2p} y^2 + v_0,$$

puis

$$\frac{dx}{dt} = \frac{y}{p}\frac{dy}{dt} = \frac{y}{p}\left(\frac{k^2}{2p} y^2 + v_0\right).$$

Les composantes de la vitesse sont donc

$$\frac{dx}{dt} = \frac{y}{p}\left(\frac{k^2}{2p} y^2 + v_0\right), \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{k^2}{2p} y^2 + v_0.$$

Pour avoir les composantes de l'accélération, il suffit de différentier ces deux relations par rapport à t, ce qui nous donne

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{p}\left(\frac{3k^2}{2p} y^2 + v_0\right)\frac{dy}{dt} = \frac{1}{p}\left(\frac{3k^2}{2p} y^2 + v_0\right)\left(\frac{k^2}{2p} y^2 + v_0\right)$$

et

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{k^2}{p} y \frac{dy}{dt} = \frac{k^2}{p} y \left(\frac{k^2}{2p} y^2 + v_0\right).$$

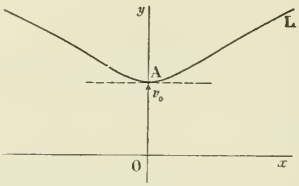
2. Les coordonnées d'un point de l'hodographe sont

$$\alpha = \frac{y}{p}\left(\frac{k^2}{2p} y^2 + v_0\right), \qquad \beta = \frac{k^2}{2p} y^2 + v_0;$$

nous aurons l'équation de l'hodographe en éliminant y entre ces deux équations. Divisons-les membre à membre ; nous obtenons $y = \dfrac{p\alpha}{\beta}$, puis, en remplaçant y par cette valeur dans la deuxième relation, nous avons

$$2\beta^3 - k^2 p \alpha^2 - 2v_0\beta^2 = 0.$$

Cette équation représente une courbe du troisième degré symétrique par rapport à Oy, et que l'on



construit aisément en résolvant l'équation par rapport à α :

$$\alpha = \pm \beta \sqrt{\frac{2(\beta - v_0)}{k^2 p}}.$$

Pour que α soit réel, il faut que β soit supérieur à v_0, et quand β croît de v_0 à $+\infty$, la valeur positive de α croît de 0 à $+\infty$.

La tangente au point A $(0, v_0)$ est parallèle à Ox, et la branche infinie est parabolique dans la direction Ox.

L'extrémité du vecteur vitesse a pour coordonnées

$$X = x + \frac{dx}{dt}, \qquad Y = y + \frac{dy}{dt},$$

ou, en remplaçant x, $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ en fonction de y,

$$X = \frac{y(k^2y^2 + py + 2pv_0)}{2p^2},$$

$$Y = \frac{k^2y^2 + 2py + 2pv_0}{2p};$$

nous avons ainsi les coordonnées d'un point du lieu en fonction entière du paramètre y. Le lieu est une courbe unicursale du troisième degré.

Pour le construire, nous ferons varier y de $-\infty$ à $+\infty$ et nous étudierons les variations de X et de Y.

On a

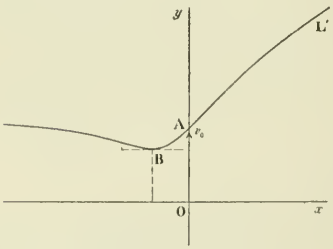
$$\frac{dX}{dy} = \frac{3k^2y^2 + 2py + 2pv_0}{2p^2},$$

$$\frac{dY}{dy} = \frac{k^2y + p}{p}.$$

La dérivée de Y s'annule pour $y = -\frac{p}{k^2}$; quant à celle de X, elle s'annule pour deux valeurs de y si $v_0 < \frac{p}{6k^2}$ et ne s'annule pas si $v_0 > \frac{p}{6k^2}$.

Premier Cas. — $v_0 > \frac{p}{6k^2}$.

Les variations de X et de Y sont indiquées par le tableau suivant :



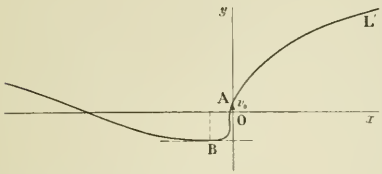
y	$-\infty$	croît	$-\frac{p}{k^2}$	croît	$+\infty$
X	$-\infty$	croît	$-\frac{v_0}{k^2}$	croît	$+\infty$
Y	$+\infty$	décroît	$v_0 - \frac{p}{2k^2}$	croît	$+\infty$

La courbe rencontre l'axe des y au point A, extrémité de la vitesse à l'origine.

Il peut se faire que l'ordonnée du point B soit négative.

Deuxième Cas. — $v_0 < \frac{p}{6k^2}$.

$\frac{dX}{dy}$ s'annule pour deux valeurs négatives de y, y' et y'', supérieures à $-\frac{p}{k^2}$.



y	$-\infty$	croît	$-\frac{p}{k^2}$	croît	y'	croît	y''	croît $+\infty$
X	$-\infty$	croît	$-\frac{v_0}{k^2}$	croît	*max.*	déc.	*min.*	croît $+\infty$
Y	$+\infty$	déc.	$v_0-\frac{p}{2k^2}$		croît			$+\infty$

Dans les deux cas, la courbe a des branches paraboliques dans la direction Ox.

Remarquons enfin que si $v_0 = \frac{p}{6k^2}$, la courbe admet un point d'inflexion à tangente parallèle à Oy.

3 Pour avoir les équations du mouvement, nous partirons de l'équation

$$\frac{dy}{dt} = \frac{k^2}{2p}y^2 + v_0,$$

d'où nous tirons

$$dt = \frac{2p\,dy}{k^2y^2 + 2pv_0},$$

ou

$$dt = \frac{1}{v_0}\cdot\frac{dy}{\frac{k^2y^2}{2pv_0}+1} = \frac{1}{v_0}\sqrt{\frac{2pv_0}{k^2}}\cdot\frac{d\sqrt{\frac{k^2}{2pv_0}}\,y}{\frac{k^2y^2}{2pv_0}+1},$$

ou, en intégrant, et en remarquant que pour $t = 0$, on a $y = 0$,

$$t = \frac{1}{v_0}\sqrt{\frac{2pv_0}{k^2}}\,\text{arc tg}\, y\sqrt{\frac{k^2}{2pv_0}},$$

ou enfin

$$y = \frac{\sqrt{2pv_0}}{k}\,\text{tg}\left(k\sqrt{\frac{v_0}{2p}}\,t\right).$$

On en déduit

$$x = \frac{y^2}{2p} = \frac{v_0}{k^2}\,\text{tg}^2\left(k\sqrt{\frac{v_0}{2p}}\,t\right).$$

Lorsque t croît de 0 à $\frac{\pi}{2k\sqrt{\frac{v_0}{2p}}}$, x et y croissent de 0 à $+\infty$.

Les arcs de courbe de la deuxième partie qui correspondent à des positions effectives du mobile sont les arcs AL et AL'.

BROS, à Albi.

Bonne solution par M. Cotty, lycée de Dijon.

EXAMENS DE 1905 (*Fin*).

CERTIFICAT D'ÉTUDES SUPÉRIEURES (*Rennes, novembre 1905.*)

Mathématiques préparatoires.

Epreuve théorique.

1. — **1505**. Un point mobile est assujetti à décrire une chaînette représentée par l'équation

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

de telle façon que la projection de la vitesse sur Ox soit égale à la constante a. Calculer la projection de la vitesse sur Oy et montrer que l'accélération totale est parallèle à Oy et égale à y.

Trouver à un instant donné, en fonction de y : 1° la vitesse absolue du mobile ; 2° les composantes tangentielle et normale de l'accélération totale.

II. — Définir et calculer le rayon de courbure d'une courbe gauche.

Epreuve pratique.

I. — Calculer l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}.$$

II. — Intégrer l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = \cos x.$$

CONCOURS DE 1906.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Algèbre et Trigonométrie.

I. — **1506**. Etudier la variation de la fonction $y = \mathrm{L}\frac{x-1}{x+2}$, où L désigne un logarithme népérien.

II. — **1507**. Evaluer l'intégrale $\int_0^{\alpha} \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$, et calculer sa valeur à un centième près quand $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

III. — **1508**. L'équation $x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma = 0$ a pour racines les longueurs des côtés d'un triangle ABC. Former l'équation ayant pour racines cos A, cos B, cos C.

IV. — **1509** On donne une fonction $f(x)$. Deux autres fonctions, $\varphi(x)$ et $\mathrm{F}(x)$ sont définies par les relations suivantes, où k est un nombre constant :

$$\varphi(x) = k\int \frac{dx}{f'(x)}, \qquad \mathrm{F}(x) = f(x).\varphi(x).$$

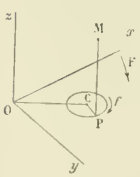
Démontrer qu'on a identiquement

$$\frac{\mathrm{F}''(x)}{\mathrm{F}(x)} = \frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} + \frac{2k}{f(x).\varphi(x)}; \qquad \frac{\mathrm{F}'''(x)}{\mathrm{F}(x)} = \frac{f'''(x)}{f(x)} + \frac{\varphi'''(x)}{\varphi(x)}.$$

(*5 juin, de 7 h. à 11 h.*)

Géométrie analytique et Mécanique.

1510. — On considère un système d'axes rectangulaires fixes Ox, Oy, Oz, et, dans le plan xOy, un cercle (C) de rayon $\frac{1-m}{2}a$ animé d'un mouvement de translation, dans lequel son centre C décrit dans le sens de la flèche F, et avec une vitesse angulaire $(1-m)\omega$, un cercle de centre O et de rayon $\frac{1+m}{2}a$.



En même temps que ce cercle (C) se déplace, un point P est mobile sur sa circonférence et la parcourt dans le sens de la flèche f, avec la vitesse angulaire $(1+m)\omega$. Il décrit ainsi une courbe (E) (Epicycloïde).

Les quantités a, ω, m sont trois constantes positives dont la dernière est moindre que l'unité.

1° On demande d'exprimer en fonction du temps, t, les coordonnées x, y du point P, sachant qu'à l'époque $t = 0$ les points C et P sont tous deux sur la partie positive de Ox, P à la distance a du point O.

2° Le point P est la projection d'un point M, mobile dans l'espace : on demande d'exprimer sa cote z en fonction du temps t, sachant qu'elle est nulle à l'époque $t = 0$, et que la vitesse v de M fait avec l'axe Oz un angle constant θ quelconque d'ailleurs.

On montrera que la trajectoire (k) du point M s'obtient en coupant le cylindre dont (E) est la section droite par un ellipsoïde de révolution autour de Oz, $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$, où la longueur b varie avec θ.

On introduira, au lieu de θ, la constante b dans la représentation de la cote z du point M.

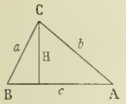
3° Calculer la grandeur et les cosinus directeurs α, β, γ de la vitesse v du point M, ainsi que l'arc de la courbe (k) parcouru par ce mobile pendant le temps t. — Exprimer, en fonction du temps, le rayon de courbure R de la courbe (k) et vérifier que la vitesse lui est proportionnelle.

4° Après avoir formé l'équation du plan osculateur de la courbe (k), on démontrera que, à une même époque t, tous ceux de ces plans qui correspondent aux diverses courbes (k) qu'on obtient en faisant varier b, passent par une même droite Δ du plan xOy.

5° Montrer que, lorsque t varie, cette droite Δ enveloppe une épicycloïde (E') homothétique à celle que décrit le point P' diamétralement opposé au point P dans le cercle (C). — Faire voir que la courbe (E') a pour développée l'épicycloïde (E).

[On conservera les notations indiquées]. *(6 juin, de 7 h. à 11 h.)*

Calcul trigonométrique.



On donne les trois côtés d'un triangle ABC :

$$a = 25\,645^{m}, \qquad b = 32\,904^{m}, \qquad c = 29\,759^{m}.$$

Calculer les trois angles, la hauteur H et la surface S.

On emploiera les formules : $r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$, $S = pr$,

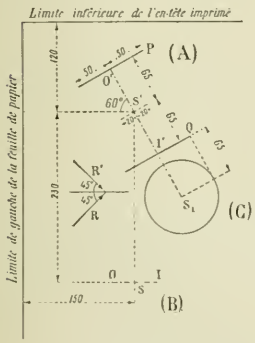
$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{r}{p-a}, \qquad \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{r}{p-b}, \qquad \operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{r}{p-c}.$$

(7 juin, de 5 h. à 6 h.)

Épure.

1511. — La droite de front, OI, O'I', inclinée à 60° (2/3 d'angle droit) sur le plan horizontal, est l'axe commun d'un hyperboloïde de révolution et de son cône asymptote.

Les surfaces sont limitées, toutes deux, par deux plans, P et Q, perpendiculaires à leur axe et distants, chacun, de 65 millimètres du plan du cercle de gorge S' (voir fig. A).



Le rayon du cercle de gorge du cercle de gorge S' (voir fig. A).

Le rayon du cercle de gorge est de 20^{mm} et ceux des parallèles P et Q de l'*hyperboloïde* sont de 50^{mm}.

Pour la mise en place dans la feuille se rapporter aux cotes inscrites, en millimètres, sur le croquis ci-contre.

On demande :

1° de représenter le solide (Sorte de Sablier) compris entre l'hyperboloïde et son cône asymptote ; ces deux surfaces étant limitées, comme il est dit plus haut, par les plans P et Q ;

2° en supposant les rayons lumineux à 45°, c'est-à-dire parallèles à la direction R, R', de chercher la séparatrice d'ombre propre de l'hyperboloïde ;

3° de déterminer l'ombre portée par le cercle supérieur de base du cône dans l'intérieur de ce dernier.

On dessinera trois projections, savoir :

en (A) la projection sur le plan vertical ordinaire ;

en (B) la projection sur le plan horizontal ordinaire ;

et en (C) la projection sur un plan perpendiculaire à l'axe.

Sur chacune d'elles la représentation sera complète.

Observations. — *a*) On pourra se contenter, pour les questions 1 et 2, de déterminer les hyperboles par leurs asymptotes et un point.

b) Pour la question 3, on déterminera, sur chacune des trois projections (A), (B) et (C), un point courant m de l'ombre portée et la tangente t en ce point, les points remarquables...

c) On emploiera : les *traits pleins noirs*, pour représenter les parties vues ; les *points ronds, noirs*, pour les parties cachées ; les *traits rouges*, pour les constructions. Les parties dans l'ombre seront couvertes de hachures.

d) On peut, pour faciliter l'intelligence de l'épure, mettre quelques lettres.

(7 juin, de 7 h. à 11 h.)

Physique.

I. — Déviation minimum dans le prisme. Conditions de l'aplanétisme.

II. — Détermination du poids d'un litre d'air à 0° et à 760^{mm}.

III. — **1512**. Un condensateur de 100 microfarads est chargé au potentiel de 2500 volts.

1° Calculer sa charge et son énergie. 2° Déterminer le poids de glace qu'on pourrait fondre (sous la pression normale), avec la chaleur que dégagerait la décharge du condensateur, en supposant dans cette décharge toute l'énergie transformée en chaleur. 3° Déterminer le volume que prendrait sous une pression de 6 atmosphères, 1 gramme d'air primitivement à cette pression et à 25°, auquel on ferait absorber la chaleur produite dans la décharge précédente. 4° Quelles seraient dans le système électrostatique C. G. S. les valeurs numériques de la charge, du potentiel, de l'énergie du condensateur ci-dessus, et le rayon d'un conducteur sphérique isolé ayant même capacité.

Données numériques : Chaleur latente de fusion de la glace, 80 ; chaleur spécifique de l'air sous pression constante, 0,237 ; équivalent mécanique de la petite calorie dans le système pratique, 4^{joules},17.

(*5 juin, de 2 h. à 5 h.*)

Chimie.

I. — Fluor et acide fluorhydrique.

II. — **1513**. On introduit dans un eudiomètre à mercure 100^{cmc} de gaz ammoniac et 100^{cmc} d'oxygène. Cet eudiomètre est ensuite placé dans une enceinte dont on peut porter la température à 136°,5. On fait alors jaillir une étincelle électrique à l'intérieur de l'eudiomètre, et l'on attend que l'équilibre de température soit rétabli. On demande le volume occupé par le gaz après l'explosion : 1° à 136°,5 ; 2° à 0°, après qu'on a laissé refroidir l'enceinte extérieure.

On admettra que le coefficient de dilatation des gaz α est égal à $\frac{1}{273}$, et que la vapeur d'eau se dilate comme un gaz parfait.

(*6 juin, de 2 h. à 4 h.*)

QUESTION PROPOSÉE

1514. — On considère l'hypocycloïde à trois rebroussements définie par les équations, en coordonnées rectangulaires,

$$x = \frac{h(1-t^2)}{(1+t^2)^2}, \qquad y = \frac{-2ht^3}{(1+t^2)^2},$$

où t est un paramètre arbitraire.

Une circonférence rencontre la courbe en six points à distance finie.

1° Démontrer que les six tangentes à l'hypocycloïde aux points d'intersection sont tangentes à une même conique qui est homofocale à une conique inscrite dans le triangle qui a pour sommets les points de rebroussement. En particulier, si trois des tangentes sont concourantes, les trois autres le sont aussi, et les deux points de concours sont foyers d'une même conique inscrite dans le triangle qui a pour sommets les points de rebroussement.

2° Démontrer que si la circonférence varie en restant concentrique à une circonférence fixe, la conique varie en restant homofocale à une conique fixe.

3° Démontrer que le centre C de la circonférence et le centre O de la conique sont en ligne droite avec le point I de concours des tangentes de rebroussement de l'hypocycloïde et que l'on a

$$\overline{IC} = 4\overline{IO}.$$

4° Démontrer de même que les six normales à l'hypocycloïde aux points d'intersection avec la circonférence sont tangentes à une même conique qui est homofocale à une conique inscrite dans le triangle qui a pour sommets les points de rebroussement.

En particulier : 1° si trois des normales sont concourantes, les trois autres le sont aussi, et les deux points de concours sont foyers d'une même conique inscrite dans le triangle qui a pour sommets les points de rebroussement ; 2° si la circonférence varie en restant concentrique à une circonférence fixe, la conique varie en restant homofocale à une conique fixe ; 3° le centre C de la circonférence et le centre O′ de la conique sont en ligne

droite avec le point I de concours des tangentes de rebroussement de l'hypocycloïde et l'on a

$$\overline{IC} = \frac{4}{3}\overline{IO'}.$$

CH. MICHEL.

DEUXIÈME PARTIE

ALGÈBRE

1448. — *Étudier les variations de l'aire du parallélogramme formé par les centres de courbure des quatre extrémités de deux diamètres conjugués.*

Soient $a\cos\varphi$, $b\sin\varphi$ les coordonnées cartésiennes d'un point M d'une ellipse rapportée à ses axes de symétrie ; le centre de courbure relatif à M est le point de contact de la normale en M et de son enveloppe. Cette normale a pour équation

$$(1) \qquad \frac{ax}{\cos\varphi} - \frac{by}{\sin\varphi} - c^2 = 0.$$

Le point où elle touche son enveloppe est défini par l'équation (1) et la dérivée par rapport à φ,

$$(2) \qquad \frac{ax\sin\varphi}{\cos^2\varphi} + \frac{by\cos\varphi}{\sin^2\varphi} = 0.$$

On a les coordonnées du centre de courbure relatif au point M en résolvant les équations (1) et (2) par rapport à x, y, ce qui donne

$$x = \frac{c^2}{a}\cos^3\varphi, \qquad y = -\frac{c^2}{b}\sin^3\varphi.$$

L'anomalie excentrique de l'extrémité M_1 du diamètre conjugué de OM est $\varphi + \frac{\pi}{2}$; donc le centre de courbure en ce point a pour coordonnées

$$x_1 = \frac{c^2}{a}\cos^3\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right), \qquad y_1 = -\frac{c^2}{b}\sin^3\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$

ou

$$x_1 = -\frac{c^2}{a}\sin^3\varphi, \qquad y_1 = -\frac{c^2}{b}\cos^3\varphi.$$

L'aire u du parallélogramme considéré est égale à quatre fois l'aire du triangle OMM_1 qui est égale, elle, à

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(xy_1 - yx_1) = -\frac{1}{2}\frac{c^4}{ab}(\sin^6\varphi + \cos^6\varphi).$$

On a donc, en valeur absolue, $u = \frac{2c^4}{ab}(\sin^6\varphi + \cos^6\varphi)$, formule dans laquelle φ peut varier dans un intervalle d'amplitude 2π, par exemple, de $-\pi$ à $+\pi$. Si on change φ en $-\varphi$, ou φ en $\pi - \varphi$ on sait que u reprend la même valeur : il nous suffira donc de faire varier φ de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

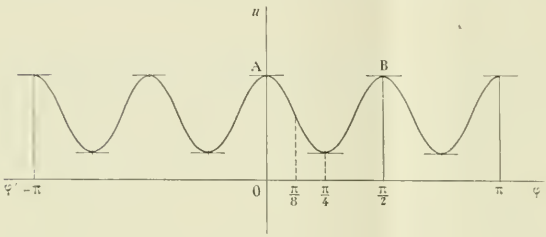
On a $$u' = \frac{12c^4}{ab}\sin\varphi\cos\varphi(\sin^4\varphi - \cos^4\varphi) = \frac{6c^4}{ab}\sin 2\varphi(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi),$$

ou
$$u' = -\frac{3c^4}{ab}\sin 4\varphi.$$

Dans l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, u' s'annule pour $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, et on a le tableau de variations suivant :

φ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
u'	0	$-$	0	$+$	0
u	$\frac{2c^4}{ab}$	décroît	$\frac{c^4}{2ab}$	croît	$\frac{2c^4}{ab}$

La courbe figurative s'en déduit immédiatement; elle s'obtient tout entière en imprimant à la portion AB, qui correspond au tableau précédent, une translation d'amplitude $\frac{\pi}{2}$ dans le sens $O\varphi$ et deux translations successives de même amplitude dans le sens $O\varphi'$.



Pour avoir les valeurs de φ correspondant aux points d'inflexion, considérons la dérivée
$$u'' = -\frac{12c^4}{ab}\cos 4\varphi.$$

Entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, cette dérivée s'annule pour $\varphi = \frac{\pi}{8}$, $\varphi = \frac{3\pi}{8}$. Cherchons la valeur correspondante de u. On a
$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \qquad \sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2};$$
donc
$$\sin^6\frac{\pi}{8} + \cos^6\frac{\pi}{8} = \frac{(2+\sqrt{2})^3 + (2-\sqrt{2})^3}{64} = \frac{5}{8}.$$

La valeur de u correspondant aux points d'inflexion est par suite $\frac{5}{4}\frac{c^4}{ab}$.

G. PÉLISSIER, à Toulouse.

Bonnes solutions : MM. G. Foucry, à Roanne ; Dessimond, à Alger ; A. Dediu, à Bucarest ; M. Grangier, à Mouleydier.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1447. — *On considère un foyer* F *d'une ellipse et deux points variables de l'ellipse,* M *et* M', *tels que* MF *et* M'F *soient parallèles à deux diamètres conjugués. Trouver l'enveloppe de la droite* MM'.

Si nous portons les axes parallèlement à eux-mêmes au foyer de droite F, de coordonnées c et 0, l'équation de l'ellipse devient
$$\frac{(x+c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad b^2x^2 + a^2y^2 + 2b^2cx - b^4 = 0.$$

Soit alors $ux + vy + w = 0$ l'équation de la droite MM′ ; le faisceau des deux rayons qui joignent l'origine aux points de rencontre de l'ellipse avec la droite s'obtient en éliminant z entre les deux équations, et l'on trouve ainsi

$$w^2(b^2x^2 + a^2y^2) - 2b^2cwx(ux + vy) - b^4(ux + vy)^2 = 0.$$

Le produit des coefficients angulaires de ces deux rayons doit être égal à $-\frac{b^2}{a^2}$; nous avons donc la relation

$$\frac{b^2w^2 - 2b^2cuw - b^4u^2}{a^2w^2 - b^4v^2} = -\frac{b^2}{a^2},$$

ou

$$a^2(w^2 - 2cuw - b^2u^2) + a^2w^2 - b^4v^2 = 0.$$

Cette équation est l'équation tangentielle de l'enveloppe de la droite MM′ ; elle représente une conique symétrique par rapport à Ox, puisqu'elle ne contient pas de termes du premier degré en v. Les tangentes parallèles à Ox s'obtiennent en faisant $u = 0$ et leurs coordonnées sont fournies par l'équation

$$2a^2w^2 - b^4v^2 = 0,$$

qui donne $v = a\sqrt{2}$, $w = b^2$; ces droites ont donc pour équation

$$ay\sqrt{2} + b^2 = 0,$$

et nous voyons que le demi-axe perpendiculaire à Ox a pour longueur $\frac{b^2}{a\sqrt{2}}$. Les tangentes perpendiculaires à Ox s'obtiennent en faisant $v = 0$; leurs coordonnées sont fournies par l'équation

$$b^2u^2 + 2cuw - 2w^2 = 0,$$

et leur équation quadratique s'obtient en remplaçant $\frac{u}{w}$ par $-\frac{1}{x}$ ou $\frac{w}{u}$ par $-x$ dans la relation homogène en u et w que nous venons de trouver ; nous trouvons ainsi

$$2x^2 + 2cx - b^2 = 0.$$

Ces deux droites sont réelles aussi ; donc la conique est une ellipse et son centre est le point de Ox ayant pour abscisse $-\frac{c}{2}$; c'est le milieu de OF.

D'ailleurs rien n'est plus facile que d'avoir l'équation ponctuelle de cette ellipse : il suffit de chercher les tangentes issues d'un point (x, y) et d'exprimer qu'elles sont confondues. Or les coordonnées des tangentes issues du point (x, y) vérifient les deux équations

$$a^2(w^2 - 2cuw - b^2u^2) + a^2w^2 - b^4v^2 = 0, \qquad ux + vy + w = 0;$$

en éliminant v entre ces équations, on obtient une équation homogène en u et w,

$$a^2y^2(u^2 - 2cuw - b^2u^2) + a^2y^2w^2 - b^4(ux + w)^2 = 0$$

ou

$$w^2(2a^2y^2 - b^4) - 2uw(a^2cy^2 + b^4x) - b^2u^2(a^2y^2 + b^2x^2) = 0.$$

L'équation ponctuelle de l'enveloppe est donc

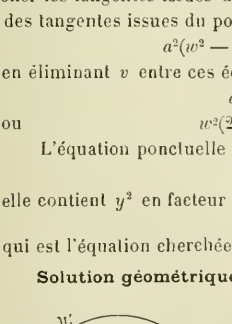
$$(a^2cy^2 + b^4x)^2 + b^2(a^2y^2 + b^2x^2)(2a^2y^2 - b^4) = 0;$$

elle contient y^2 en facteur et s'abaisse ensuite à

$$2b^4x^2 + a^2(a^2 + b^2)y^2 + 2b^4cx - b^6 = 0,$$

qui est l'équation cherchée.

Solution géométrique. — Considérons le cercle principal de l'ellipse dont celle-ci est une projection orthogonale. Deux directions conjuguées dans l'ellipse proviennent de deux directions rectangulaires dans le cercle. Le problème transformé est donc celui-ci : *trouver l'enveloppe d'une corde* M_1M_1' *du cercle qui est vue du point* F *sous un angle droit.* Soient I le milieu de la corde M_1M_1' et C le milieu de OF ; nous avons $\overline{OI}^2 = a^2 - \overline{IM_1}^2 = a^2 - \overline{IF}^2$; donc $\overline{OI}^2 + \overline{IF}^2 = a^2$. Or $\overline{OI}^2 + \overline{IF}^2$ est égal à $2\overline{IC}^2 + 2\overline{OC}^2$; nous avons ainsi $2\overline{IC}^2 + \frac{c^2}{2} = a^2$ et, par suite,



$$\overline{IC}^2 = \frac{a^2 + b^2}{4}.$$

Le lieu du point I est donc un cercle de centre C et ayant pour rayon $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$; la podaire de l'enveloppe de M_1M_1' par rapport au point O est un cercle; par conséquent, cette enveloppe elle-même est une conique ayant pour foyer le point O et pour centre le point C, c'est-à-dire pour second foyer le point F. Cette conique est visiblement une ellipse et elle se projette sur le plan de l'ellipse donnée suivant une ellipse.

G. PÉLISSIER, à Toulouse, et H. de LABARRE, à Lyon-Point du Jour.

Bonnes solutions analytiques : MM. J. Soudot, lycée de Rouen ; G. Foucay, à Roanne ; A. Jaugey, à Lyon ; Dessimond, à Alger ; M. Grangier, à Mouleydier ; H. Janois, à Nantes ; G. Cotti, à Dijon.

1456. — *On donne deux axes de coordonnées rectangulaires et les deux cercles ayant pour équations*

$$x^2+y^2-R^2=0, \qquad (x-a)^2+y^2-R'^2=0.$$

1° *Former l'équation générale des cercles* Γ *tangents au premier et orthogonaux au second.*

2° *Lieu des centres des cercles* Γ.

3° *Enveloppe des polaires d'un point fixe* P *par rapport à ces cercles. On trouve une conique* S. *Étudier le genre de cette conique selon la position du point* P *dans le plan.*

4° *Lieu des points* P *pour lesquels la conique* S *est une hyperbole équilatère.*

5° *Déterminer les points* P *pour lesquels la conique* S *est un cercle.*

1. Un cercle quelconque tangent au cercle (O) a pour équation

$$(1) \qquad x^2+y^2-R^2+\lambda(x\cos\varphi+y\sin\varphi-R)=0;$$

pour que ce cercle soit orthogonal au cercle (O'), il faut et il suffit que la puissance du point O' par rapport à ce cercle soit égale à R'^2. Nous avons ainsi la condition

$$a^2-R^2+\lambda(a\cos\varphi-R)=R'^2, \qquad \text{d'où nous tirons} \qquad \lambda=\frac{R^2+R'^2-a^2}{a\cos\varphi-R},$$

et, en remplaçant λ par cette valeur dans l'équation (1), nous avons

$$(x^2+y^2-R^2)(a\cos\varphi-R)+(R^2+R'^2-a^2)(x\cos\varphi+y\sin\varphi-R)=0;$$

c'est l'équation générale des cercles (Γ), tangents au cercle (O) et orthogonaux au cercle (O').

2. Le centre d'un des cercles (Γ) est déterminé par les équations

$$2x(a\cos\varphi-R)+(R^2+R'^2-a^2)\cos\varphi=0, \qquad 2y(a\cos\varphi-R)+(R^2+R'^2-a^2)\sin\varphi=0,$$

et, pour avoir le lieu de ce point, il suffit d'éliminer φ entre ces deux équations.

On en tire aisément $\operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}$, et par suite, $\cos\varphi=\frac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}$. D'autre part, la première équation s'écrit

$$\cos\varphi[2ax+R^2+R'^2-a^2]=2Rx;$$

remplaçons-y $\cos\varphi$ par sa valeur, puis élevons au carré; nous obtenons l'équation du lieu

$$(C) \qquad x^2+y^2=\frac{(2ax+R^2+R'^2-a^2)^2}{4R^2}.$$

Elle représente une conique (C) ayant pour foyer le point O, pour directrice la droite

$$2ax+R^2+R'^2-a^2=0,$$

et pour excentricité $\frac{a}{R}$.

Cette conique est donc une ellipse, une hyperbole ou une parabole suivant que le point O' est à l'intérieur, à l'extérieur ou sur la circonférence du cercle O.

3. La polaire du point $P(x_0, y_0)$ par rapport au cercle (Γ) a pour équation

$$2(xx_0+yy_0-R^2)(a\cos\varphi-R)+(R^2+R'^2-a^2)(x+x_0)\cos\varphi+(y+y_0)\sin\varphi-2R]=0.$$

Ordonnons cette équation par rapport à $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$; elle s'écrit

$$[2a(xx_0+yy_0-R^2)+(R^2+R'^2-a^2)(x+x_0)]\cos\varphi+(R^2+R'^2-a^2)(y+y_0)\sin\varphi-2R\,xx_0+yy_0+R'^2-a^2]=0,$$

et l'on voit immédiatement que l'enveloppe de cette droite est définie par l'équation
$[2a(xx_0+yy_0-R^2)+(R^2+R'^2-a^2)(x+x_0)]^2+(R^2+R'^2-a^2)^2(y+y_0)^2-4R^2[xx_0+yy_0+R'^2-a^2]^2=0,$
qui représente une conique S.

Pour déterminer la nature de cette conique, calculons les coefficients A, B, C de x^2, $2xy$ et y^2. Nous avons

$$A=(2ax_0+R^2+R'^2-a^2)^2-4R^2x_0^2,$$
$$C=(R^2+R'^2-a^2)^2+4a^2y_0^2-4R^2y_0^2,$$
$$B=2ay_0(2ax_0+R^2+R'^2-a^2)-4R^2x_0y_0,$$

et, en formant $AC-B^2$, on trouve aisément

$$AC-B^2=(R^2+R'^2-a^2)^2[(2ax_0+R^2+R'^2-a^2)^2-4R^2(x_0^2+y_0^2)].$$

La séparative est donc la courbe C.

Pour les coordonnées de l'origine (foyer de la conique C), $AC-B^2$ est positif. Il en résulte que la conique S est une ellipse si le point P est à l'intérieur de la conique C, une hyperbole si le point P est à l'extérieur, et enfin une parabole si le point P est situé sur la conique C.

4. Pour que la conique S soit une hyperbole équilatère, il faut qu'on ait $A+C=0$, ou

$$2(a^2-R^2)(x_0^2+y_0^2)+2ax_0(R^2+R'^2-a^2)+(R^2+R'^2-a^2)^2=0.$$

On vérifiera aisément que cette équation exprime que le point P est situé sur le cercle orthoptique de la conique C.

5. Pour que la conique S soit un cercle, il faut qu'on ait

$$A=C,\qquad B=0,$$

ou $\quad (x_0^2-y_0^2)(a^2-R^2)+ax_0(R^2+R'^2-a^2)=0,\qquad y_0[a(2ax_0+R^2+R'^2-a^2)-2R^2x_0]=0.$

La résolution de ce système d'équations en x_0, y_0 donne les solutions suivantes :

1° $x_0=0$, $y_0=0$: c'est l'origine des coordonnées, l'un des foyers de la conique C.

2° $x_0=\dfrac{a(R^2+R'^2-a^2)}{R^2-a^2}$, $y_0=0$, c'est le second foyer réel de C.

3° $x_0=\dfrac{a(R^2+R'^2-a^2)}{2(R^2-a^2)}$, $y_0^2=-\dfrac{1}{4}\dfrac{(R^2+R'^2-a^2)^2}{(R^2-a^2)^2}$, ce sont les deux foyers imaginaires de la conique C.

Donc pour que la conique S soit un cercle, il faut que le point P soit un des foyers de la conique C.

Remarque. — Si l'on forme l'équation de l'ensemble des tangentes menées du point P à la conique C, on voit aisément que ces droites sont perpendiculaires aux directrices asymptotiques de la conique S ; on en déduit immédiatement la solution des dernières parties de la question proposée.

BROS, à Albi.

Bonnes solutions par MM. Chambran, lycée de Tours ; G. Foucry, à Roanne ; M. Grangier, à Mouleydier ; H. de Labarre, à Lyon ; Le Blanc, collège Chaptal ; Quéméneur, lycée de Rouen ; D. Tabakoff, à Sofia ; G. Pélissier, à Toulouse.

1457. — *D'un point* M *pris dans le plan d'une ellipse on abaisse sur les diamètres conjugués égaux les perpendiculaires* MP, MQ ; *la médiane* MR *du triangle* MPQ *est perpendiculaire à la polaire du point* M. *Cas où le point* M *est sur l'ellipse.*

Soit $x^2+y^2-a^2=0$ l'équation de l'ellipse rapportée à ses deux diamètres conjugués égaux ; nous désignerons par θ l'angle des axes de coordonnées et par x_0, y_0 les coordonnées du point M.

La perpendiculaire menée du point M à Ox a pour équation

$$x-x_0+(y-y_0)\cos\theta=0;$$

elle rencontre Ox en un point P qui a pour abscisse $x_0+y_0\cos\theta$.

De même, l'ordonnée du point Q, projection orthogonale du point M sur Oy est égale à $y_0 + x_0 \cos\theta$.

Il en résulte que le point R, milieu de PQ a pour coordonnées $\frac{x_0 + y_0 \cos\theta}{2}$ et $\frac{y_0 + x_0 \cos\theta}{2}$; donc le coefficient angulaire de MR est égal à

$$\frac{y_0 - \frac{x_0 \cos\theta + y_0}{2}}{x_0 - \frac{x_0 + y_0 \cos\theta}{2}} \quad \text{ou} \quad \frac{y_0 - x_0 \cos\theta}{x_0 - y_0 \cos\theta}.$$

Comme d'autre part l'équation de la polaire du point M par rapport à l'ellipse est

$$xx_0 + yy_0 - a^2 = 0,$$

le coefficient angulaire de cette droite est $-\frac{x_0}{y_0}$; il est alors facile de vérifier qu'en posant

$$m = -\frac{x_0}{y_0}, \qquad m' = \frac{y_0 - x_0 \cos\theta}{x_0 - y_0 \cos\theta},$$

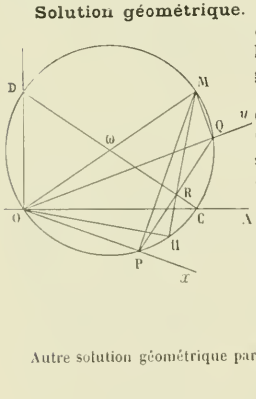
on a la relation $1 + mm' + (m + m')\cos\theta = 0$, et la proposition est établie.

Si le point M est sur l'ellipse, la polaire de ce point est la tangente en M; par suite, la droite MR est normale à l'ellipse au point M.

Alfred GUEIRARD, à Toulon.

Bonnes solutions par MM. Amblard, Conducteur des ponts et chaussées, à Ruines (Cantal); Bros, à Albi; Foucry, à Roanne; Tabakof, à Sofia (Bulgarie).

Solution géométrique. — On sait que dans une conique à centre, deux diamètres conjugués quelconques sont deux rayons homologues de deux faisceaux en involution. Soit O le centre de l'ellipse, OA et OB les axes, Ox et Oy les diamètres conjugués égaux; les deux couples de droites définissent l'involution.



Considérons le cercle (ω) qui a pour diamètre OM; il rencontre OA et OB aux points C et D, Ox et Oy aux points P et Q, qui sont les projections du point M sur les diamètres conjugués égaux. Comme Ox et Oy sont symétriques par rapport à OA et OB, le point C est le milieu de l'arc PQ, et le diamètre CD passe par le milieu R de PQ.

Le point R étant le point de Frégier, la droite MR rencontre le cercle en un deuxième point H, et OH est le diamètre conjugué de OM; comme l'angle $\widehat{OHM}$ est droit, MR est perpendiculaire à ce diamètre.

Or la polaire de M par rapport à l'ellipse est parallèle au diamètre conjugué de OM, donc le théorème est démontré.

FENOUILLET, soldat au 75e de ligne à Romans (Drôme).

Autre solution géométrique par M. Quéméneur, lycée de Rouen.

CONCOURS DE 1906

ÉCOLE CENTRALE

Mathématiques.

Statique

1515. — Évaluer en dynes la force, due à la pesanteur, appliquée à un corps pesant un kilogramme. L'accélération de la pesanteur est de 981 centimètres par seconde.

Application. — Une sphère ayant un centimètre de rayon, formée d'une matière homogène pesant 2 tonnes, 7 par mètre cube, est suspendue à un fil, de masse négligeable, attaché à un point O. Elle est maintenue en

équilibre par une force F horizontale et rencontrant la verticale de O, dans une position telle que le fil fasse 30° avec la verticale de O.

Évaluer F en dynes.

Géométrie analytique et Cinématique

1516. — Les axes $Oxyz$ sont rectangulaires. Une droite Δ qui, à l'instant 0, a pour équations $x = a$, $y = 0$, tourne autour de Oz avec une vitesse angulaire constante ω. Un point P se meut sur Δ de telle manière que sa cote soit donnée en fonction du temps t par la relation $z = b \cos(2\omega t + \varphi)$. Ce point P décrit, dans l'espace $Oxyz$, une trajectoire C.

1° Étudier comment varie la grandeur de l'accélération de P avec la position de P sur C et construire le vecteur accélération pour une position donnée de P.

2° Construire les différentes formes de la projection orthogonale c de C sur le plan xOz, suivant les valeurs de φ, et indiquer par des flèches le sens dans lequel c est parcouru par la projection p de P. Équation de c pour $\varphi = 0$.

3° Montrer que la discussion précédente fournit les différentes formes de la projection orthogonale c_1 de C sur un plan passant par Oz et faisant l'angle θ avec Ox et qu'elle prouve en particulier que C est l'intersection de deux cylindres paraboliques égaux dont les génératrices sont parallèles à xOy et perpendiculaires entre elles.

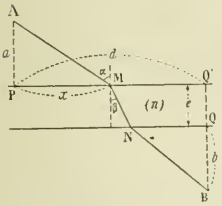
Former les équations de ces deux cylindres.

(13 juin, de 7 h. à 11 h.)

Physique et Chimie.

I. — Détermination de la chaleur de fusion de la glace à l'aide du calorimètre de Bunsen.

II. — **1517**. Étant donnés deux points A et B dans l'air et une lame de verre à faces parallèles d'épaisseur e interposée, on définit la position de ces points par leurs distances respectives $AP = a$ et $BQ = b$ aux faces d'incidence et d'émergence de la lame et par la distance $PQ' = d$ des projections des points A et B sur l'une des faces.



Un rayon de lumière monochromatique pour lequel l'indice relatif du verre est n suivra la route AMNB que l'on demande de déterminer en établissant l'équation qui fait connaître la distance $PM = x$ du point d'incidence au pied de la perpendiculaire AP.

Que devient cette équation dans le cas où le point B vient sur la surface d'émergence? Dans ce cas particulier, et sachant que la lumière passe du point A au point B dans le temps minimum, déterminer la relation qui existe entre les vitesses v et v' de la lumière dans l'air et dans le verre d'une part, et les angles α et β que font avec la normale au point M les rayons AM et MN d'autre part.

III. — Anhydride sulfurique.

IV. — **1518**. 1° On fait passer un courant de chlore jusqu'à refus dans de l'eau tenant en suspension 1 gramme de phosphure d'hydrogène solide. Quand il a complètement disparu on évapore à sec dans une capsule de porcelaine, puis on chauffe au rouge sombre. Écrire les réactions et calculer la masse du résidu. 2° On chauffe 1 gramme du même phosphure solide avec un excès de cuivre pur. Dire ce qui se forme et quel gaz se dégage. En calculer le volume et la masse. 3° Expliquer comment on utiliserait ces deux expériences pour déterminer la composition centésimale du phosphure d'hydrogène solide. Établir cette composition en masses.

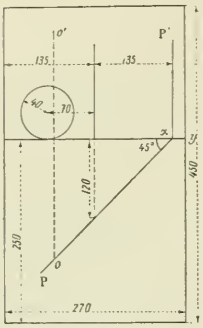
Chaque candidat reçoit un tableau des poids atomiques.

(13 juin, de 2 h. 1/2 à 5 h. 1/2.)

Épure de géométrie descriptive.

SPHÈRE BITANGENTE AU TORE

1519. — Cadre $\frac{450^{\text{mm}}}{270}$. Placer la ligne de terre xy parallèle aux petits côtés du cadre et à 250 mm du côté inférieur.



Le tore, reposant sur le plan horizontal, est engendré par un cercle de 40mm de rayon, tournant autour d'un axe vertical ; cet axe a sa projection verticale au milieu de la feuille ; son pied est à 120mm au-dessous de xy. La distance du centre du cercle générateur à l'axe est égale à 70mm.

La sphère bitangente au tore a 140mm de rayon, son centre o, o' (à déterminer) est au-dessus du tore, vers la gauche de la feuille et dans un plan vertical P'xP conduit par l'axe du tore et tel que l'angle $xxP = 45°$.

Après avoir déterminé les projections de la ligne communes aux deux surfaces, on représentera la partie solide du tore extérieure à la sphère, en supposant celle-ci enlevée.

Dans la mise à l'encre on indiquera les constructions d'un point quelconque de l'intersection, de la tangente en ce point, ainsi que les constructions des points principaux et des lignes particulières.

Les points principaux seront mis en évidence par de petites circonférences de 1mm de rayon, ayant ces points pour centres (trait rouge continu).

Titre extérieur : Géométrie descriptive. — Titre intérieur : Sphère bitangente au tore.

(*14 juin, de 7 h. à 11 h.*)

Trigonométrie.

PROBLÈME.

1520. — Dans le triangle ABC on donne les longueurs b, c, h des côtés AC, AB et de la hauteur AD.

1° Former l'équation qui donne la longueur a du côté BC.

2° Former et discuter l'équation qui donne cos A.

3° Comparer l'angle A à un droit et construire le triangle dans le cas limite.

4° Construire le triangle ABC dans lequel on connait les longueurs b, c, h.

CALCUL LOGARITHMIQUE.

1521. — Calculer l'élongation x, au temps 38 secondes, dans le mouvement rectiligne défini par l'équation :

$$x = a \cos(\omega t + \alpha),$$

$$\omega = 0{,}25, \qquad \alpha = \frac{\pi}{5} \text{ (C. G. S.)}$$

$$a = (0{,}27678)^{\frac{1}{3}}$$

(*14 juin, de 2 h. 1/2 à 5 h. 1/2*).

QUESTION PROPOSÉE

1522. — On considère un segment de droite AB ayant pour longueur $2a$ et par les points A et B on mène deux demi-droites Au et Bv parallèles et de même sens.

1° Trouver l'équation du cercle tangent à AB, Au et Bv, en fonction de l'angle φ que fait la direction Bv avec la direction AB, et trouver le lieu du centre de ce cercle.

2° Trouver le lieu du point de contact M de la demi-droite Bv avec le cercle indiqué et les coordonnées de M en fonction de φ.

3° On demande de rectifier cette dernière courbe, de trouver sa longueur totale, de calculer le rayon de courbure et les coordonnées du centre de courbure en un point variable ayant pour paramètre φ.

E. H.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

16e Année. N° 11. Août 1906.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

CALCUL APPROCHÉ DE CERTAINES SÉRIES

par M. **Pernot**, ancien élève de l'École Polytechnique.

Supposons la convergence de la série établie en montrant que, pour $\alpha > 1$, $\lim. n^\alpha u_n = k$, nombre fini.

Désignons par S la somme de la série, et proposons-nous de calculer une limite supérieure de $S - S_n$, lorsqu'on s'arrête à un rang n déterminé.

M étant un nombre supérieur à k, on peut toujours vérifier, à partir d'un certain rang, l'inégalité

$$u_n < \frac{M}{n^\alpha}.$$

On aura
$$S - S_n < M\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}} + \frac{1}{n^{\alpha+2}} + \ldots\right).$$

Considérons donc la série $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$ et soit S' la somme de cette série.

On a évidemment
$$S'_{2n} - S'_n < nv_n = n.\frac{1}{n^\alpha}.$$

En faisant successivement $n = 2^v$, 2^{v+1}, etc...

$$S'_{2^{v+1}} - S'_{2^v} < \frac{1}{2^{v(\alpha-1)}},$$

$$S'_{2^{v+2}} - S'_{2^{v+1}} < \frac{1}{2^{(v+1)(\alpha-1)}}.$$

. . . . . .

En ajoutant, et passant à la limite, le premier membre devient $S' - S'_{2^v} = S' - S'_n$ puisque l'on est parti de $n = 2^v$.

Le second membre est une progression géométrique de raison $\frac{1}{2^{\alpha-1}}$, dont la somme est

$$\frac{\frac{1}{2^{v(\alpha-1)}}}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}} = \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1} - 1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}} = \left(1 + \frac{1}{2^{\alpha-1} - 1}\right)\frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

On a donc
$$S - S_n < M\left(1 + \frac{1}{2^{\alpha-1} - 1}\right)\frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

Remarque. — Le procédé précédent consiste à remplacer la série harmonique avec exposants, $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$ par le groupement de Cauchy dont la forme générale est

$$av_a + a^2 v_{a^2} + \cdots + a^n v_{a^n} + \cdots$$

On pourrait donc employer tout nombre a autre que 2 ; on aurait

$$S'_{an} - S' < (a-1)nv_n = \frac{a-1}{n^{\alpha-1}}.$$

Un calcul identique au précédent conduit à

$$S - S_n < M \frac{(a-1)a^{\alpha-1}}{a^{\alpha-1}-1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

Sous cette forme, on voit que l'on pourrait chercher le minimum du second facteur quand a varie, α étant fixé. On trouve qu'il suffit de prendre $a > 1$ et aussi petit que possible. $a = 2$ convient donc bien dans la pratique.

Application. — Soit la série $u_n = \frac{\sin n}{n^\alpha}$.

La série est absolument convergente pour $\alpha > 1$, puisque

$$u_n < \frac{1}{n^\alpha}.$$

Prenons, par exemple, $\alpha = 6$ et proposons-nous de calculer la somme de la série à $\frac{1}{100}$ près.

Cherchons à déterminer n pour que l'on ait

$$S - S_n < \frac{1}{200}, \qquad \text{en faisant} \qquad M = 1.$$

D'après ce qui précède,

$$S - S_n < \left(1 + \frac{1}{32-1}\right)\frac{1}{n^5} < \frac{1}{200},$$

$$n^5 > \frac{32 \times 200}{31}, \qquad \text{ou} \qquad n^5 > 206.$$

Il suffit de prendre $n = 3$ et de calculer chacun des trois premiers termes à $\frac{1}{600}$ près, pratiquement à $\frac{1}{1000}$ près.

Autre exemple. — Soit la série $u_n = \frac{1}{n(\mathrm{L}n)^2}$.

Elle est convergente lorsque la série

$$v_n = 2^n \cdot \frac{1}{2^n(\mathrm{L}(2^n))^2} = \frac{1}{n^2(\mathrm{L}2)^2}$$

est convergente, ce qui a lieu pour $\alpha > 1$, puisque

$$\lim. n^2 v_n = \frac{1}{(\mathrm{L}2)^2} \quad \text{n'est pas infinie.}$$

On peut appliquer le procédé précédent pour le calcul de la série.

Le même procédé s'applique à toutes les séries

$$u_n = \frac{f(n)}{\varphi(n)},$$

f et φ étant des fonctions entières de n, et le degré de φ surpassant celui de f d'au moins deux unités.

Il s'applique également à toutes les séries que le groupement de Cauchy permet de comparer à une progression géométrique.

CERTIFICAT D'ÉTUDES SUPÉRIEURES (*Paris, juillet 1905.*)

Mathématiques préparatoires à l'étude des sciences physiques.

1449. — *Intégrer l'équation différentielle*

$$(1-x^2)\frac{dy}{dx}+xy=1.$$

Construire la courbe intégrale qui passe par le point de coordonnées $x=0$, $y=1$.

Pour intégrer cette équation différentielle linéaire posons $y=uz$; nous aurons

$$\frac{dy}{dx}=z\frac{du}{dx}+u\frac{dz}{dx},$$

l'équation deviendra

$$(1-x^2)\left(z\frac{du}{dx}+u\frac{dz}{dx}\right)+xuz=1.$$

Groupons les termes en z,

$$\left[(1-x^2)\frac{du}{dx}+ux\right]z+(1-x^2)u\frac{dz}{dx}-1=0,$$

et calculons u de façon que le coefficient de z soit nul :

$$\frac{du}{u}=-\frac{xdx}{1-x^2}.$$

Si on suppose $-1<x<+1$, on a de suite

$$\mathrm{L}u=\frac{1}{2}\mathrm{L}(1-x^2), \qquad \text{d'où} \qquad u=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Portons cette valeur de u dans $(1-x^2)u\frac{dz}{dx}-1=0$,

$$(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\frac{dz}{dx}=1, \qquad \text{ou} \qquad dz=\frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$z=\int\frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Pour calculer cette intégrale, faisons un changement de variable. Puisque x est compris entre -1 et $+1$, nous pouvons poser $x=\sin t$; nous aurons $dx=\cos t\,dt$,

puis,

$$z=\int\frac{\cos t dt}{\cos^3 t}=\int\frac{dt}{\cos^2 t}=\operatorname{tg} t+\mathrm{C}.$$

Revenons à la variable x,

$$z=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\mathrm{C}.$$

Nous avons par suite

$$y=x+\mathrm{C}\sqrt{1-x^2}.$$

Construisons maintenant la courbe intégrale passant par le point de coordonnées $y=1$, $x=0$. Ceci nous permet de calculer la constante C.

En faisant $x=0$, $y=1$, on trouve $\mathrm{C}=1$.

La courbe à construire est donc $y=x+\sqrt{1-x^2}$.

Cette courbe est une portion d'ellipse de centre O et définie pour toutes les valeurs de x comprises entre -1 et $+1$.

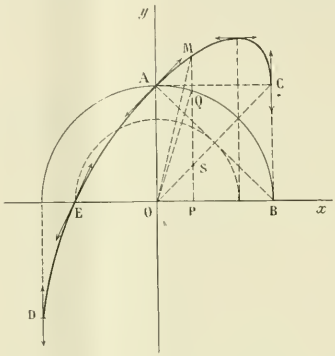
Calculons la dérivée :

$$y'=1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Elle ne s'annule que pour une valeur positive de x, $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Les variations de la fonction sont résumées dans le tableau suivant et la courbe a la forme ci-contre :

x	y	y'
-1	-1	$+\infty$
	croît	
		$+$
0	1	1
	croît	
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	Max. $= \sqrt{2}$	0
	décroît	$-$
$+1$	1	$-\infty$



Construction de la courbe. — 1. On peut s'aider de la recherche des tangentes et construire les points principaux. Pour construire le maximum on remarque que les coordonnées du point sont égales à $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sqrt{2}$. On les construit donc au moyen de la demi-longueur et de la longueur de la diagonale du carré ACBO, comme l'indique la figure. Le point où la courbe coupe l'axe des x a également pour abscisses $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Les tangentes en C et D sont verticales; celle en A est inclinée à 45° et celle en E a pour pente 2.

II. — On peut construire la courbe par points. Considérons un point M de la courbe. On a, d'après l'équation de la courbe, $y = \mathrm{PM} = x + \sqrt{1 - x^2}$.

Or $$\mathrm{PQ} = \sqrt{1 - x^2}, \qquad \mathrm{PS} = x,$$

donc si on se donne l'abscisse P, on aura le point correspondant de la courbe en élevant la verticale en P et en portant à partir de son intersection Q avec le cercle sur cette même verticale la longueur OP de l'abscisse.

JEAN SOUDET, Élève de spéciales, lycée de Rouen.

Autre solution. — Remarquons que $y = x$ est une solution particulière de l'équation proposée, et posons

$$y = zx, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}.$$

L'équation donnée s'écrit alors

$$(1 - x^2)\left(z + x\frac{dz}{dx}\right) + x^2 z = 1$$

puis, après réductions, $$\frac{dz}{1 - z} = \frac{dx}{x(1 - x^2)}, \qquad \text{ou enfin} \qquad \frac{-dz}{1 - z} = \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\,\frac{-2x}{1 - x^2}\right)dx.$$

En intégrant, on obtient facilement

$$\mathrm{L}(1 - z) = \mathrm{L}\,\frac{\mathrm{C}(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{x}, \qquad \text{puis} \qquad 1 - z = \frac{\mathrm{C}\sqrt{1 - x^2}}{x},$$

et $$z = 1 - \frac{\mathrm{C}\sqrt{1 - x^2}}{x}, \qquad \text{C étant une constante arbitraire.}$$

On en déduit

$$y = zx = x - \mathrm{C}\sqrt{1 - x^2}.$$

Les courbes intégrales sont donc des coniques; celle qui passe par le point $x = 0$, $y = 1$ correspond à $C = -1$ et a pour équation

$$y = x + \sqrt{1 - x^2}, \qquad \text{ou encore} \qquad 2x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0.$$

C'est une ellipse ayant son centre à l'origine, etc.

G. FOUCRY, à Roanne.

Même solution de M. Baltif.

Bonnes solutions : MM. Amblard, à Ruines ; Bros ; M. Laurence ; W. Mérigot ; G. Pélissier, à Toulouse ; J.-D. Dufaut, à Poitiers ; M. Grangier, à Mouleydier ; H. Janois, à Nantes ; Louis Sire.

1450. — *Intégrer l'équation différentielle* $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4y = \sin ax$, *dans laquelle a désigne une constante donnée.*

L'équation caractéristique est $\qquad s^2 + 4 = 0.$

Ses racines sont

$$s_1 = 2i \qquad \text{et} \qquad s_2 = -2i;$$

l'intégrale générale de l'équation sans second membre est donc

$$z = A \sin 2x + B \cos 2x,$$

et l'intégrale générale de l'équation avec second membre sera de la forme

$$y = z + \alpha \sin ax + \beta \cos ax,$$

α et β étant deux constantes que nous déterminerons par identification.

Or on a

$$y' = z' + a\alpha \cos ax - a\beta \sin ax,$$
$$y'' = z'' - a^2\alpha \sin ax - a^2\beta \cos ax;$$

on doit avoir, par suite,

$$z'' + 4z + \alpha \sin ax(4 - a^2) + \beta \cos ax(4 - a^2) = \sin ax.$$

Mais $z'' + 4z = 0$; par suite, $\beta = 0$ et $\alpha = \dfrac{1}{4 - a^2}$.

L'intégrale générale cherchée est donc

$$y = \frac{\sin ax}{4 - a^2} + A \cos 2x + B \sin 2x,$$

A et B étant les deux constantes arbitraires.

BROS.

Autre solution. — L'équation sans second membre a pour équation caractéristique :

$$s^2 + 4 = 0.$$

Son intégrale générale est donc de la forme

$$C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Tout revient à trouver une intégrale particulière de l'équation avec second membre.

Désignons par D le symbole de dérivation, et remarquons que l'on a

$$(D^2 + a^2) \sin ax = -a^2 \sin ax + a^2 \sin ax = 0,$$

et par suite

$$(D^2 + a^2)(D^2 + 4)y = (D^2 + a^2) \sin ax = 0.$$

Or cette équation admet pour intégrale générale

$$B_1 \cos ax + B_2 \sin ax + C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

L'équation donnée $\qquad (D^2 + 4)y = \sin ax \qquad (1)$

admet donc une intégrale particulière de la forme :

$$B_1 \cos ax + B_2 \sin ax.$$

Remplaçons dans (1) y par cette valeur, on aura

$$(4 - a^2)(B_1 \cos ax + B_2 \sin ax) = \sin ax,$$

d'où $\qquad B_1 = 0, \qquad B_2 = \dfrac{1}{4 - a^2}.$

L'intégrale générale de l'équation donnée est donc

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{\sin ax}{4 - a^2}.$$

J.-D. DUFAUT, à Poitiers.

Remarque. — MM. R. Manen, Mérigot, Grangier ont remarqué que si $a^2 = 4$ $(a = \pm 2)$ la solution de l'équation avec second membre ne se détermine plus ainsi. On trouve alors pour solution $\mp \frac{x}{4} \cos 2x$, en posant $y = z \cos ax$ et cherchant une solution particulière pour z.

Bonnes solutions : MM. G. Foucry ; J. Soudet, à Rouen ; Amblard, à Ruines ; M. Grangier, à Mouleydier ; R. Manen, à Albi ; M. Laurence ; W. Mérigot, H. Janois, à Nantes ; Louis Sire.

1451. — *L'expression* $\dfrac{(x+2y)dx + ydy}{(x+y)^2}$ *est-elle la différentielle totale d'une fonction* U *des deux variables indépendantes* x *et* y ? *Dans le cas de l'affirmative, déterminer cette fonction* U.

Pour qu'une expression $Pdx + Qdy$ soit la différentielle totale d'une fonction u, il faut et il suffit que

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}.$$

Cette condition est ici remplie.

Pour trouver la fonction u, posons

$$x + y = z, \qquad \text{d'où} \qquad dx + dy = dz.$$

Ce changement de variables nous permet de mettre l'expression donnée sous la forme

$$\frac{dz}{z} - \frac{zdy - ydz}{z^2}, \qquad \text{ou bien} \qquad d(\log z) - d\left(\frac{y}{z}\right).$$

Par suite,

$$u = \log(x+y) - \frac{y}{x+y} + \text{const}.$$

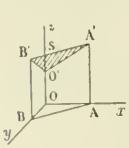
BROS.

Bonnes solutions : MM. G. Foucry, à Roanne ; Amblard, à Ruines ; M. Grangier, à Mouleydier ; H. Janois, à Nantes ; W. Mérigot, à Paris ; M. Laurence ; Louis Sire.

1452. — *On considère la surface* S *qui, par rapport à trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *a pour équation*

$$z = x^2 + y + 1 ;$$

on prend sur Ox *une longueur* OA $= 1$, *sur* Oy *une longueur* OB $= \frac{1}{2}$; *on joint* AB *et on construit le prisme droit ayant pour base le triangle* OAB. *Calculer le volume limité par le triangle* OAB, *les faces latérales du prisme et la surface* S.



Le volume cherché s'obtient en calculant l'intégrale double $\iint z dx dy$ dans les limites données.

Le plan passant par AB et parallèle à Oz a pour équation $x + 2y - 1 = 0$.

La portion du volume du solide comprise entre deux plans infiniment voisins parallèles à xOz s'obtient en laissant y constant, les limites de la variation de x étant 0 et $1 - 2y$.

Intégrons une première fois par rapport à x $\iint (x^2 + y + 1) dy dx$; on obtient

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{(1-2y)^3}{3} + y(1-2y) + 1 - 2y \right] dy.$$

Nous sommes ramenés au calcul de l'intégrale simple précédente.

Pour simplifier les calculs nous poserons

$$1 - 2y = u, \qquad y = \frac{1-u}{2};$$

par suite $dy = -\frac{du}{2}$, et les limites de la variation de u sont 1 et 0.

En effectuant le changement de variable, on a

$$2V = \int_0^1 \left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2} + \frac{3u}{2}\right) du = \frac{1}{12} - \frac{1}{6} + \frac{3}{4},$$

d'où

$$V = \frac{1}{3}.$$

BROS.

Bonnes solutions : MM. Amblard, à Ruines ; G. Pélissier, à Toulouse ; M. Laurence ; G. Foucry ; R. de Faria, à Paris ; M. Grangier, à Mouleydier.

1453. — *Un point m dont la masse est 2^{gr} est soumis à l'action de deux forces, à savoir :*

1° *Un poids p ;*

2° *Une force dirigée vers un centre fixe O ayant une intensité constante et égale à celle du poids :*

(α) *Montrer que la résultante des deux forces dérive d'une fonction de forces U qu'on supposera nulle au point O ;*

(β) *Déterminer et représenter les surfaces de niveau ;*

(γ) *Calculer, dans le système C. G. S., le travail total effectué par la résultante des deux forces quand le point m passe de la position A située à 1^m au-dessus de O sur la verticale de ce point, au point B situé à 50^{cm} de O sur une horizontale issue de ce point ;*

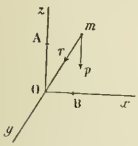
(δ) *Le mobile m est lancé du point A dans une direction quelconque avec une vitesse initiale de 4^{cm} à la seconde et soumis à l'action des deux forces. Appliquer au mouvement le théorème de la force vive et calculer la vitesse du point dans une quelconque de ces positions ; on ne cherchera pas la trajectoire du point.*

Nota. — *On appellera r la distance du mobile au point O et z sa hauteur au-dessus du plan horizontal passant par O. On prendra $g = 980$.*

Prenons pour axe des z la verticale du point O dirigée vers le haut et pour axe des x et y deux droites rectangulaires, dont l'une Ox passe par B.

Le poids p a pour composantes $0, 0, -p$, et la force passant par O

$$-p\frac{x}{r}, \qquad -p\frac{y}{r}, \qquad -p\frac{z}{r}.$$



(α). La résultante des deux forces a donc pour composantes

$$X = -p\frac{x}{r}, \qquad Y = -p\frac{y}{r}, \qquad Z = -p\left(\frac{z}{r} + 1\right).$$

L'expression de l'élément du travail est

$$d\mathfrak{T} = Xdx + Ydy + Zdz = -p\frac{x}{r}dx - p\frac{y}{r}dy - p\left(\frac{z}{r} + 1\right)dz.$$

Or on a

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad \text{d'où} \qquad rdr = xdx + ydy + zdz.$$

L'expression de $d\mathfrak{T}$ est donc

$$d\mathfrak{T} = -p(dr + dz).$$

On voit ainsi que $d\mathfrak{T}$ est la différentielle totale de la fonction $-p(r+z)$. On a donc une fonction de forces $u = -p(r+z)+h$; en supposant que cette fonction de forces est nulle à l'origine, on aura

$$u = -p(r+z) = -p(\sqrt{x^2+y^2+z^2}+z).$$

(β) — Les surfaces de niveau ont pour équation $u = c^{te}$, ou $\sqrt{x^2+y^2+z^2}+z = k$ ou, en mettant sous forme rationnelle,

$$x^2+y^2+2kz-k^2 = 0;$$

ce sont donc des paraboloïdes de révolution ayant pour axe Oz.

(γ) — Le travail total effectué par la force X, Y, Z quand le mobile passe de la position A à la position B est égal à la différence des valeurs prises par la fonction de forces en ces deux positions.

En A, $r = 100$, $z = 100$, $u_A = -392000$;

en B, $r = 50$, $z = 0$, $u_B = -98000$ $(p = 2.980)$

donc

$$\mathfrak{T} = u_B - u_A = 2{,}94.10^5 \text{ ergs.}$$

(δ) — Le théorème des forces vives donne

$$v^2 = u+h = -p(r+z)+h = -p(\sqrt{x^2+y^2+z^2}+z)+h.$$

Au point A, $v = 4^{cm}$; donc h est déterminé par la relation

$$16 = -2.980(100+100)+h, \qquad \text{d'où} \qquad h = 392016.$$

Alors la vitesse en un point quelconque (r, z) ou (x, y, z) est donnée par les formules

$$v^2 = -1960(r+z)+392016 = -1960\sqrt{x^2+y^2+z^2}+z)+392016.$$

En particulier, au point B on trouve

$$v^2 = \sqrt{294016} = 542 \text{ centimètres-secondes.}$$

G. PÉLISSIER, à Toulouse.

Bonnes solutions : MM. Amblard, à Ruines ; Bros, à Albi ; M. Laurence.
Assez bonne solution : M. Grangier, à Mouleydier ; Louis Sire.

ANALYSE

1444. — *On donne deux axes rectangulaires* Ox, Oy *et un point* A *sur* Oy. *Trouver une courbe telle que si l'on mène la tangente en un point quelconque* M *de la courbe, cette tangente rencontre* Ox *en un point* T *équidistant des points* M *et* A.

La tangente au point $M(x, y)$ a pour équation $Y-y = \frac{dy}{dx}(X-x)$; elle rencontre Ox au point T qui a pour coordonnées $X = x-\frac{ydx}{dy}$, $Y = 0$; par suite on a

$$\overline{MT}^2 = \left(y\frac{dx}{dy}\right)^2+y^2.$$

D'autre part, si nous désignons par a l'ordonnée du point A, nous avons

$$\overline{TA}^2 = \left(x-\frac{ydx}{dy}\right)^2+a^2,$$

et la condition $MT = TA$ devient

$$\left(\frac{ydx}{dy}\right)^2+y^2 = \left(x-\frac{ydx}{dy}\right)^2+a^2, \qquad \text{ou} \qquad 2xy\frac{dx}{dy}-x^2+y^2-a^2 = 0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$y\frac{dx^2}{dy}-x^2+y^2-a^2 = 0;$$

si nous y considérons y comme la variable indépendante et x^2 comme la fonction inconnue qu'il faut déterminer, nous avons à intégrer une équation linéaire du premier ordre.

Posons $x^2 = uv$, u et v désignant des fonctions de y dont l'une pourra être choisie arbitrairement ; nous avons $\frac{dx^2}{dy} = u\frac{dv}{dy} + v\frac{du}{dy}$, et l'équation devient

$$y\left[u\frac{dv}{dy} + v\frac{du}{dy}\right] - uv + y^2 - a^2 = 0,$$

ou

$$(1) \qquad u\left[y\frac{dv}{dy} - v\right] + vy\frac{du}{dy} + y^2 - a^2 = 0.$$

Ecrivons que le coefficient de u est nul; nous avons $y\frac{dv}{dy} - v = 0$, ou $\frac{dv}{v} = \frac{dy}{y}$, $\mathrm{L}v = \mathrm{L}y$, et $v = y$. Il est inutile d'introduire une constante arbitraire, puisque nous pouvons particulariser la fonction v.

Remplaçons maintenant v par sa valeur y dans l'équation (1), le coefficient de u s'annule, et il reste

$$y^2\frac{du}{dy} + y^2 - a^2 = 0 \qquad \text{ou, en séparant les variables,} \qquad du = -dy + \frac{a^2dy}{y^2},$$

et, en intégrant,

$$u = -y - \frac{a^2}{y} + \mathrm{C}.$$

On en déduit

$$x^2 = uv = \left(-y - \frac{a^2}{y} + \mathrm{C}\right)y,$$

ou

$$x^2 + y^2 - \mathrm{C}y + a^2 = 0.$$

Telle est l'équation générale des courbes cherchées, C y représente une constante arbitraire.

Ces courbes sont des cercles ayant leurs centres sur l'axe $\mathrm{O}y$, et qui coupent orthogonalement le cercle de centre O et de rayon a.

M. LAURENCE.

Bonnes solutions par MM. J.-D. Dufaut, à Poitiers ; G. Foucay, à Roanne ; G. Pélissier, à Toulouse ; Quémeneur, lycée de Rouen ; M. Grangier, à Mouleydier.

1454. — *La tangente et la normale en un point* M *d'une courbe rencontrent* Ox *en des points* T *et* N *tels que le segment* $\overline{\mathrm{TN}}$ *ait une valeur constante* $2a$. *Trouver l'équation de la courbe et la construire.*

La tangente et la normale au point $\mathrm{M}(x, y)$ ont respectivement pour équations

$$\mathrm{Y} - y = y'(\mathrm{X} - x), \qquad \mathrm{Y} - y = -\frac{1}{y'}(\mathrm{X} - x),$$

y' désignant la dérivée de y par rapport à x.

Le point T où la tangente rencontre Ox a pour abscisse $\overline{\mathrm{OT}} = x - \frac{y}{y'}$, et l'abscisse du point N, intersection de la normale et de Ox, est $\overline{\mathrm{ON}} = x + yy'$.

Or, on a

$$\overline{\mathrm{TN}} = \overline{\mathrm{TO}} + \overline{\mathrm{ON}} = \overline{\mathrm{ON}} - \overline{\mathrm{OT}};$$

on en déduit

$$2a = yy' + \frac{y}{y'}, \qquad \text{ou} \qquad yy'^2 - 2ay' + y = 0;$$

c'est l'équation différentielle des courbes cherchées.

Nous allons intégrer cette équation. Pour cela, résolvons-la par rapport à y' ; nous avons

$$y' = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - y^2}}{y} ;$$

puis remplaçons y' par $\frac{dy}{dx}$, nous pouvons alors séparer les variables et écrire

$$(1) \qquad dx = \frac{y\,dy}{a \pm \sqrt{a^2 - y^2}} .$$

Posons $\pm\sqrt{a^2 - y^2} = t$; nous en tirons $a^2 - y^2 = t^2$, $y\,dy = -t\,dt$, et l'équation différentielle devient

$$dx = -\frac{t\,dt}{a + t} = \left(\frac{a}{a + t} - 1\right) dt.$$

L'intégration est alors immédiate et donne

$$x + C = a\mathrm{L}\,a + t) - t,$$

C désignant une constante arbitraire, ou en remplaçant t par sa valeur $\varepsilon\sqrt{a^2 - y^2}$, $(\varepsilon = \pm 1)$

$$x + C = a\mathrm{L}(a + \varepsilon\sqrt{a^2 - y^2}) - \varepsilon\sqrt{a^2 - y^2}.$$

A chaque valeur de C cette équation fait correspondre une courbe intégrale. Il suffira de construire l'une quelconque d'entre elles, et toutes les autres s'en déduiront par des translations parallèles à Ox. Nous construirons la courbe correspondant à $C = 0$.

1° Supposons d'abord $\varepsilon = +1$; nous avons $x = a\mathrm{L}(a + \sqrt{a^2 - y^2}) - \sqrt{a^2 - y^2}$.

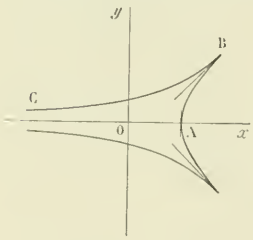
Si nous changeons y en $-y$, x ne change pas, donc la courbe est symétrique par rapport à Ox. Nous ferons varier y par valeurs positives.

Pour que x existe il faut que $a^2 - y^2$ soit positif. Supposons $a > 0$; nous ferons varier y de 0 à a.

L'équation différentielle (1) nous donne la dérivée de x par rapport à y,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{a + \sqrt{a^2 - y^2}}.$$

Quand y croît de 0 à a, $\frac{dx}{dy}$ est positif, et x croît.



Pour $y = 0$, x est égal à $a\mathrm{L}2a - a$, et $\frac{dx}{dy}$ est nul ; la courbe part du point A situé sur Ox et la tangente en ce point est parallèle à Oy. Pour $y = a$, $x = a\mathrm{L}a$ et $\frac{dx}{dy} = 1$; nous obtenons l'arc de courbe AB, et la tangente au point B est parallèle à la bissectrice de l'angle xOy.

2° Prenons maintenant $\varepsilon = -1$; nous avons

$$x = a\mathrm{L}(a - \sqrt{a^2 - y^2}) + \sqrt{a^2 - y^2}, \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{y}{a - \sqrt{a^2 - y^2}},$$

et nous faisons encore varier y de 0 à a ; $\frac{dx}{dy}$ est positif et x croît de $-\infty$ à $a\mathrm{L}a$, ce qui donne la branche de courbe CB.

La courbe intégrale se compose des branches CB, BA et de leurs symétriques par rapport à Ox.

PRÉVOST, lycée de Reims.

Bonnes solutions par MM. Ambiard, conducteur des ponts et chaussées à Ruines (Cantal) ; Bros, à Albi ; Dessimond, à Alger ; Delimbert, à Grenoble ; G. Esteben, à Bordeaux ; P. Gaussot, à Bar-le-Duc ; Le Blanc, collège Chaptal ; M. Laurence ; Jean Pavillon, lycée de Rouen ; Quemeneur, lycée de Rouen ; Eugène Vagneux.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1455. — *Théorèmes.* — 1° P, P′ *et* Q, Q′ *étant les projections des foyers* F, F′ *d'une ellipse sur une droite quelconque et sur la parallèle à cette droite menée par son pôle, on a*

$$FP.F'Q' + F'P'.FQ = 2b^2.$$

2° P, P′ *et* Q, Q′ *étant les projections des extrémités* F, F′ *d'un diamètre d'une des focales d'un ellipsoïde sur un plan parallèle à la tangente à la focale en* F *et sur le plan parallèle au précédent mené par son pôle, on a*

$$FP.F'Q' + F'P'.FQ = 2k^2,$$

k étant le demi-axe de l'ellipsoïde perpendiculaire au plan de la focale.

Nous supposerons l'ellipse et l'ellipsoïde rapportés à leurs axes de symétrie.

1° Les équations d'une droite et de la parallèle menée par son pôle étant

$$ux + vy + w = 0, \qquad ux + vy + \frac{a^2u^2 + b^2v^2}{w} = 0,$$

on a

$$FP = \frac{cu + w}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \qquad FQ = \frac{cu + \dfrac{a^2u^2 + b^2v^2}{w}}{\sqrt{u^2 + v^2}},$$

$$F'P' = \frac{-cu + w}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \qquad F'Q' = \frac{-cu + \dfrac{a^2u^2 + b^2v^2}{w}}{\sqrt{u^2 + v^2}},$$

(les radicaux étant tous précédés du même signe), et par suite

$$FP.F'Q' + F'P'.FQ = 2\frac{-c^2u^2 + a^2u^2 + b^2v^2}{u^2 + v^2} = 2b^2.$$

2° Les équations d'un plan et du plan parallèle mené par son pôle, étant

$$ux + vy + wz + r = 0, \qquad ux + vy + wz + \frac{a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2}{r} = 0,$$

si l'on désigne par $x_0, y_0, 0$ et $-x_0, -y_0, 0$ les coordonnées des points F, F′, pris pour fixer les idées sur la focale située dans le plan Oxy, on a

$$FP = \frac{x_0u + y_0v + r}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}, \qquad FQ = \frac{x_0u + y_0v + \dfrac{a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2}{r}}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}$$

$$F'P' = \frac{-x_0u - y_0v + r}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}, \qquad F'Q' = \frac{-x_0u - y_0v + \dfrac{a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2}{r}}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}$$

et par suite

$$FP.F'Q' + F'P'.FQ = 2\frac{-(x_0u + y_0v)^2 + a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2}{u^2 + v^2 + w^2}.$$

Mais le point F étant sur la focale,

$$\frac{x_0^2}{a^2 - c^2} + \frac{y_0^2}{b^2 - c^2} = 1, \tag{1}$$

et le plan considéré étant parallèle à la tangente à la focale en F, on peut poser

$$\theta u = \frac{x_0}{a^2 - c^2}, \qquad \theta v = \frac{y_0}{b^2 - c^2}.$$

Dans ces conditions, il est facile de vérifier que

$$-(x_0u + y_0v)^2 + (a^2 - c^2)u^2 + (b^2 - c^2)v^2 = 0$$

équivaut à la relation (1). On en conclut que

$$FP.F'Q' + F'P'.FQ = 2c^2.$$

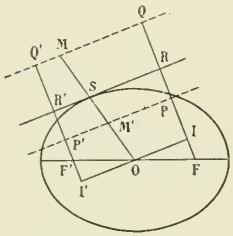
Remarque. — Lorsque : 1° la droite est tangente à l'ellipse considérée ; 2° le plan est tangent à l'ellipsoïde considéré, on a $FQ = FP$, $F'Q' = F'P'$, et l'on retombe sur les théorèmes connus :

$$1^\circ \quad FP.F'P' = b^2, \qquad 2^\circ \quad FP.F'P' = k^2.$$

VASNIER.

Bonnes solutions : MM. Fenouillet, soldat au 75e de ligne ; A. Dediu, à Bucarest ; Bros, à Albi ; M. Laurence.

Solution géométrique. — Soient M le pôle de PP′ et M′ le pôle de QQ′ ; la droite MM′ passe par le centre, rencontre l'ellipse en S, et la tangente en ce point est parallèle à PP′. Menons par le centre O la parallèle à PP′ et soient I et I′ les points où elle rencontre FP et F′P′.



La relation harmonique nous donne

$$\overline{IR}^2 = IP.IQ \quad \text{ou} \quad IR.I'R' = IP.I'Q' ;$$

or

$$IR = FR - FI, \qquad I'R' = F'R' - F'I',$$

ou

$$I'R' = F'R' + FI ; \quad \text{etc.}$$

On a donc

$$(FR - FI)(F'R' + FI) = (FP - FI)(F'Q' + FI),$$

puis

$$FR.F'R' = FP.F'Q' + FI(F'R' - F'Q' + FP - FR),$$

$$FR.F'R' = FP.F'Q' + FI(Q'R' + RP).$$

On aura de même

$$FR.F'R' = F'P'.FQ - FI(Q'R' + RP) ;$$

donc finalement

$$2FR.F'R' = 2b^2 = FP.F'Q' + F'P'.FQ.$$

Démonstration analogue dans le cas de l'ellipsoïde. PARROD.

MÉCANIQUE

1446. — *On considère un système quelconque de forces, dont les éléments de la réduction à l'origine des coordonnées sont désignés comme d'habitude par* X, Y, Z, L, M, N.

1° *Montrer que si on effectue la réduction en un autre point quelconque* M *et que l'on mène le vecteur* MM′ *qui représente le moment résultant en ce point, on passe de* M *à* M′ *par une transformation homographique. Calculer les formules directes et les formules inverses de cette transformation quand les six éléments fondamentaux sont* 1, 0, 1, 0, 0, *h*.

2° *On suppose* Oz *vertical et ascendant, le point* M′ *pesant et tombant librement à partir du plan des* xy, *le long d'une parallèle à* Oz *du plan des* yz, (D) ; *trouver le mouvement du point correspondant* M. *La trajectoire de ce point est une droite ; sachant que le point est pesant et a pour masse* m, *trouver la réaction que cette droite exerce sur le point* M *dans le mouvement imposé.*

3° *Dans les mêmes conditions, trouver le lieu de la droite de support du vecteur* MM′. *Ce lieu est un paraboloïde ; on demande le lieu de son axe, quand la droite* (D) *décrit le plan des* yz.

1. Soient x, y, z les coordonnées du point M et x', y', z' celles du point M′. Les composantes du moment linéaire au point M sont

$$L' = L - yZ + zY, \qquad M' = M - zX + xZ, \qquad N' = N - xY + yX,$$

et, par suite, les coordonnées du point M′ ont pour expression

$$x' = x + L - yZ + zY, \qquad y' = y + M - zX + xZ, \qquad z' = z + N - xY + yX ;$$

ces formules montrent nettement qu'il existe une correspondance homographique entre les deux points M et M′.

Supposons maintenant $X = 1$, $Y = 0$, $Z = 1$, $L = 0$, $M = 0$, $N = h$; nous aurons

$$(1)\qquad \begin{cases} x' = x - y, \\ y' = y - z + x, \\ z' = z + h + y ; \end{cases}$$

ces formules donnent les coordonnées du point M′ en fonction de celles du point M. Si on les résout par rapport à x, y, z, elles donneront les coordonnées du point M en fonction de celles du point M′ ; on trouve ainsi

$$(2)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{2x' + y' + z' - h}{3}, \\ y = \dfrac{-x' + y' + z' - h}{3}, \\ z = \dfrac{x' - y' + 2z' - 2h}{3}. \end{cases}$$

2. Si le point M′ tombe librement, à partir du plan des xy, le long d'une parallèle à Oz située dans le plan des yz, les coordonnées de ce point ont pour expressions $x' = 0$, $y' = a$, $z' = -\dfrac{gt^2}{2}$, pourvu qu'on prenne pour origine des temps l'instant où le point quitte le plan des xy. Les coordonnées du point M sont alors

$$(3)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{a-h}{3} - \dfrac{gt^2}{6}, \\ y = \dfrac{a-h}{3} - \dfrac{gt^2}{6}; \\ z = -\dfrac{a+2h}{3} - \dfrac{gt^2}{3}; \end{cases}$$

la trajectoire de ce point s'obtient en éliminant $\dfrac{gt^2}{3}$ entre les trois équations : c'est la droite

$$x - y = 0, \qquad 2x - z = a.$$

L'accélération du point M a pour composantes $\dfrac{d^2x}{dt^2}$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}$, $\dfrac{d^2z}{dt^2}$, c'est-à-dire $\dfrac{-g}{3}$, $\dfrac{-g}{3}$ et $\dfrac{-2g}{3}$. D'autre part, le point est pesant et, comme tel, soumis à une accélération qui a pour composantes 0, 0, $-g$. L'accélération qui provient de la réaction de la droite sur le point matériel M est donc $\dfrac{-g}{3}$, $\dfrac{-g}{3}$ et $\dfrac{g}{3}$; par suite, les composantes de la réaction sont $\dfrac{-mg}{3}$, $\dfrac{-mg}{3}$, $\dfrac{mg}{3}$, en appelant m la masse du point M.

3. Les équations de la droite MM′ sont $\dfrac{X}{x} = \dfrac{Y-a}{y-a} = \dfrac{Z-z'}{z-z'}$.

Or, d'après les équations (2) ou les équations (3), nous avons

$$x = \frac{a-h+z'}{3}, \qquad y = \frac{a-h+z'}{3}, \qquad z = \frac{2z'-a-2h}{3},$$

puis,

$$z - z' = -\frac{a+2h+z'}{3} = -x-h.$$

Donc les équations de la droite MM′ sont finalement, en fonction de x,

$$\frac{X}{x} = \frac{Y-a}{x-a} = \frac{Z-3x+a-h}{-x-h},$$

et il n'y a plus qu'à éliminer x entre ces deux équations pour avoir le lieu de la droite MM′.

En égalant les deux premiers rapports, nous avons d'abord

$$x(X - Y + a) = aX, \qquad \text{d'où} \qquad x = \frac{aX}{X - Y + a}.$$

Ajoutons maintenant le premier et le dernier rapport terme à terme, puis retranchons de même le second du premier et égalons les résultats ; nous aurons

$$\frac{X - Y + a}{a} = \frac{X + Z + a - 3x - h}{-h},$$

puis,

$$\frac{X - Y}{a} + \frac{X + Z + a - 3x}{h} = 0.$$

Il n'y a plus qu'à remplacer x par sa valeur, et l'équation du lieu est finalement

$$(4) \qquad [h(X - Y) + a(X + Z + a)](X - Y + a) - 3a^2X = 0.$$

Ce lieu est donc un paraboloïde ayant pour plans directeurs les deux plans

$$X - Y = 0 \qquad \text{et} \qquad (a + h)X - hY + aZ = 0;$$

ce paraboloïde est tangent au plan $X = 0$ au point où les deux plans

$$X - Y + a = 0, \qquad X + Z + a - h = 0,$$

le coupent.

Pour avoir l'axe, nous remarquons que les cosinus directeurs de cet axe sont proportionnels aux nombres $1, 1, -1$; par suite, les équations de cette droite sont

$$\frac{f'_x}{1} = \frac{f'_y}{1} = \frac{f'_z}{-1},$$

ou ici

$$(h+a)(X-Y+a) + h(X - Y) + a(X+Z+a-3a^2) = -h(X-Y+a) - h(X-Y) - a(X+Z+a) = -a(X-y+a).$$

En égalant successivement les deux premières lignes à la dernière, on trouve

$$(h + 2a)(X - Y + a) + h(X - Y) + a(X + Z + a) - 3a^2 = 0,$$
$$(h - a)(X - Y + a) + h(X - Y) + a(X + Z + a) = 0;$$

puis, en retranchant la seconde de la première,

$$3a(X - Y + a) - 3a^2 = 0,$$

ou enfin

$$X - Y = 0.$$

Le lieu est donc le plan $X - Y = 0$.

G. PÉLISSIER, à Toulouse.

Assez bonnes solutions : MM. Baillif, à Rouen ; M. Grangier, à Mouleydier.

1458. — 1° *Une droite roule sans glisser sur un cercle avec une vitesse angulaire égale à* 1. *Trouver les équations du mouvement d'un point de la droite invariablement lié à cette droite.*

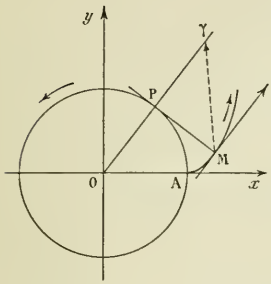
2° *Former les composantes de la vitesse ; placer la tangente et la normale à la trajectoire en un point. Montrer que le mouvement est uniformément accéléré.*

3° *Calculer l'accélération, la composante tangentielle et la composante normale ainsi que le rayon de courbure. Lieu de l'extrémité du vecteur accélération.*

4° *La masse du point mobile étant égale à* 1, *donner l'expression du travail pendant le temps* t *et donner le travail accompli pendant la première heure.*

Nota. — Le rayon du cercle est 1 ; *au temps* $t = 0$ *le mobile coïncide avec le point de contact de la droite et du cercle. Les unités employées sont les unités* C.G.S.

On sait que le lieu du point M est une développante de cercle. Le problème actuel va nous per-



mettre de vérifier ce point et d'étudier les propriétés de cette courbe.

1. Soit A la position du mobile sur le cercle au moment où le mobile coïncide avec le point de contact. Prenons OA pour axe des x et, pour axe des y, un axe faisant l'angle $+\frac{\pi}{2}$ avec OA, quand on choisit pour sens positif de rotation le sens du mouvement. La vitesse angulaire étant 1, l'angle de OP avec OA est égal à t, en prenant bien entendu pour origine des temps l'instant où le mobile est en A ; les coordonnées du point P sont alors $x = \cos t$, $y = \sin t$.

D'autre part, puisque le roulement a lieu sans glissement, on a

$$\text{arc AP} = \text{long. PM}, \quad \text{d'où} \quad \text{long. PM} = t\,;$$

mais le sens dans lequel on porte PM est le sens $t - \frac{\pi}{2}$; on aura donc maintenant de suite les coordonnées du point M en projetant le contour OPM sur les axes. Ceci nous donne

$$(1) \quad \begin{cases} x = \cos t + t \sin t, \\ y = \sin t - t \cos t. \end{cases}$$

Telles sont les équations du mouvement du point M, et par suite, les équations paramétriques de la trajectoire de ce point.

2. Les composantes de la vitesse sont

$$\frac{dx}{dt} = t \cos t, \qquad \frac{dy}{dt} = t \sin t.$$

La vitesse est donc égale à t, c'est-à-dire à MP, et portée sur une parallèle à OP, dans le sens OP. Le mouvement est uniformément accéléré avec une accélération tangentielle égale à 1. La tangente est parallèle à OP, la normale est PM ; la trajectoire du point M est donc bien une développante de cercle.

3. Les composantes de l'accélération sont

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \cos t - t \sin t, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \sin t + t \cos t\,;$$

nous avons donc $\gamma^2 = 1 + t^2$. Or $\gamma_t = 1$; par suite $\gamma_n = t$. L'accélération normale est représentée par le vecteur MP ; l'accélération tangentielle, par un vecteur égal à OP et porté sur Mv ; dès lors, si nous prenons, sur OP, $O\gamma = 2OP$, le point γ sera l'extrémité du vecteur accélération. Le lieu de ce point est donc un cercle concentrique au cercle donné et de rayon double.

Quant au rayon de courbure, ρ, il est donné par $\frac{v^2}{\rho} = \gamma_n = t$; nous avons donc aussi $\rho = t$, et le point P est le centre de courbure de la développante.

4. Depuis l'époque 0 jusqu'à l'époque t, le travail est donné par l'expression

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}\,;$$

ici, $m = 1$, $v_0 = 0$, le travail est donc

$$\mathfrak{T} = \frac{v^2}{2} = \frac{t^2}{2} = \frac{\overline{3600}^2}{2}, \qquad \mathfrak{T} = 6\,480000 \text{ ergs} = 10^6.6,48 \text{ ergs}.$$

Remarque. — Si on s'appuie sur la théorie du centre instantané de rotation, le problème est évident d'un bout à l'autre.

Bonnes solutions : MM. R. Manen, à Albi ; G. Pélissier, à Toulouse ; Baos, à Albi ; Amblard, à Reims ; M. Laurence ; Prévot, lycée de Reims ; J. Pavillon, lycée de Rouen ; Quéméneur, lycée de Reims ; G. Foucry, à Roanne ; M. Grangier, à Mouleydier ; H. Janois, à Nantes.

EXAMENS ET CONCOURS DE 1906 (*Suite.*)

CERTIFICAT D'ÉTUDES SUPÉRIEURES (*Rennes, 28 juin 1906.*)

Mathématiques générales.

Épreuve théorique.

1523. — Déterminer les courbes planes dans lesquelles l'angle α que forme la tangente avec l'axe Ox est donné en fonction de l'abscisse par la formule

$$\sin\alpha = \frac{2ax}{a^2+x^2},$$

a désignant une constante positive :

1° Montrer que ces courbes peuvent se représenter par l'une ou l'autre des équations

$$(1) \qquad y = c \pm a\mathrm{L}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right),$$

$$(2) \qquad y = c \pm a\mathrm{L}\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right);$$

2° Étudier les deux courbes

$$(1') \qquad y = a\mathrm{L}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right),$$

$$(2') \qquad y = a\mathrm{L}\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)$$

et faire voir que toutes les autres courbes considérées (1) et (2) s'en déduisent par translation ou par symétrie.

(*On déterminera la forme de la courbe, le rayon de courbure en fonction de l'abscisse, les asymptotes et les points d'inflexion s'il en existe.*)

3° Trouver les trajectoires orthogonales des courbes (1) et (2).

Épreuve pratique.

Calculer les intégrales

$$J_1 = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dx}{1 - \cos\alpha\sin x} \qquad \text{et} \qquad J_2 = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{(1+\cos x)dx}{(1-\cos\alpha\sin x)^2}.$$

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET BOURSES DE LICENCE

Groupe I.

Mathématiques.

1524. — On considère, dans l'espace, les droites (D) dont les équations sont

$$ux + vy + z + 1 = 0, \qquad x + y + uz + v = 0;$$

on regarde les paramètres u, v comme les coordonnées d'un point A dans un plan (P); à chaque point A de ce plan correspond, en général, une droite (D) et une seule; par un point M de l'espace, il passe, en général, une droite (D) et une seule.

Où doit être le point M pour qu'il passe par ce point une infinité de droites (D)? Soit M_0 un tel point; quel est le lieu, dans le plan P, des points A auxquels correspondent les droites (D), en nombre infini, qui passent par le point M_0? Quand, inversement, le point A décrit ce lieu, quelle est la surface décrite par la droite (D) qui correspond au point A?

Lorsque, dans le plan (P), le point A décrit la parabole dont l'équation est $v = au^2$, la droite correspondante (D) décrit une surface (Σ) qui est, en général, du quatrième degré; la précédente étude permet de mettre en évidence des valeurs du paramètre a pour lesquelles cette surface contient un plan.

Construire, en supposant $a = 1$, la courbe du troisième degré, intersection de la surface (Σ) et du plan des xy.

Évaluer l'aire limitée par cette courbe et la droite dont l'équation est $y = 3{,}5$.

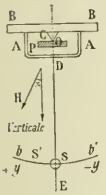
(*18 juin, de 8 h. à 2 h.*)

Physique.

I. — *Méthode des oscillations pour la mesure des forces et des couples.* — Application à la mesure de l'intensité de la pesanteur, à l'établissement de la loi de Coulomb en électrostatique, aux mesures de champs et de moments magnétiques, etc. ; corrélativement, à la mesure des moments d'inertie. Mesures relatives et absolues

N. B. — On se contentera d'énoncer *sans démonstration* les propriétés du pendule simple ou composé et les théorèmes sur les moments d'inertie *dont on devra faire usage.* On s'attachera à mettre en relief les *conditions d'applicabilité* de la méthode. On se gardera de traiter *pour elles mêmes* les applications ; on les considérera *strictement* au point de vue spécial de la mesure des forces et des couples.

II. — **1525** Un système rigide est formé d'un barreau prismatique d'acier B *non* aimanté, d'un couteau d'agate C et d'une monture en métal non magnétique ADE : DE est normale aux arêtes du barreau. Une sphère, dont la masse est 5 grammes, est percée diamétralement par la tige DE (que nous supposons infiniment mince) et glisse à frottement dur sur elle.



Le système repose sur un plan d'agate P et peut osciller, comme un fléau de balance, autour de l'arête O de son couteau. Lorsque la distance OS du centre de la sphère à l'arête du couteau est 20 centimètres, le centre de gravité du système est sur l'arête et son moment d'inertie est 3 000 (gr., cm.).

1° On fait varier la distance $\overline{OS} = x$. On demande quelle est la durée d'oscillation T pour

$$x = 20,\ 21,\ 22,\ 25,\ 30 \text{ centimètres.}$$

On étudiera l'allure de la courbe $T = f(x)$; T passe évidemment par un minimum. On calculera les valeurs T_m, x_m correspondantes à ce minimum. On prendra 980 (cm. sec.) pour intensité de la pesanteur au lieu de l'expérience.

2° On aimante le barreau suivant sa largeur BB ; son moment magnétique est maintenant 500 C.G.S. On crée dans le plan du tableau un champ magnétique uniforme de 2 C.G.S, représenté par le vecteur H faisant l'angle α avec la verticale. On place le centre S de la sphère à 25 centimètres de l'arête O.

1° A chaque valeur de α correspond pour le fléau une position d'équilibre qu'on peut définir par la position S' du point S sur la circonférence $\sigma\sigma'$ de centre O et de rayon 25 cm. On étudiera les positions de S en fonction de α et on calculera approximativement les positions extrêmes. On posera $SS' = y$.

2° Pour certaines valeurs de α, la durée d'oscillation du système est modifiée au maximum. On déterminera ces positions et on calculera les durées d'oscillation correspondantes.

3° On étudiera d'une manière générale la loi de variation de T en fonction de α, en profitant des approximations légitimées par les calculs précédents.

N.-B. — Les candidats sont prévenus qu'on attache un grand prix à l'ordre dans les calculs et à l'exactitude *numérique* des résultats. On ne conservera jamais dans les résultats plus de 4 chiffres significatifs. Une erreur dans la position d'une virgule ou dans l'exposant n d'un facteur 10^n sera comptée comme faute grossière.

(*19 juin, de 8 h. à 2 h.*)

Épure.

1526. — Représenter le solide commun à un hyperboloïde de révolution à une nappe et à un tore.

L'origine est au centre de la feuille, l'axe des x étant le petit axe de la feuille.

L'hyperboloïde a pour centre o, o' : $x = 0$, $y = 8$, $z = 18$ centimètres.

Son axe est de front, les génératrices font avec l'axe un angle de 45°.

La méridienne principale a pour sommet a' : $x = -3$, $z = 15$.

Le tore a son axe vertical o : $x = 0$, $y = 8$.

Sa méridienne principale a pour centre ω' : $x = \pm 6$, $z = 12$; elle passe de plus par le point a'.

On calculera les angles des tangentes à la projection verticale de la courbe en a' avec la ligne de terre.

(*21 juillet, de 8 h. à midi.*)

Groupe II.

Physique.

I. — Décrire les procédés que l'on emploie, ou que l'on pourrait employer, pour mesurer en ampères l'intensité d'un courant électrique.

II. — **1527.** Un observateur est doué d'une vue normale, sa distance minimum de vision distincte a une valeur Δ ; il regarde un petit objet à travers une loupe de foyer φ, placée tout contre l'œil. Entre quelles

limites peut-il déplacer l'objet sans cesser de voir nettement l'image ? Comment varie la latitude de mise au point (distance d entre les deux positions limites précédentes) avec la puissance de la loupe ? Calculer la valeur de d pour $\Delta = 200$ millimètres en donnant à φ successivement les valeurs $\varphi = 100$ millimètres et $\varphi = 20$ millimètres.

Le même observateur regarde un petit objet à travers un microscope dont l'objectif a une distance focale $f = 4$ millimètres, et l'oculaire une distance focale $\varphi = 20$ millimètres, la distance l entre le foyer supérieur de l'objectif et le foyer inférieur de l'oculaire est égale à 160 millimètres. Quelle est maintenant la valeur de la latitude de mise au point ? On supposera dans ce calcul que l'oculaire est une lentille simple, et que l'œil, comme précédemment, est placé tout contre.

Ces deux dernières hypothèses sont-elles réalisées dans la pratique : L'oculaire dont on se sert ordinairement dans le microscope peut-il servir de loupe, et quelle est la place normale que l'œil doit occuper ?

(*22 juin, de 8 h. à 2 h.*)

Chimie.

Les aldéhydes.

On expliquera et on justifiera la notion de *fonction aldéhyde* par un exposé méthodique des propriétés ; en décrivant ces propriétés, on aura soin de signaler, quand il y aura lieu, les applications qu'elles comportent.

(*19 juin, de 10 h. à 2 h.*)

Sciences naturelles.

Étude générale des fermentations.

Les cellules ferments. — Les ferments solubles ; montrer, par une série d'exemples, l'étendue de leur rôle dans les phénomènes de la vie.

(*23 juin, de 8 h. à 12 h.*)

Groupes I et II.

Mathématiques.

1528. — En supposant l'espace rapporté à un système de coordonnées rectangulaires OX, OY, OZ, on considère la courbe définie par les équations

$$y = 2x^3, \qquad z = x^4.$$

1° Montrer que l'arc de cette courbe, compté à partir de l'origine des coordonnées jusqu'au point dont l'abscisse est le nombre positif x, est compris entre $x + \frac{18}{5}x^5$ et $x + \frac{18}{5}x^5 + \frac{8}{7}x^7$ pour les valeurs suffisamment petites de x ; on prouvera que cet arc est toujours inférieur à la seconde limite, et qu'il est certainement supérieur à la première pour $0 < x < \frac{2}{9}$.

2° Montrer qu'il existe sur cette courbe une infinité de couples de points A, B tels que les plans (P), (Q respectivement osculateurs à la courbe en A, B se coupent suivant la droite qui joint ces deux points.

Soit V l'angle (moindre que deux droits) des directions, perpendiculaires aux plans (P), (Q), qui font des angles aigus avec la direction positive sur l'axe des z ; comment varie cet angle quand l'abscisse x du point A croît de 0 à $+\infty$?

Calculer, à un demi-millième près, la valeur de x pour laquelle l'angle V est droit.

Montrer que les droites AB qui joignent deux points d'un même couple sont situées sur la surface dont l'équation est

$$Z = \frac{Y^2}{4X^2}.$$

Séparer cette surface en régions d'après le nombre de plans osculateurs à la courbe proposée qui passent par ses différents points.

3° Évaluer l'intégrale définie $\int_0^{\cdot} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} \frac{V}{2}\, dx$, où V est la fonction de x qui a été définie plus haut.

(*20 juin, de 8 h. à 12 h.*)

QUESTION PROPOSÉE

1529. — On considère dans un plan π deux droites fixes A et B rectangulaires et un segment PQ de longueur constante s'appuyant sur les droites A et B. Soit R un point de PQ divisant ce segment dans un rapport donné. On prend le cercle C de centre R dont le plan est perpendiculaire à la droite PQ et dont le rayon est donné.

1° Equation de la surface S engendrée par le cercle C. Trouver ses lignes doubles.

2° Etudier les sections de la surface S par un plan variable parallèle au plan π. Elle se compose de deux ellipses. Relations entre les longueurs des axes de l'une d'entre elles. Lieu de leurs foyers.

3° Le long de chaque cercle C, les normales à la surface S engendrent une surface du quatrième degré dont les génératrices rencontrent deux droites fixes. Cas de décomposition.

(*Bulletin de la Société Mathématique*, 1883.)

DEUXIÈME PARTIE

ALGÈBRE

1470. — *Si on pose* $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+x^2}}$ *on a, en désignant par* y^m *la dérivée* m^e *de* y *par rapport à* x, $y^{(m)} = \dfrac{R_m(x)}{(1-2\alpha x+x^2)^{m+\frac{1}{2}}}$, $R_m(x)$ *étant un polynome de degré* m *en* x.

Prouver que l'équation $R_m(x) = 0$ *a ses* m *racines réelles.*

Je ferai d'abord observer que le théorème n'est vrai que si l'on suppose la constante α inférieure à l'unité. Dans cette hypothèse, le trinome $x^2 - 2\alpha x + 1$ a ses deux racines imaginaires et la fonction y est toujours réelle et continue. Le théorème est dès lors presque évident.

En effet, la dérivée de $y = \dfrac{1}{\sqrt{u}} = u^{-\frac{1}{2}}$, $(u = x^2 - 2\alpha x + 1)$ est égale à

$$y' = \frac{\alpha - x}{u^{\frac{3}{2}}};$$

la dérivée de $y' = (\alpha - x)u^{-\frac{3}{2}}$ est égale à

$$y'' = -\frac{3}{2}u'(\alpha - x)u^{-\frac{5}{2}} - u^{-\frac{3}{2}}, \quad \text{ou} \quad y'' = \frac{3(x-\alpha)^2 - u}{u^{\frac{5}{2}}}.$$

La loi est donc vraie pour $n = 1$ et $n = 2$, et nous avons $R_1 = \alpha - x$, $R_2 = 3(x-\alpha)^2 - u$. Ces deux polynomes ont leurs racines réelles et leurs premiers coefficients sont respectivement égaux à -1 et 1.2.

Je dis maintenant que l'on peut mettre $y^{(n)}$ sous la forme $y^{(n)} = \dfrac{R_n(x)}{(x^2-2\alpha x+1)^{n+\frac{1}{2}}}$,

R étant un polynome de degré n dont le premier coefficient est $(-1)^n n!$. Cette loi étant vraie pour y' et y'', il me suffit de l'établir pour $y^{(n+1)}$, en l'admettant pour $y^{(n)}$. Admettons donc la formule précédente et dérivons $y^{(n)}$; nous aurons

$$y^{(n+1)} = \frac{uR'_n - \left(n + \frac{1}{2}\right)R_n . u'}{u^{n+\frac{3}{2}}}.$$

Nous avons ainsi

$$R_{n+1} = (x^2 - 2\alpha x + 1)R'_n - (2n+1)(x-\alpha)Rn\,;$$

comme R_n est de degré n, cette formule montre bien que R_{n+1} est de degré $n+1$, si le terme en x^{n+1} ne disparait pas ; or ce terme est $(-1)^n[n.n! - (2n+1)n!]$; il se réduit donc à $(-1)^{n+1}(n+1)!$ La loi annoncée est entièrement établie.

Reste à démontrer que toutes les racines de $R_n(x)$ sont réelles et distinctes. Cela résulte de ce que la fonction y est continue et réelle de $-\infty$ à $+\infty$ et qu'elle est nulle ainsi que ses dérivées, (qui restent réelles et continues comme elle) pour $-\infty$ et $+\infty$. Alors, en appliquant le théo-

rème de Rolle, on voit que la dérivée première a une racine réelle autre que $-\infty$ et $+\infty$, que la dérivée seconde en a deux, et ainsi de suite.

Si $\alpha > 1$, $R_2(x)$ a ses racines imaginaires; on a, en effet,

$$R_2(x) = 3(x-\alpha)^2 - u, \qquad R_2(x) = 2(x-\alpha)^2 + \alpha^2 - 1,$$

et, sous cette dernière forme, le fait est évident.

On peut aussi établir cette propriété en montrant que les polynomes $R_n, R_{n-1}, \ldots, R_2, R_1, R_0 = 1$ forment une suite de Sturm. Cela résulte de l'identité $R_n + (2n-1)(x-\alpha)R_{n-1} + (n-1)^2 u R_{n-2} \equiv 0$, et celle-ci s'obtient en partant de

$$uy' = (\alpha - x)y$$

et en dérivant $n-1$ fois les deux membres.

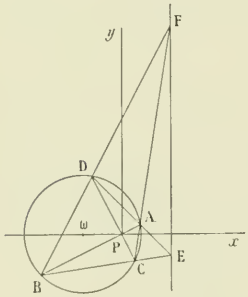
P. BRIZARD.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1467. — *On considère un cercle* (C), *un point* P *et deux droites rectangulaires variables qui passent au point* P *et rencontrent le cercle en quatre points* A, B, C, D.

1° *Trouver l'enveloppe du cercle* (S) *qui passe au point* P *et aux deux autres points diagonaux du quadrangle inscrit* ABCD.

2° *Trouver le lieu du point de rencontre de deux cercles* (S) *orthogonaux.*



Nous prendrons pour origine le point P, pour axe des x la droite joignant le point P au centre ω du cercle (C) et pour axe des y une perpendiculaire à Pω.

L'équation du cercle (C) est alors

$$f(x, y) \equiv (x-a)^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

Soient $y - mx = 0$, $x + my = 0$ les équations de deux droites rectangulaires AB et CD passant par le point P; on peut représenter l'ensemble de ces deux droites par l'équation unique

$$\varphi(x, y) \equiv (mx - y)(x + my) \equiv mx^2 + (m^2 - 1)xy - my^2 = 0.$$

Les points diagonaux E et F du quadrangle ABCD sont les points qui ont même polaire par rapport aux deux coniques $f(x, y) = 0$, $\varphi(x, y) = 0$; par suite, les coordonnées de ces points sont déterminées par les équations

$$\frac{f'_x}{\varphi'_x} = \frac{f'_y}{\varphi'_y} = \frac{f'_z}{\varphi'_z},$$

ou

$$(1) \qquad \frac{2(x-a)}{2mx + (m^2-1)y} = \frac{2y}{(m^2-1)x - 2my} = \frac{-2a(x-a) - 2R^2}{0}.$$

On en déduit d'abord $a(x-a) + R^2 = 0$, ou $x = \dfrac{a^2 - R^2}{a}$, ce qui montre que les points E et F sont situés sur une même droite perpendiculaire à Pω. Cette droite est d'ailleurs la polaire du point P par rapport au cercle, comme on pouvait le prévoir.

Pour avoir les ordonnées des points E et F, il suffit de remplacer x par $\dfrac{a^2 - R^2}{a}$ dans les deux premiers rapports (1), et on obtient l'équation du deuxième degré

$$(2) \qquad a^2(m^2-1)y^2 + 2am(a^2 - R^2)y + R^2(a^2 - R^2)(m^2 - 1) = 0,$$

qui admet pour racines les ordonnées des points E et F.

Cela posé, cherchons l'équation du cercle passant par les trois points P, E, F. Comme ce cercle passe

par l'origine, son équation est de la forme $x^2+y^2+Ax+By=0$; pour écrire qu'il passe par les points E et F, je forme l'équation aux ordonnées des points de rencontre de ce cercle et de la droite $x=\frac{a^2-R^2}{a}$; j'obtiens ainsi

$$a^2y^2+a^2By+(a^2-R^2)^2+Aa(a^2-R^2)=0,$$

et j'écris que cette équation a mêmes racines que l'équation (2).

Ce calcul donne

$$m^2-1=\frac{2m(a^2-R^2)}{aB}=\frac{R^2(m^2-1)}{a^2-R^2+Aa},$$

et nous en tirons

$$B=\frac{2m(a^2-R^2)}{a(m^2-1)},\qquad A=\frac{2R^2-a^2}{a}.$$

Par suite, l'équation du cercle (S) est

$$x^2+y^2-\frac{a^2-2R^2}{a}x+\frac{2my(a^2-R^2)}{a(m^2-1)}=0.$$

Il en résulte immédiatement que ce cercle passe par deux points fixes dont les coordonnées satisfont aux équations

$$x^2+y^2-\frac{a^2-2R^2}{a}x=0,\qquad y=0;$$

c'est d'abord l'origine ou le point P, et ensuite le point P′ $\left(x=\frac{a^2-2R^2}{a},\quad y=0\right)$ situé sur Px.

L'enveloppe du cercle (S) se réduit aux deux points P et P′, et la seconde partie de la question est sans objet.

JULES YERNAUX, école des Mines à Mons.

Solution géométrique. — Le triangle PEF est conjugué par rapport au cercle (C); d'après le théorème de FAURE, le cercle (S) circonscrit au triangle PEF est orthogonal au cercle (C′), lieu des sommets des angles droits circonscrits au cercle (C). Il en résulte que le centre du cercle (S) décrit l'axe radical du point P et du cercle (C′); donc le cercle (S) passe par le symétrique P′ du point P par rapport à cet axe radical.

R. BOUVAIST.

Autre solution géométrique par M. G. COTTY.
Bonne solution de M. Louis SIRE.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

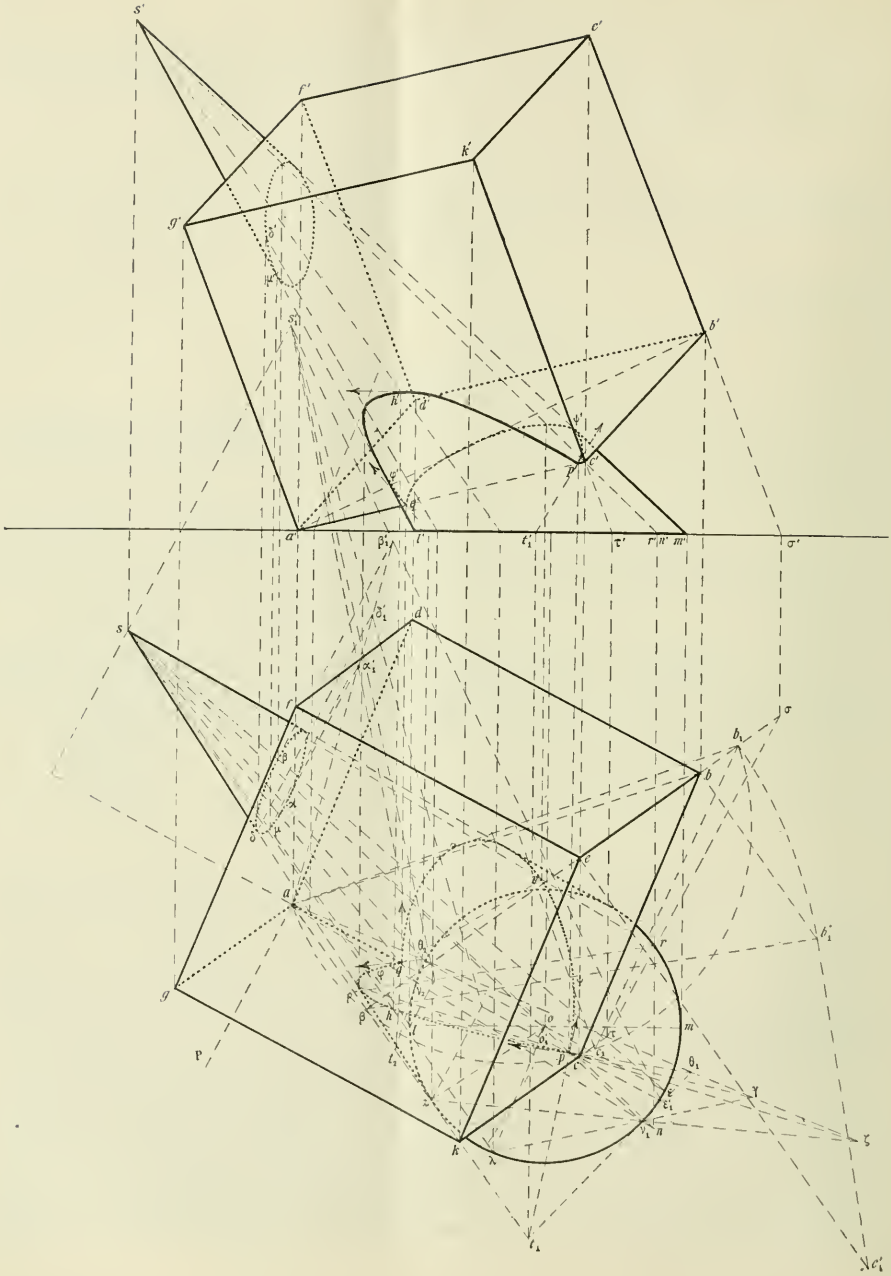
1502. — *Un cône de sommet S, S′ a pour base un cercle horizontal de centre O, O′ et de 40mm de rayon. Un cube est défini par la diagonale ab, a′b′ d'une de ses faces inférieures, face dont on donne en outre la trace horizontale at qui fait un angle de 36° avec les lignes de bout (les cotes sont en millimètres).*

Représenter à l'encre de chine, en distinguant les parties vues et cachées, le solide formé par l'ensemble du cube et du cône, ce dernier étant limité à sa base.

Reproduire à l'encre (traits continus de couleur) les constructions pour la mise en place du cube, la détermination d'un point courant de l'intersection avec la tangente, des points et tangentes remarquables. Les intersections du cône avec les prolongements des faces du cube ne devront pas être tracées. L'usage du pistolet pour le tracé des courbes est interdit.

Titre : Cône et cube. *(École des Mines de Saint-Étienne, concours de 1905.)*

Projections du cube. — Après avoir rabattu la diagonale sur le plan horizontal autour de *at* comme charnière, en ab_1, nous prenons le côté b_1c_1 du carré inscrit dans la circonférence de diamètre ab_1, qui donne la longueur de l'arête du cube, et nous relevons le sommet c_1 en *c*, puis nous achevons le parallélogramme *abcd* qui est la projection horizontale de la base inférieure. Pour obtenir la base supérieure, nous prenons le plan de projection verticale auxiliaire ξb sur lequel nous avons la trace verticale du plan de base en $\xi b'_1$, et nous menons $b'_1e'_1$ perpendiculaire à cette trace et de longueur égale à l'arête du cube. Ayant ainsi la projection horizontale *e* d'un sommet de la base supérieure, nous en déduisons les trois autres par la construction du parallélogramme *efgh*.



On obtient la projection verticale du cube au moyen des lignes de rappel menées par les sommets, les cotes étant données par la projection verticale auxiliaire sur le plan θb.

Projections du cône. — Le contour apparent horizontal du cône s'obtient en menant du point s les tangentes au cercle de base, et le contour apparent vertical en prenant les projections verticales de deux génératrices qui aboutissent aux extrémités l et m du diamètre de front, soient $s'l'$ et $s'm'$.

Intersection des deux solides. — Nous chercherons d'abord les points sur les arêtes du cube : la disposition des solides conduit à prendre d'abord l'arête AC. Nous menons par cette arête et le sommet du cône un plan dont la trace horizontale an coupe la base du cône en deux points ν_1 et ν_2, ce qui donne deux génératrices du cône dans ce plan, $s\nu_1$ et $s\nu_2$, dont les intersections avec l'arête ac font connaître les deux points p et q où cette arête traverse le cône. Nous cherchons immédiatement les tangentes en ces points en prenant l'intersection de chacune des faces du cube passant par l'arête AC avec les plans tangents au cône le long des génératrices $s\nu_1$ et $s\nu_2$. A cet effet, nous avons déterminé la trace horizontale $a\pi$ du plan de la face ACK et pris les points où les tangentes à la base du cône en ν_1 et ν_2 coupaient cette trace et la trace at de la face ACB ; en joignant ces points aux points p et q nous avons obtenu les tangentes $\theta_1 p$, $t_1 p$ et $\theta_2 q$, $t_2 q$. Nous pouvons maintenant construire un point courant dans la face ACB par exemple, en menant un plan auxiliaire par la génératrice $S\nu_2$ et une génératrice arbitraire sr ; la trace horizontale de ce plan coupe en ρ la trace du plan sécant et il suffit de joindre ρq pour obtenir le point v sur la génératrice sr. La tangente en ce point s'obtient exactement comme pour les points p et q. On peut par ce procédé trouver autant de points que l'on veut dans chacune des faces ACB et ACK.

Points remarquables. — Cherchons d'abord les points sur le contour apparent du cône dans chaque face. Il suffit pour cela de faire passer par chaque génératrice de contour apparent et une génératrice sur laquelle on a déjà un point de la section un plan auxiliaire dont on prend la trace sur le plan de base du cône, et l'intersection par le plan sécant. Ainsi la trace $s\nu_1$ du plan auxiliaire $sz\nu_1$ coupe la trace $a\theta$ du plan ACK en ζ que nous joignons à p et cette droite coupe Sz au point cherché. Nous avons répété ces constructions pour chaque génératrice de contour apparent et chacune des faces sécantes, sans les mettre à l'encre pour ne pas embarrasser l'épure. On a ainsi les points σ, σ' et ψ, ψ'.

Nous pouvons aussi chercher dans chaque face le point où la tangente est horizontale : pour cela, nous devons mener au cône un plan tangent qui coupe le plan sécant suivant une droite horizontale ; ce plan doit donc avoir sa trace horizontale parallèle à celle du plan sécant, ce qui conduit à mener à la base du cône les tangentes parallèles à cette trace, et chercher les points de la section sur les génératrices correspondantes. Ainsi, dans la face ACK nous avons obtenu le point le plus haut en menant le rayon $O\lambda$ de la base perpendiculaire à la direction $a\theta$ de la trace de ce plan, puis le plan auxiliaire $s\lambda\nu_1$ nous a donné le point h à l'intersection de γp et de $s\lambda$. En ce point, la tangente à la section est une horizontale du plan sécant.

On pourrait obtenir dans la face ACB un système de deux diamètres conjugués de la section elliptique, en déterminant deux points de la courbe où les tangentes sont parallèles, ce qui donne un diamètre dont le milieu est le centre, puis prenant sur le diamètre parallèle aux tangentes les points de la section ; mais il n'y a aucun avantage à le faire pour le tracé de la courbe, qui est suffisamment déterminé par les points et tangentes remarquables auxquels on joint quelques points courants.

Le procédé que nous avons suivi peut s'appliquer aussi à la construction de la section du cube par la face ADFG, mais pour donner une application d'une méthode assez usitée dans ce genre de questions, nous avons projeté la figure sur un plan vertical auxiliaire perpendiculaire au plan de cette face. La trace horizontale de ce plan, dont nous avons eu la direction en $\alpha\pi$ au moyen des traces horizontales des arêtes KC et EB est aP et la nouvelle ligne de terre coïncide avec ac. Nous obtenons de suite le contour apparent du cône sur ce nouveau plan vertical en menant le diamètre $o\varepsilon$ de la base, parallèlement à ac et le projetant en $o'_1\varepsilon'_1$ et la trace du plan sécant en projetant verticalement un point quelconque de la face ADG. La section a donc pour projection verticale auxiliaire $\alpha'_1\beta'_1$ et on trouve autant de points que l'on veut sur des génératrices choisies arbitrairement. Nous avons en α et β le point le plus haut et le plus bas de la section et nous avons déterminé d'autres points tels que δ sur le contour apparent horizontal, μ sur la génératrice du contour apparent vertical sur le premier plan de projection vertical.

On passe de la projection horizontale de l'intersection à la projection verticale en rappelant simplement les points obtenus sur les génératrices correspondantes. Pour les tangentes, on rappelle sur xy leurs traces horizontales, par exemple $t'_1 p'$, et on joint au point de contact.

Représentation du solide. — Le solide formé par l'ensemble des deux corps ne comprend pas les portions d'arêtes ou de génératrices de l'un d'eux intérieures à l'autre. On devra donc supprimer la portion d'arête PQ et les segments de génératrices des contours apparents limités par le point d'entrée et le point de sortie de

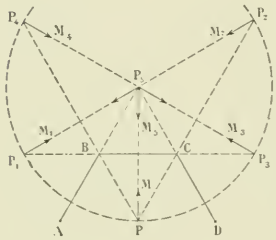
chaque génératrice dans le cube. On voit de suite que les courbes situées dans les faces ACK et ACB sont entièrement cachées en projection horizontale et qu'en projection verticale l'arc $z'h'p'$ seul est vu. Quant à l'ellipse de la face AGD elle est entièrement cachée sur les deux projections.

Bonne solution de M. G. Foccry, à Roanne.

PHYSIQUE

1472. — *Trois miroirs plans rectangulaires égaux entre eux sont disposés comme trois faces latérales consécutives d'un prisme hexagonal régulier. Un objet est situé près de l'axe de ce même prisme. Quelles images les miroirs en donnent-ils ?*

Soient ABCD l'ensemble des trois miroirs et P le centre de l'hexagone.



Supposons d'abord le point lumineux exactement en P. Les rayons réfléchis sur AB donnent une image P_1 située sur le prolongement de BC. Ceux de ces rayons qui sont compris dans l'angle CP_1D rencontrent encore CD et y forment l'image P_2, après quoi ils ne rencontrent plus aucun miroir. De même les rayons issus de P et tombant sur CD donnent successivement l'image P_3 dans le miroir CD et l'image P_4 dans le miroir AB. Enfin les rayons réfléchis sur BC donnent l'image P_5 située à la rencontre des directions AB et DC et ne rencontrent plus d'autre miroir.

Déplaçons maintenant le point lumineux en l'introduisant dans l'angle BPC ; par exemple, plaçons-le en M, sur la perpendiculaire abaissée du point P sur BC. Les réflexions en AB et CD donneront comme dans le cas précédent les images M_1, M_2, M_3, M_4. La réflexion sur BC donnera l'image M_5 et, parmi les rayons réfléchis, ceux qui sont situés dans l'angle AM_5B donneront encore une image dans le miroir AB, ceux qui sont dans l'angle CM_5D donneront encore une image dans le miroir CD. Il y aura sept images en tout.

En déplaçant le point lumineux en sens inverse, on voit aisément que les images P_1 et P_3, passant en avant du miroir BC, se reflètent dans ce miroir, puis dans le miroir CD ou AB, d'où production de quatre images, en sus des cinq premières.

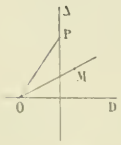
Enfin, si l'on déplace le point lumineux soit vers la droite, soit vers la gauche, on fait venir en avant de BC l'une seulement des images P_1 et P_3, d'où production de deux nouvelles images. En même temps P_5 vient en avant soit de CD, soit de AB, d'où production d'une nouvelle image, ce qui en fait huit en tout.

Les images autres que les cinq premières ne peuvent être vues d'ailleurs que sous de très grandes incidences.

Assez bonne solution de M. M. Laurence.

QUESTIONS PROPOSÉES

1530. — On considère deux droites rectangulaires D et Δ; sur la droite D un point fixe O et sur la droite Δ un point variable P. Sur la bissectrice de l'angle DOP, on prend une longueur OM, telle que $\overline{OM}^2 = k.OP$, k étant une longueur fixe. Trouver le lieu du point M.



P. Tribier.

1531. — Soient O un cercle fixe, A un de ses points. On considère un cercle C tangent à O en A et on mène la tangente commune extérieure aux deux cercles, TM. Trouver géométriquement le lieu du point M lorsque le cercle C varie.

P. Tribier.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

16e Année. N° 12. Septembre 1906.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

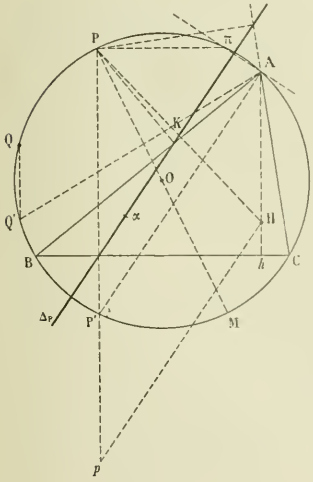
SUR LES DROITES DE SIMSON

par M. **A. Sainte-Laguë**, élève à l'École Normale supérieure.

Le but de cette note est simplement de grouper les principales propriétés des droites de Simson, en rappelant succinctement les démonstrations de ces diverses propriétés.

Nous désignerons toujours dans ce qui suit par A, B, C les sommets du triangle, O le centre du cercle circonscrit, H l'orthocentre, G le centre de gravité, par Δ_P la droite de Simson du point P.

I. *Les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point* P *sur les trois côtés d'un triangle sont en ligne droite si ce point est sur le cercle circonscrit au triangle, et cette droite* Δ_P *est appelée droite de Simson de* P. — La démonstration de cette propriété est classique et se trouve dans tous les traités de géométrie.



II. Δ_P *droite de Simson de* P *est équidistante de* P *et de* H. — p étant le symétrique de P par rapport à BC, la figure AP'pH est un parallélogramme, car les deux cercles égaux APBC et HBCp se déduisent l'un de l'autre par une translation AH. De plus l'angle de Δ_P avec Pp est égal comme celui de AP' avec la même droite à $\widehat{PCA}$. Donc Δ_P, AP', Hp sont trois parallèles et ceci donne la nouvelle propriété :

III. — AP' *est parallèle à* Δ_P.

IV. — *Si on prend deux points* P *et* Q, *l'angle de* Δ_P *et* Δ_Q *est égal à* $\widehat{PAQ}$. Il suffit de remarquer que l'angle des deux droites de Simson est le même que celui de leurs parallèles $\widehat{P'AQ'}$, angle inscrit égal à $\widehat{PAQ}$.

V. — *Deux droites de Simson rectangulaires se coupent sur le cercle des neuf points.* — Elles correspondent en effet d'après ce qui précède à deux points P et M diamétralement opposés. Le cercle des neuf points étant homothétique du cercle ABC par rapport à H dans le rapport $\frac{1}{2}$ et la droite Δ_P par exemple passant au milieu de HP, on voit qu'on a deux droites rectangulaires passant par deux points diamétralement opposés du cercle des neuf points.

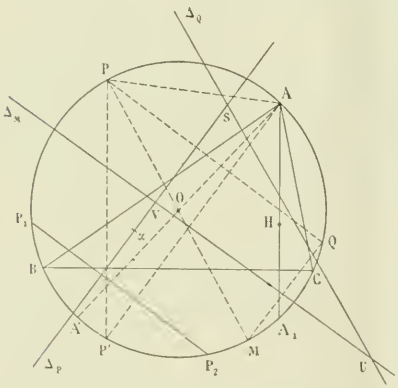
VI. — *L'enveloppe de* Δ_P *est une hypocycloïde à trois rebroussements.* — Si K est le milieu de PH la droite Δ_P est déterminée par ce point K et la projection de P sur BC ; elle fait donc avec BC le même angle que la droite joignant K à la projection h de H sur BC. Le point h étant fixe sur le cercle des neuf points et K décrivant ce cercle, la droite Δ_P enveloppe, d'après une des propriétés bien connues de l'hypocycloïde, une telle courbe admettant pour cercle tritangent le cercle des neuf points.

VII. — *Dans la transformation par points inverses par rapport au triangle* ABC, *l'inverse de* P *est à l'infini dans une direction perpendiculaire à* Δ_P. — La droite isogonale de AP qui donne la direction de l'inverse de P coupe le cercle ABC en π sur la parallèle $P\pi$ menée par P à BC; ce point π étant diamétralement opposé à P', on voit que $A\pi$ est perpendiculaire à AP' ou Δ_P.

VIII. — *Il y a trois droites de Simson passant par un point quelconque* α *du plan.* — Cette propriété et quelques-unes de celles qui suivent peuvent être considérées comme déduites de l'enveloppe des doites Δ_P d'après les propriétés bien connues de l'hypocycloïde à trois rebroussements, mais il peut sembler intéressant d'en donner des démonstrations directes.

Cherchons les droites Δ_P passant par un point α quelconque du plan. Si par α nous menons une sécante quelconque, le lieu des points de rencontre des perpendiculaires à AB et AC aux points où ces côtés sont coupés par la sécante est une hyperbole d'asymptotes perpendiculaires à AB et AC, et passant par A, hyperbole qui coupe le cercle circonscrit en trois points P, P_1, P_2, donnant ainsi trois droites de Simson passant par α.

IX. — *Si on prend un point* α *sur la droite de Simson d'un point* P, *les deux autres points* P_1, P_2 *donnant des droites de Simson passant par* α *sont sur une perpendiculaire à* Δ_P. — Les trois points P, P_1, P_2 et le point A étant quatre points communs à l'hyperbole dont nous venons de parler et au cercle, AP et P_1P_2 sont également inclinés sur les axes de cette hyperbole et par suite sur ses asymptotes qui ont des directions fixes connues. Donc P_1P_2 a une direction fixe et ceci permettrait de la trouver, mais il est plus simple pour obtenir cette direction de prendre une position particulière de α, par exemple de prendre α sur BC ce qui donne pour P_1 et P_2, A' et P', ce qui vérifie l'énoncé. On en déduit les deux corollaires suivants:



X. — *Si deux points* P_1, P_2 *d'un cercle se déplacent de telle sorte que* P_1P_2 *ait une direction invariable, le lieu du point de rencontre des droites de Simson de* P_1 *et* P_2 *est la droite de Simson perpendiculaire à* P_1P_2.

XI. — *Etant donné un point* α *et les trois droites de Simson* Δ_P, Δ_{P_1}, Δ_{P_2} *passant en ce point, elles sont perpendiculaires aux trois côtés du triangle* PP_1P_2.

On peut construire très simplement les points de rencontre ou de contact d'une droite de Simson avec son enveloppe, comme nous allons le voir :

XII. — *Si on mène la corde* PQ *normale à* Δ_P, *la droite* Δ_Q *coupe* Δ_P *au point où cette dernière touche son enveloppe.*

Ceci découle immédiatement de ce qui précède en supposant que P_1 vienne se confondre avec P, P_2 venant en Q. Si P_1 et P_2 viennent se confondre, P_1P_2 étant tangente au cercle, on a les points où Δ_P coupe son enveloppe :

XIII. — *Si on mène les tangentes au cercle* ABC *aux points où elles sont perpendiculaires à* Δ_P *on a deux points de contact dont les droites de Simson coupent* Δ_P *en deux points de l'enveloppe des droites de Simson.*

XIV. — *Les tangentes à l'enveloppe des droites de Simson aux deux points* S *et* U *où l'une d'elles* Δ_Q *coupe cette enveloppe sont rectangulaires.*

En effet, les deux droites de Simson Δ_P et Δ_M de deux points P et M que nous prenons diamétra-

lement opposés étant rectangulaires, les deux perpendiculaires abaissées de chacun de ces points sur sa droite de Simson se coupent en un point tel que Q sur le cercle circonscrit, ce qui démontre sans peine la proposition.

XV. — *Etant donnés trois points* P, Q, M *dont deux sont diamétralement opposés, le triangle des trois droites de Simson a ses côtés parallèles et égaux à ceux du triangle* PQM. — Le parallélisme des côtés est évident d'après ce qui précède, sauf pour PM et Δ_Q, mais d'après une propriété précédente l'angle de Δ_Q et Δ_M est égal à l'angle $\widehat{MAQ}$ ou $\widehat{MPQ}$.

Reste à montrer que les deux triangles semblables PQM et VSU ont 1 pour rapport de similitude, ce qui est évident si on remarque que par exemple VS est la parallèle à MQ menée par le milieu de HP. Ceci démontre donc la très importante propriété de l'hypocycloïde qui suit :

XVI. — *Une droite de Simson* Δ_Q *limitée aux deux points* S *et* U *où elle coupe son enveloppe a une longueur constante égale au double du rayon du cercle* ABC.

XVII. — *Les triangles tels que* SVU *ont tous un même cercle des neuf points qui est celui du triangle* ABC. Si l'on cherche en effet la droite de Simson rectangulaire à SU on trouve la hauteur issue de V du triangle SVU, ce qui suffit à identifier les deux cercles des neuf points de l'énoncé, car le point de rencontre de deux droites de Simson rectangulaires est sur le cercle des neuf points de ABC et que le rayon de ces deux cercles est le même. Ceci montre en particulier que le milieu du segment SU décrit le cercle des neufs points de ABC.

XVIII. — Nous ne voulons pas allonger cette note et ne donnons que les propriétés presque classiques des droites de Simson. Nous laissons au lecteur le soin d'en déduire de nombreuses conclusions et de démontrer des propriétés que l'on obtiendrait en prenant d'autres triangles que ABC inscrits dans un même cercle, telle que la suivante que nous donnons seulement à titre d'exemple :

Si on prend le triangle ABC *et le triangle* $A_1B_1C_1$ *obtenu en joignant les seconds points de rencontre des hauteurs (ou des bissectrices) de* ABC *avec le cercle circonscrit, les droites de Simson d'un point* P *par rapport à ces deux triangles sont rectangulaires.*

Note de la Rédaction. — Nous avons publié autrefois, à plusieurs reprises, toutes les propriétés simples relatives aux droites de Simson. Malgré cela, nous avons pensé que le résumé de M. A. Sainte-Laguë ne pouvait manquer d'intéresser les lecteurs de la *Revue*.

NOTE SUR LES FAISCEAUX LINÉAIRES, PONCTUELS ET TANGENTIELS DE CONIQUES

par M. **A. Darmon**, élève au lycée d'Alger.

Je me propose dans cette note d'étudier l'enveloppe des asymptotes des coniques d'un faisceau linéaire, ponctuel ou tangentiel.

En premier lieu, considérons un faisceau linéaire ponctuel (Σ) de coniques, soit Δ une asymptote d'une des coniques de ce faisceau ; je vais chercher l'enveloppe de cette droite. Pour cela, je transforme la figure par polaires réciproques, par rapport à une conique directrice de centre ω. Le faisceau se transforme en faisceau linéaire tangentiel (Σ'); quant à Δ, elle se transforme en point de contact d'une tangente issue de ω à une conique du faisceau (Σ'). Or :

Le lieu des points de contact des tangentes issues d'un point fixe ω aux coniques d'un faisceau linéaire tangentiel est une cubique (Γ) admettant ω pour point double (elle est donc de quatrième classe), les tangentes en ce point étant les rayons doubles de l'involution déterminée par les tangentes issues de ω à toutes les coniques du faisceau. En outre (Γ) passe par les six ombilics communs aux coniques du faisceau ; tous ces résultats sont évidents géométriquement.

Cela étant, en revenant à la figure primitive, on a le théorème suivant :

L'enveloppe des asymptotes des coniques d'un faisceau linéaire ponctuel est une courbe (Γ') *de troisième classe et du quatrième degré, bitangente à la droite de l'infini,* les points de contact étant les points doubles de l'involution déterminée sur cette droite par les coniques du faisceau. En outre (Γ') est tangente aux six côtés du quadrangle des sécantes communes.

En particulier, supposons que le faisceau soit composé uniquement d'hyperboles équilatères ; dans ce cas les points doubles de l'involution déterminée sur la droite de l'infini par les coniques du faisceau sont les points cycliques, par suite :

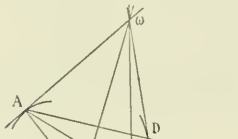
L'enveloppe des asymptotes des hyperboles équilatères circonscrites à un triangle est une hypocycloïde à trois rebroussements, tangente aux trois côtés et aux trois hauteurs du triangle.

De même, en considérant un faisceau linéaire tangentiel de coniques, on démontrerait tout aussi facilement que :

L'enveloppe des asymptotes des coniques d'un faisceau linéaire tangentiel est une courbe de troisième classe et du sixième degré, tangente à la droite de l'infini, aux trois côtés du triangle conjugué commun et admettant comme asymptotes les tangentes communes aux coniques du faisceau.

Tout ceci résulte de ce que le lieu des points de contact des tangentes issues d'un point ω aux coniques d'un faisceau ponctuel est la cubique la plus générale ; elle passe par les quatre points A, B, C, D communs aux coniques du faisceau, les tangentes en ces points étant ωA, ωB, ωC, ωD. En outre elle est circonscrite au triangle conjugué commun et passe au point ω.

Démontrons que nous nous trouvons en présence de la cubique la plus générale ; pour cela nous allons montrer que toute cubique générale Θ est susceptible du mode de génération précédent.



Prenons sur Θ un point quelconque ω ; Θ étant de sixième classe, de ω on peut mener, outre la tangente en ce point, quatre tangentes à cette courbe ; soient A, B, C, D les quatre points de contact. Considérons les coniques du faisceau ponctuel ABCD, le lieu des points de contact des tangentes issues de ω à ces coniques est une cubique Θ' tangente à Θ en A, B, C, D ; ces points comptent donc chacun pour deux dans l'intersection de Θ et Θ' ; en outre Θ' a en commun avec Θ le point ω et les sommets du triangle diagonal du quadrilatère A, B, C, D ; Θ et Θ' ayant plus de neuf points communs sont confondues ; la proposition est donc démontrée.

En outre, on en déduit une démonstration du théorème de Mac-Laurin :

Si d'un point pris sur une cubique, on mène les quatre tangentes autres que la tangente en ce point à la cubique, les points diagonaux du quadrilatère ayant pour sommets les points de contact sont sur la cubique.

SUR UNE PROPRIÉTÉ DES DÉVELOPPÉES DE CONIQUES A CENTRE

par M. **A. Darmon**, élève au lycée d'Alger.

Je rappelle d'abord une propriété très connue :

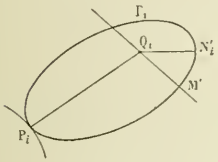
Par le centre ω d'une hyperbole équilatère Γ et par l'un de ses points M passent quatre cercles tangents à Γ en un point autre que M, et les quatre points de contact sont sur un même cercle passant par ω.

Cela étant, faisons une transformation homographique qui fasse correspondre aux points cycliques les points à l'infini sur deux droites rectangulaires, les cercles en question se transforment en hyperboles

équilatères passant par le centre et par les points à l'infini des axes de la transformée Γ_1 de Γ, ce sont donc des hyperboles d'Apollonius relatives à Γ_1, et on a la propriété suivante :

Par tout point M *d'une conique à centre passent quatre hyperboles d'Apollonius* Σ, *tangentes à cette conique en un point autre que* M, *les quatre points de contact sont sur une hyperbole d'Apollonius.*— Autrement dit les normales aux points de contact sont concourantes.

Ceci posé, soit P_i le point de contact d'une des hyperboles équilatères Σ, N_i son quatrième point de rencontre avec Γ_1, les normales en ces points P_i, N_i concourent en un point Q_i situé sur la normale en M', or P_iQ_i est une normale double, donc Q_i est sur la développée de Γ_1; les quatre points Q_i correspondant aux hyperboles Σ sont donc les points communs, autres que le point de contact de la normale MQ_i avec la développée, mais les normales aux points P_i sont doubles : ce sont donc les tangentes à la développée aux points Q_i; comme elle sont concourantes, on en déduit :



Une tangente à une développée de conique à centre rencontre cette développée en quatre points autres que le point de contact, les tangentes à la développée en ces quatre points sont concourantes.

C'est la propriété que je me proposais d'établir.

Je signale en passant que la propriété dont je me suis servi, transformée par polaires réciproques, donne dans des cas particuliers de nombreuses propriétés de la parabole de Steiner.

(On sait que les côtés d'un quadrilatère circonscrit à une conique et dont les côtés touchent celle-ci aux pieds des normales issues d'un point, sont tangents à une parabole tangente aux axes de la conique. C'est cette parabole que j'appelle parabole de Steiner.)

CERTIFICAT D'ÉTUDES SUPÉRIEURES (*Paris, 2e session 1905*).

Mathématiques préparatoires à l'étude des sciences physiques.

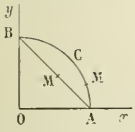
1460. — *Les lettres* x *et* y *désignant les coordonnées d'un point* M *par rapport à deux axes rectangulaires* Ox *et* Oy : *1° calculer l'intégrale*

$$\int y^2dx + (x^2 - 2xy)dy,$$

le long de l'arc du cercle ACB *décrit de* O *comme centre avec l'unité comme rayon et situé dans l'angle positif des axes* xOy; *2° calculer la même intégrale le long de la corde* AB; *3° reconnaître si l'expression*

$$y^2dx + (x^2 - 2xy)dy$$

est une différentielle totale exacte d'une fonction de deux variables indépendantes x *et* y; *4° déterminer un facteur* λ, *fonction de la seule variable* x, *de telle façon que le produit de l'expression précédente par* λ, $\lambda y^2dx + \lambda(x^2 - 2xy)dy$, *soit une différentielle totale exacte, et indiquer la fonction dont ce produit est alors la différentielle.*



1° L'équation du cercle est $x^2 + y^2 = 1$ et donne $xdx + ydy = 0$.

La différentielle proposée s'écrit donc

$$(1 - x^2)\,dx + (1 - y^2 - 2xy)dy, \qquad \text{ou} \qquad (1 + x^2)dx + (1 - y^2)dy - 2x(xdx + ydy).$$

La dernière partie est nulle et les deux autres s'intègrent immédiatement : elles nous donnent

$$\int_{ACB} (1 + x^2)dx + (1 - y^2)dy = \int_1^0 (1 + x^2)dx + \int_0^1 (1 - y^2)dy.$$

La valeur de l'intégrale curviligne indiquée est donc $-\frac{2}{3}$.

2° Sur la droite AB, on a $x+y-1=0$,

d'où $y^2=(1-x)^2$ et $x^2-2xy=1-4y+3y^2$.

L'intégrale se décompose donc en deux autres qui se calculent immédiatement aussi, $-\frac{(1-x)^3}{3}$ et $y-2y^2+y^3$; elles doivent être prises respectivement entre les limites 1,0 et 0,1. La valeur de l'intégrale, le long de AB est visiblement égale à $-\frac{1}{3}$.

3° On n'a pas
$$\frac{\partial y^2}{\partial y}=\frac{\partial(x^2-2xy)}{\partial x};$$
donc la différentielle donnée n'est pas une différentielle totale.

4° Si nous multiplions la différentielle donnée par une fonction inconnue λ et que nous exprimions que le résultat est la différentielle totale d'une fonction u,
$$du=\lambda y^2dx+\lambda(x^2-2xy)dy,$$
nous aurons
$$\frac{\partial.\lambda y^2}{\partial y}=\frac{\partial.\lambda(x^2-2xy)}{\partial x},\qquad \text{ou}\qquad y^2\frac{\partial\lambda}{\partial y}+2\lambda y=(x^2-2xy)\frac{\partial\lambda}{\partial x}+2\lambda(x-y).$$

Or ici λ ne doit dépendre que de x; donc $\frac{\partial\lambda}{\partial y}=0$ et $\frac{\partial\lambda}{\partial x}=\frac{d\lambda}{dx}$.

Par conséquent, λ est fourni par l'équation différentielle
$$(x^2-2xy)\frac{d\lambda}{dx}+2\lambda(x-2y)=0.$$

En supprimant le facteur $x-2y$, cette équation se simplifie et s'écrit
$$\frac{d\lambda}{\lambda}+\frac{2dx}{x}=0,\qquad \text{qui donne finalement}\qquad \lambda x^2=C,\qquad \lambda=\frac{C}{x^2}.$$

Prenons en particulier $\lambda=\frac{1}{x^2}$; nous aurons
$$du=\frac{y^2}{x^2}dx+\left(1-\frac{2y}{x}\right)dy,$$
et il suffit ici d'intégrer la seconde partie pour avoir la fonction u, $u=y-\frac{y^2}{x}$.

Il y a d'ailleurs une double infinité de fonctions u qui sont
$$u=C\left(y-\frac{y^2}{x}\right)+C'.$$

R. DE FARIA, à Paris.

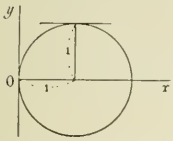
Bonnes solutions : MM. J. MARCHAL; G. PÉLISSIER, à Toulouse; M. LAURENCE; Aimé HENNEQUIN; J.-D. DUFAUT, à Poitiers; AMBLARD, à Ruines; W. MÉRIGOT, à Paris.

1461. — *Intégrer l'équation différentielle du second ordre* $y^3y''=-1$, y'' *désignant la dérivée seconde de la fonction inconnue* y *par rapport à la variable* x. *Construire celle des courbes intégrales qui passe par le point de coordonnées* $x=1$, $y=1$ *et qui admet en ce point une tangente parallèle à* Ox.

On peut poser
$$y''=\frac{dy'}{dx},\qquad y'=\frac{dy}{dx}.$$

L'équation différentielle s'écrit alors successivement
$$\frac{dy'}{dx}=-\frac{1}{y^3},\qquad \frac{dy'}{dx}\,dy=-\frac{dy}{y^3}.$$
$$y'dy'=-\frac{dy}{y^3},\qquad \text{ou enfin}\qquad d(y'^2)=d\left(\frac{1}{y^2}\right).$$

Intégrons une première fois et désignons par C une constante arbitraire ; nous aurons



$$y'^2 = \frac{1}{y^2} + C.$$

Or, pour $y = 1$, on doit avoir $y' = 0$; par suite, $C = -1$, et on est conduit à l'intégration de l'équation différentielle du premier ordre

$$y'^2 = \frac{1 - y^2}{y^2}, \qquad \text{qui s'écrit} \qquad \frac{y\,dy}{\sqrt{1 - y^2}} = dx,$$

forme dans laquelle les variables sont séparées.

On trouve de suite $y^2 = 2x - x^2$, en remarquant que la courbe intégrale doit passer par le point $x = 1$, $y = 1$.

C'est l'équation d'un cercle dont le centre est sur Ox et qui est tangent à l'origine à l'axe Oy.

BROS.

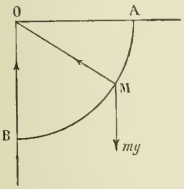
Très bonnes solutions : MM. R. de Faria, à Paris, G. Pélissier, à Toulouse ; J. Marchal.
Bonnes solutions : MM. M. Laurence ; Amblard ; G. Foucry, à Roanne ; Henneqüin ; W. Mérigot, à Paris ; H. Janois, à Nantes.

1462. — *Un pendule simple* OM *dont la longueur est* 1^m *et dans lequel le point matériel* M *a une masse de* 10^g *est écarté d'un angle droit de la verticale dans la position initiale* OA. *Il est abandonné à lui-même sans vitesse initiale.*

Calculer en unités C.G.S. *la vitesse que possède le point* M *à l'instant où le pendule passe par la verticale* OB, *ainsi que la tension du fil à cet instant.*

On prendra $g = 980$.

Le point M peut être considéré comme libre sous l'action de la pesanteur et de la tension du fil, laquelle étant constamment normale à la trajectoire de M effectue un travail nul.



L'application du théorème des forces vives au point M se déplaçant de A en B donne, en désignant par v la vitesse en B,

$$\frac{mv^2}{2} = mgl, \qquad (OM = l) \qquad v^2 = 2gl,$$

$$v = \sqrt{2gl} = \sqrt{2 \times 980 \times 100} = 442^{cm},7.$$

La force normale en B dirigée suivant BO a pour expression

$$F_n = \frac{mv^2}{l} = 2mg\,;$$

comme d'autre part elle est égale à la somme algébrique de la pesanteur dirigée suivant OB, et de la tension T du fil dirigée suivant BO, on a

$$F_n = 2mg = T - mg.$$

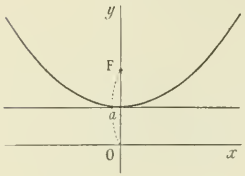
$$T = 3mg = 3 \times 10 \times 980 = 29\,400 \text{ dynes}.$$

HENNEQUIN Aimé, élève de l'École Normale supérieure.

Bonnes solutions : MM. Bros ; G. Foucry, à Roanne ; Amblard, à Ruines.

1463. — *Intégrer l'équation différentielle* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + \sqrt{\dfrac{y^2}{x^2} - 1}$.

Figurer les courbes intégrales en supposant que x *et* y *désignent les coordonnées rectangulaires d'un point* M.



Posons $y = ux$ et différentions ; il vient $dy = udx + xdu$.

L'équation à intégrer est $x\dfrac{du}{dx} = \sqrt{u^2 - 1}$; les variables sont séparées et l'équation se met sous la forme $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{du}{\sqrt{u^2 - 1}}$, ou bien encore $d\log x = d\log\left[u + \sqrt{u^2 - 1}\right]$,

d'où $\log x - \log a = \log\left[u + \sqrt{u^2 - 1}\right]$,

a désignant un nombre arbitraire.

Par suite, $\dfrac{x}{a} = u + \sqrt{u^2 - 1}$, et $\dfrac{a}{x} = u - \sqrt{u^2 - 1}$;

finalement $$2u = \frac{x}{a} + \frac{a}{x}.$$

Les courbes intégrales ont pour équation $x^2 - 2ay + a^2 = 0$ ou bien $x^2 + (y - a)^2 = y^2$.

Ce sont des paraboles admettant pour foyer le point $(0, a)$ et l'axe des x pour directrice.

BROS.

Bonnes solutions : MM. Dufaut, à Poitiers ; G. Foucry ; Hennequin ; J. Marchal ; Le Blanc, collège Chaptal ; H. Janois, à Nantes ; W. Mérigot, à Paris.

ALGÈBRE

1468. — *1° Étudier, suivant les valeurs de k, les racines de l'équation* $e^{2x} = \dfrac{k + x}{k - x}$.

2° On considère l'équation $e^{2x} = \dfrac{k - a + x}{k + a - x}$, *$k$ étant un nombre dont la valeur absolue est plus petite que 1. Montrer que cette équation a une racine réelle et une seule.*

3° Étant donné un nombre quelconque x_0, on pose successivement

$$e^{2x_0} = \frac{k - a + x_1}{k + a - x_1},$$

$$e^{2x_1} = \frac{k - a + x_2}{k + a - x_2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

Montrer que x_n a une limite pour n infini et que cette limite est égale à la racine.

Interprétation géométrique.

1° Pour que l'égalité $e^{2x} = \dfrac{k + x}{k - x}$ puisse être vérifiée, il faut que le second membre soit positif, que x soit compris entre $-k$ et $+k$. Si k est nul, le second membre est toujours égal à -1, l'équation n'admet aucune racine réelle. Si k est différent de zéro, l'équation admet toujours la racine $x = 0$. Les autres racines seront accouplées deux par deux, puisque si l'on change x en $-x$ les deux membres se changent en leurs inverses. Si k est négatif, le second membre décroît quand x croît. Le premier au contraire croît avec x. Il ne peut y avoir qu'une racine : c'est $x = 0$. Si k est positif, plusieurs cas sont à distinguer. Supposons d'abord que k soit égal à 1. Les deux fonctions

$$y = e^{2x} = 1 + \frac{2x}{1} + \frac{(2x)^2}{1.2} + \cdots + \frac{(2x)^n}{n!} + \cdots,$$

$$y_1 = \frac{1 + x}{1 - x} = 1 + 2x + 2x^2 + \cdots + 2x^n + \cdots,$$

sont représentées par des courbes osculatrices au point $x = 0$, $y = 1$. Pour toute autre valeur de x positive et inférieure à 1, on a l'inégalité $y_1 - y > 0$.

En effet, le terme général de cette différence est positif, $\left(2-\frac{2^n}{n!}\right)x^n$. Il ne peut donc y avoir de racine positive, ni par suite de racine négative de l'équation donnée. Dans ce cas, on a trois racines confondues avec $x=0$.

Si k est inférieur à 1, en posant

$$y_2=\frac{k+x}{k-x}=1+\frac{2x}{k}+\cdots+\frac{2x^n}{k^n}+\cdots,$$

on a, pour toute valeur de x comprise entre 0 et $+k$, $y_2>y_1>y$. Il ne peut y avoir de racine positive de l'équation proposée ni par suite de racine négative. Dans ce cas, on n'a que la seule racine $x=0$. Enfin si k est supérieur à 1, pour les valeurs de x infiniment petites et positives, on a $y_2<y$. Pour les valeurs de x infiniment voisines de k et inférieures, on a $y_2>y$. L'équation a au moins trois racines réelles. Je dis qu'elle n'en a que trois. En effet, l'équation $2x-\mathrm{L}\frac{k+x}{k-x}=0$ admet les mêmes racines. Or l'équation dérivée $2-\frac{2k}{k^2-x^2}=0$ n'admet que deux racines, et la fonction $2x-\mathrm{L}\frac{k+x}{k-x}$ ne devient infinie pour aucune valeur positive de x inférieure à k.

2° L'équation $e^{2x}=\frac{k-a+x}{k+a-x}$ a les mêmes racines que $2x=\mathrm{L}\frac{k-a+x}{k+a-x}$.

La dérivée de la différence est $2-\frac{2k}{k^2-(x-a)^2}$. En annulant cette dérivée et résolvant par rapport à x, on trouve

$$x=a\pm\sqrt{a^2-(k-k^2+a^2)}=a\pm\sqrt{k^2-k}.$$

La quantité sous le radical est négative si k est inférieur à 1 en valeur absolue comme il est supposé. L'équation dérivée n'ayant pas de racines réelles, la fonction

$$\varphi=2x-\mathrm{L}\frac{k-a+x}{k+a-x}$$

varie toujours dans le même sens. Elle n'existe que pour x compris entre $a-k$ et $a+k$. Pour les valeurs infiniment voisines des limites, elle prend des valeurs infinies et de signes contraires. Dans l'intervalle elle ne devient jamais infinie. La fonction φ s'annule pour une valeur et une seule de x. L'équation proposée

$$e^{2x}=\frac{k-a+x}{k+a-x}$$

a une racine et une seule, avec la restriction $|k|<1$.

3° On donne la suite d'égalités

$$\left\{\begin{array}{l} e^{2x_1}=\dfrac{k-a+x_1}{k+a-x_1},\\ e^{2x_0}=\dfrac{k-a+x_2}{k+a-x_2},\\ \dots\dots\dots\dots\dots, \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} 2x_0=\mathrm{L}\dfrac{k-a+x_1}{k+a-x_1},\\ 2x_1=\mathrm{L}\dfrac{k-a+x_2}{k+a-x_2},\\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

Considérons la fonction $\mathrm{L}\frac{k-a+x}{k+a-x}$ dont la dérivée est $\frac{2k}{k^2-(x-a)^2}$. Cette dérivée est au moins égale à $\frac{2}{k}>2\mathrm{A}$, A étant un nombre supérieur à 1 et inférieur à $\frac{1}{k}$.

On a alors la suite d'inégalités

$$\left|\mathrm{L}\frac{k-a+x_1}{k+a-x_1}-\mathrm{L}\frac{k-a+x_2}{k+a-x_2}\right|>2\mathrm{A}\,|x_1-x_2|,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

ou

$$2\,|\,x_0 - x_1\,| > 2A\,|\,x_1 - x_2\,|\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|\,x_{n-1} - x_n\,| > A\,|\,x_n - x_{n+1}\,|\,.$$

En multipliant membre à membre toutes ces inégalités, on trouve

$$|\,x_0 - x_1\,| > A^n\,|\,x_n - x_{n+1}\,|\,,$$

$$|\,x_n - x_{n+1}\,| < \frac{|\,x_0 - x_1\,|}{A^n}\,.$$

On en tire, en faisant varier n et ajoutant toutes les égalités ainsi trouvées membre à membre,

$$|\,x_0 - x_{n+1}\,| < |\,x_0 - x_1\,|\left(1 + \frac{1}{A} + \cdots + \frac{1}{A^n}\right) < |\,x_0 - x_1\,|\,\frac{1}{1 - \frac{1}{A}}\,.$$

On voit ainsi que x_n tend vers une limite. Je dis que cette limite est la racine de l'équation

$$e^{2x} = \frac{k - a + x}{k + a - x}\,;$$

en effet, on a

$$e^{2x_n} = \frac{k - a + x_{n+1}}{k + a - x_{n+1}},$$

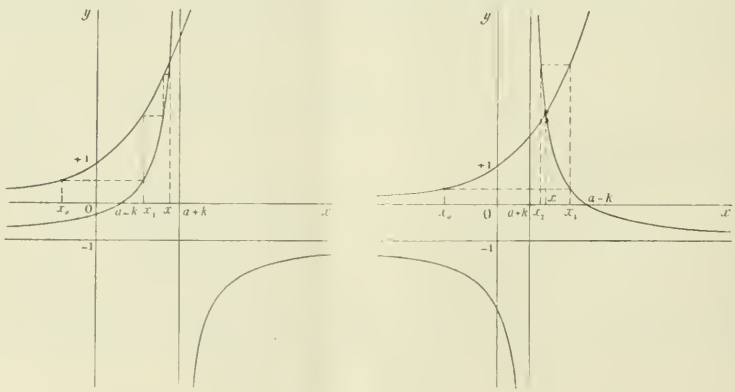
$$\left|\,\frac{k - a + x_{n+1}}{k + a - x_{n+1}} - \frac{k - a + x_n}{k + a - x_n}\,\right| < \varepsilon$$

quand n est suffisamment grand, ε étant donné à l'avance. On a donc

$$\left|\,e^{2x_n} - \frac{k - a + x_n}{k + a - x_n}\,\right| < \varepsilon;$$

ε pouvant être rendu aussi petit que l'on veut, la limite vers laquelle tend x_n ne peut être que la valeur de x qui annule le premier membre.

Construisons les courbes $y = e^{2x}$ et $y = \dfrac{k - a + x}{k + a - x}$. Le résultat que nous venons de trouver



signifie qu'en partant d'un point de la première courbe, menant la parallèle à l'axe des x jusqu'au point de rencontre avec la seconde, par là une parallèle à l'axe des y jusqu'au point de rencontre avec la première, puis par là une nouvelle parallèle à l'axe des x et ainsi de suite, on obtient sur les deux courbes des séries de points qui se rapprochent indéfiniment du point de rencontre. Si k est positif

les valeurs $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ sont des valeurs approchées d'un même côté de la racine. Si k est négatif, ce sont des valeurs approchées alternativement plus petites et plus grandes.

X. et QUÉMENEUR.

Bonnes solutions : MM. HENNEQUIN, élève de l'École Normale supérieure; M. LAURENCE ; Louis SIRE, lycée de Nancy.

MÉCANIQUE

1465. — *On donne la parabole de sommet* O *et de foyer* F *qui a pour équation, en coordonnées rectangulaires,* $y^2 - 2px = 0$.

1° *On suppose qu'un point* M *se déplace sur la parabole de façon que sa vitesse soit dans un rapport constant avec la distance* FM. *Trouver la loi des espaces.*

2° *On suppose qu'une droite qui, dans sa position initiale, coïncide avec la tangente au sommet roule sans glisser sur la parabole de façon que le point de contact coïncide à chaque instant avec le point* M. *Trouver la trajectoire du point* A *de cette droite qui, dans la position initiale, coïncide avec le sommet* O *de la parabole. Étudier le mouvement de ce point sur la trajectoire.*

3° *On abaisse du foyer* F *la perpendiculaire* FP *sur la droite mobile précédente. Montrer que le mouvement du point* P *sur cette droite est uniforme.*

4° *Calculer* AP *et* FP *en fonction du temps et montrer comment les expressions de* AP *et de* FP *peuvent servir à déterminer le mouvement du foyer* F *dans le roulement sans glissement de la parabole sur sa tangente au sommet.*

1. Soient x et y les coordonnées du point M; la distance FM est égale à $x + \frac{p}{2}$. Par suite, la vitesse v du point M est

$$v = 2a\left(x + \frac{p}{2}\right),$$

a désignant une constante, ou, ce qui peut s'écrire

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 4a^2\left(x + \frac{p}{2}\right)^2.$$

Remplaçons x par $\frac{y^2}{2p}$ et $\frac{dx}{dt}$ par $\frac{y}{p}\frac{dy}{dt}$; nous obtenons

$$\frac{dy^2}{dt^2} = a^2(y^2 + p^2), \qquad \text{ou} \qquad \frac{dy}{\sqrt{y^2 + p^2}} = a\,dt.$$

En intégrant, on a

$$\mathrm{L}(y + \sqrt{y^2 + p^2}) = at + \mathrm{C}, \qquad \text{ou} \qquad y + \sqrt{y^2 + p^2} = e^{at + \mathrm{C}}.$$

Supposons que pour $t = 0$, le mobile soit au sommet de la parabole; nous avons $p = e^{\mathrm{C}}$, et, par suite,

$$y + \sqrt{y^2 + p^2} = pe^{at}.$$

Nous en tirons

$$y - \sqrt{y^2 + p^2} = \frac{y^2 - (y^2 + p^2)}{y + \sqrt{y^2 + p^2}} = -pe^{-at},$$

et, en ajoutant membre à membre,

$$2y = p(e^{at} - e^{-at}), \qquad y = p\,\mathrm{sh}\,at, \qquad \text{et} \qquad x = \frac{y^2}{2p} = \frac{p}{2}\,\mathrm{sh}^2\,at.$$

Les coordonnées du point M sont alors

$$x = \frac{p}{2}\,\mathrm{sh}^2\,at, \qquad y = p\,\mathrm{sh}\,at.$$

Pour avoir la loi des espaces, il faut calculer l'arc OM en fonction du temps.

Nous avons

$$v = \frac{ds}{dt} = 2a\left(x + \frac{p}{2}\right),$$

ou, en remplaçant x par $\frac{p}{2}\,\mathrm{sh}^2\,at$,

$$\frac{ds}{dt} = ap(\mathrm{sh}^2\,at + 1) = ap\,\mathrm{ch}^2\,at = \frac{ap}{2}(\mathrm{ch}\,2\,at + 1);$$

puis, en intégrant,

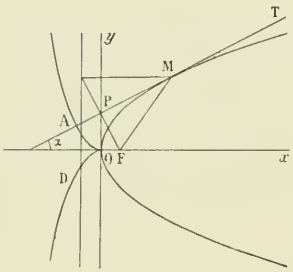
$$s = \frac{ap}{2}\left[\frac{\mathrm{sh}\,2at}{2a} + t\right],$$

en remarquant que pour $t = 0$, on a $s = 0$.

On en déduit

$$s = \frac{p}{2}(at + \mathrm{sh}\,at\,\mathrm{ch}\,at),$$

et l'on voit que s croît en même temps que t. Si l'on désigne par α l'angle que fait Ox avec la direction MT de la tangente dans le sens des arcs croissants, on a



$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{ap\,\mathrm{sh}\,at\,\mathrm{ch}\,at\,dt}{ap\,\mathrm{ch}^2\,at\,dt},$$

$$\sin\alpha = \frac{dy}{ds} = \frac{ap\,\mathrm{ch}\,at\,dt}{ap\,\mathrm{ch}^2\,at\,dt},$$

ou

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{sh}\,at}{\mathrm{ch}\,at}, \qquad \sin\alpha = \frac{1}{\mathrm{ch}\,at}.$$

2. La longueur MA étant égale à l'arc OM, les coordonnées du point A sont

$$x_1 = x - s\cos\alpha, \qquad y_1 = y - s\sin\alpha,$$

ou, en remplaçant s, $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ par leurs valeurs données plus haut,

$$x_1 = -\frac{ap}{2}\,t\,\frac{\mathrm{sh}\,at}{\mathrm{ch}\,at}, \quad y_1 = \frac{p}{2}\left(\mathrm{sh}\,at - \frac{at}{\mathrm{ch}\,at}\right).$$

En différentiant par rapport à t on a

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{ap}{2\,\mathrm{ch}^2\,at}(at + \mathrm{sh}\,at\,\mathrm{ch}\,at), \qquad \frac{dy_1}{dt} = \frac{ap}{2}\cdot\frac{\mathrm{sh}\,at}{\mathrm{ch}^2\,at}(at + \mathrm{sh}\,at\,\mathrm{ch}\,at),$$

d'où l'on déduit

$$\frac{dy_1}{dx_1} = -\mathrm{sh}\,at = -\frac{dx}{dy}.$$

La tangente au point A est à chaque instant perpendiculaire à la droite AM.

Le point A décrit une développante de la parabole ; quand t croît, x_1 et y_1 vont constamment en croissant. La vitesse v_1 du point A est donnée par la formule

$$v_1 = \frac{ap}{2\,\mathrm{ch}\,at}(at + \mathrm{sh}\,at\,\mathrm{ch}\,at)$$

3. Le point P, projection du foyer F sur la tangente AM est situé sur la tangente au sommet de la parabole ; son ordonnée est la moitié de celle du point M, donc, les coordonnées du point P sont $x' = 0$, $y' = \frac{p}{2}\,\mathrm{sh}\,at$.

La vitesse de ce point sur Oy est $\frac{dy'}{dt} = \frac{ap}{2}\operatorname{ch} at$. Sa vitesse sur la droite AM est la projection sur AM de la vitesse sur Oy ou $\frac{dy'}{dt}\sin\alpha = \frac{ap}{2}$. Cette vitesse est constante, donc le mouvement de P sur AM est uniforme.

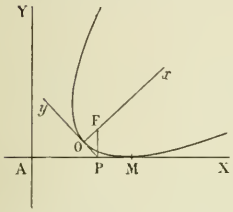
On peut aussi le voir autrement. On a

$$\overline{AP}^2 = x_1^2 + (y_1 - y')^2 = \frac{p^2}{4}a^2t^2\frac{\operatorname{sh}^2 at}{\operatorname{ch}^2 at} + \frac{p^2}{4}\frac{a^2t^2}{\operatorname{ch}^2 at} = \frac{a^2p^2}{4}t^2,$$

ou

$$AP = \frac{ap}{2}t.$$

4. D'autre part, on a



$$\overline{FP}^2 = \frac{p^2}{4} + \frac{p^2}{4}\operatorname{sh}^2 at = \frac{p^2}{4}\operatorname{ch}^2 at, \qquad \text{d'où} \qquad FP = \frac{p}{2}\operatorname{ch} at.$$

Supposons maintenant que la parabole roule sans glisser sur sa tangente au sommet. Les coordonnées du point F par rapport aux axes fixes OX et OY sont

$$X = AP, \qquad Y = OP,$$

ou

$$X = \frac{ap}{2}t, \qquad Y = \frac{p}{2}\operatorname{ch} at;$$

et en éliminant X, on a

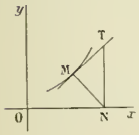
$$Y = \frac{p}{2}\operatorname{ch}\frac{2X}{p},$$

ce qui montre que le lieu du point F est une chaînette ayant pour axe AY.

G. PÉLISSIER, lycée de Toulouse.

Bonnes solutions par MM. F. Brachet, 42e de ligne, à Belfort; G. Bresse, 152e de ligne, à Belfort : Fenouillet; Henneqüin, élève à l'école normale supérieure ; M. Laurence ; Parrod, à Vesoul ; Quéméneur, lycée de Rouen ; Louis Sire, lycée de Nancy.

CONCOURS DE 1906 (*Suite.*)



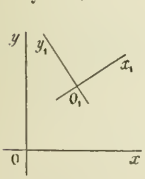
ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES (*Cours spéciaux.*)

Analyse.

1532. — Trouver une courbe telle que sa normale MN et sa tangente MT déterminent un segment de longueur constante NT sur l'ordonnée menée par le point où la normale MN rencontre l'axe Ox.

Mécanique.

I. — **1533.** On donne un système d'axes rectangulaires $y_1O_1x_1$ mobile dans un plan P par rapport au système d'axes fixes rectangulaires yOx.



Soient x_0, y_0 les coordonnées de O_1 par rapport aux axes fixes ; le mouvement d'un point $Q(x_1, y_1)$ invariablement lié au premier système étant défini par les formules connues du changement d'axes rectangulaires

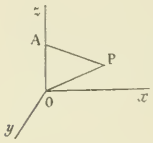
$$x = x_0 + ax_1 + by_1, \qquad y = y_0 + a_1x_1 + b_1y_1,$$

où x_0, y_0, a, b, a_1, b_1 sont des fonctions connues du temps t, trouver à l'instant t :

1° les coordonnées du centre instantané de rotation ;

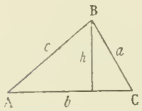
2° le lieu des points Q qui sont des points d'inflexion sur leur trajectoire ;

3° le lieu des points Q qui ont même vitesse à l'instant t.



II. — **1534.** On donne trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz ; étudier et discuter le mouvement d'un point pesant P de masse m attiré par l'origine O proportionnellement à sa distance OP à O, et par la verticale Oz proportionnellement à sa distance PA à Oz.

Trigonométrie.



On donne la hauteur h d'un triangle ABC issue du sommet B, la surface S et l'angle A.

Résoudre le triangle et calculer le rayon du cercle circonscrit quand $h = 9^m,78$, $S = 71^{m^2},23$, $A = 42°30'27''$.

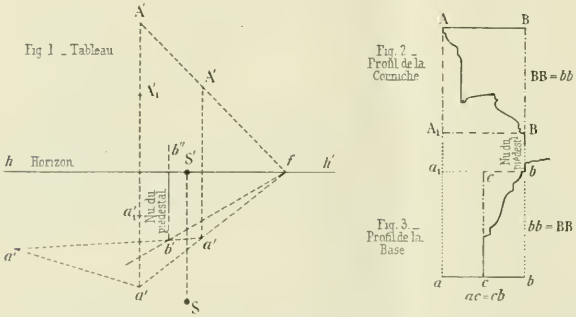
Épure de perspective linéaire.

On donne, imprimé sur la feuille d'épure (*fig.* 1) un tableau dont h, h' est la ligne d'horizon. Sur ce *tableau* $a'a'a'$ sont les perspectives de trois des sommets d'un rectangle horizontal.

On demande, tout d'abord, de déterminer la perspective du quatrième sommet.

$a'A'$, et $a'A'$ sont deux des arêtes *verticales* d'un parallélépipède ayant pour base le rectangle précédent. On achèvera la représentation de ce parallélépipède. Ce solide sera considéré comme *l'épannelage* d'un piédestal, dont les détails vont être définis ci-après.

On connaît géométralement, à une même échelle, quelconque d'ailleurs, (*fig.* 2) le profil de la corniche et (*fig.* 3) celui de la base, rapportés tous deux au nu, bbBB du *dé* du piédestal.



D'autre part, sur le *tableau* (*fig.* 1) on voit en $a'a'$ pour la base, en A'A' pour la corniche, les perspectives des arêtes de l'épannelage indiquées en aa_1 sur la figure 3 et en AA_1 sur la figure 2, ainsi que en $b'b''$ (*fig.* 1) une des arêtes du dé du piédestal, celle qui répond au nu de ce dernier.

On demande sur ces données, lesquelles sont suffisantes :

1° d'achever la perspective du piédestal (dé, base et corniche) ;

2° en supposant le soleil en S, S', de déterminer les ombres du piédestal sur lui-même.

QUESTIONS PROPOSÉES

1535. — On considère trois cercles de centres donnés A, B, C. Soient I leur centre radical et Δ leur axe de similitude externe.

1° Lieu du point I, lorsque la droite Δ reste fixe.

2° Enveloppe de la droite Δ lorsque le point I reste fixe.

3° Par un point I donné passent deux droites Δ. Construire ces droites ; elles sont rectangulaires.

4° Sur une droite Δ donnée existe un point I. On joint ce point, que l'on demande d'abord de construire, au centre O du cercle ABC, et l'on demande de trouver l'enveloppe des droites Δ qui font avec la droite OI un angle donné θ.

L. Bickart.

1536. — 1° On donne dans un plan trois points A, B, C. Par chacun des points B et C on mène une

droite parallèle à une direction Δ, et on considère la polaire du point A par rapport à la conique dégénérée constituée par ces deux droites. Quand la direction Δ varie, cette polaire enveloppe une parabole P_A. Il existe de même deux autres paraboles P_B, P_C.

2° Les trois points A, B, C et les trois foyers F_A, F_B, F_C sont six points d'un même cercle.

3° Les trois paraboles sont inscrites dans le triangle ABC. Il existe en outre quatre coniques inscrites dans ce même triangle et tangentes chacune aux trois paraboles. Ce sont trois hyperboles et une ellipse. Les centres des hyperboles sont sur l'ellipse. Soit G le centre de cette ellipse.

4° Le diamètre conjugué de la direction d'un des côtés du triangle ABC dans la parabole relative au sommet opposé est un axe de symétrie oblique relatif à la même direction de la figure constituée par les deux autres paraboles. On déduira de là que, si l'on considère le triangle curviligne limité à la parabole P_A et aux tangentes AB et BC, puis le triangle limité à la même parabole et aux tangentes AC et BC et enfin les quatre autres triangles analogues relatifs aux deux autres paraboles, le centre de gravité de l'aire des six triangles envisagés ensemble est le point G.

J. Guadet.

DEUXIÈME PARTIE

ANALYSE

1482. — *On considère un plan horizontal,* (H), *et un point lumineux,* O, *dans ce plan. Au-dessus de* (H) *s'étend un milieu réfringent dont l'indice de réfraction est fonction de la distance y au plan* (H).

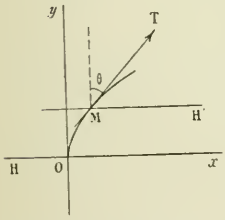
1° *Former l'équation différentielle de la trajectoire d'un rayon lumineux quelconque, émané de* O.

2° *Intégrer cette équation dans les deux cas suivants :*

$$n = \frac{2ab}{y+b}, \quad \textit{l'incidence initiale étant } \frac{\pi}{6}; \qquad n = a\sqrt{\frac{2b}{y+b}}, \quad \textit{l'incidence initiale étant } \frac{\pi}{4}.$$

Dans les deux cas, a et b désignent des constantes positives données.

1° Prenons pour axes de coordonnées deux axes rectangulaires passant en O ; l'un, horizontal, Ox ; l'autre, vertical, Oy, et tel que le rayon initial soit dans le plan xOy, entre les demi-axes positifs. La trajectoire du rayon lumineux sera évidemment située dans ce plan.



Cela posé, soient M un point de la trajectoire, MT le rayon lumineux en ce point et n l'indice de réfraction de la couche horizontale H', infiniment mince, qui passe en M.

Si nous appelons θ l'angle de la tangente MT à la trajectoire avec la verticale ascendante, la loi de la réfraction nous donne

$$(1) \qquad n \sin\theta = C^{te},$$

la valeur de la constante étant fournie par l'incidence et l'indice initiaux. Dans les deux cas signalés, cette constante C est égale à a.

D'autre part, nous avons $\cot\theta = y' = \dfrac{dy}{dx}$; donc

$$\frac{\sin\theta}{dx} = \frac{\cos\theta}{dy} = \frac{1}{\sqrt{dx^2+dy^2}}.$$

L'équation (1) nous donne alors

$$\frac{n\,dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = a, \qquad \text{ou} \qquad dx = \frac{a\,dy}{\sqrt{n^2-a^2}}.$$

Telle est l'équation différentielle de la trajectoire ; elle s'intègre par une simple quadrature, puisque n est une fonction de y.

2° *Premier cas.* — Supposons $n = \frac{2ab}{y+b}$; nous aurons alors $dx = \frac{(y+b)dy}{\sqrt{4b^2-(y+b)^2}}$;

et le second membre s'intègre immédiatement : nous obtenons successivement

$$x - x_0 = -\sqrt{4b^2-(y+b)^2}, \qquad \text{et} \qquad (x-x_0)^2+(y+b)^2-4b^2 = 0.$$

La trajectoire du rayon lumineux est un cercle. D'autre part, ce cercle passe à l'origine des coordonnées et l'arc situé au-dessus de Ox doit s'étendre vers les x positifs ; donc la constante x_0 est positive et égale à $b\sqrt{3}$.

La trajectoire est donc finalement l'arc du cercle $(x-b\sqrt{3})^2+(y+b)^2-4b^2 = 0$, qui est situé au-dessus de Ox.

Deuxième cas. — Prenons $n = a\sqrt{\frac{2b}{y+b}}$; l'équation différentielle deviendra $dx = \sqrt{\frac{b+y}{b-y}}\,dy$, et, dans cette équation, comme dans la précédente, il faudra prendre le signe $+$, puisque nous avons choisi les axes de façon que le coefficient angulaire du rayon initial soit positif.

Posons alors $y = b\cos\varphi$; nous aurons

$$dy = -b\sin\varphi\,d\varphi \qquad \text{et} \qquad dx = -b\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}}\sin\varphi\,d\varphi\,;$$

puis,

$$dx = -2b\cos^2\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = -b(1+\cos\varphi)d\varphi.$$

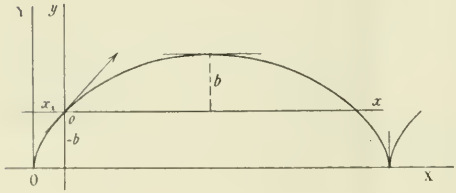
L'intégration est immédiate et nous donne $x - x_0 = -b(\varphi+\sin\varphi)$.

Les équations de la trajectoire sont donc

$$x = x_0 - b(\varphi+\sin\varphi), \quad y = b\cos\varphi,$$

la constante x_0 devant être déterminée de façon que cette courbe passe au point O ; or, pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, y est nul ; si nous exprimons que x est nul aussi, nous obtenons $x_0 = b\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$; les équations de la trajectoire sont finalement

$$x = b\left(\frac{\pi}{2}+1-\varphi-\sin\varphi\right), \qquad y = b\cos\varphi\,;$$



elles nous montrent de suite que cette courbe est une cycloïde.

Mais pour que y croisse à partir de $\varphi = \frac{\pi}{2}$, comme cela doit être évidemment d'après la marche du rayon initial, il faut faire décroître φ ; il vaut donc mieux changer φ en $\pi-\varphi$, afin de faire varier φ dans le sens habituel. Les équations de la courbe deviennent alors

$$x = b\left(1-\frac{\pi}{2}+\varphi-\sin\varphi\right), \qquad y = -b\cos\varphi,$$

et il suffit de porter les axes parallèlement à eux-mêmes au point $x_1 = b\left(1-\frac{\pi}{2}\right)$, $y_1 = -b$, pour

obtenir les équations ordinaires de la cycloïde :

$$X = b(\varphi - \sin\varphi), \qquad Y = b(1 - \cos\varphi).$$

A. DUCOS, lycée Carnot.

Assez bonnes solutions : MM. Yernaux, à Mons ; M. Laurence ; Le Blanc, collège Chaptal.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1483. — *On considère deux cercles fixes* (C) *et* (C′) ; *par un point* A *du cercle* (C), *on mène une tangente à ce cercle qui rencontre le cercle* (C′) *en deux points* B *et* C *et par chacun des points* B *et* C *on mène la seconde tangente au cercle* (C). *Trouver le lieu du point de rencontre* M *de ces deux droites.*

Prenons pour axe des x la ligne des centres des deux cercles (C) et (C′) et pour axe des y un diamètre perpendiculaire dans le cercle (C).

L'équation du cercle (C) est alors

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0,$$

et celle du cercle (C′),

$$(x - a)^2 + y^2 - R'^2 = 0.$$

Les coordonnées d'un point P du cercle (C) peuvent se mettre sous la forme

$$x = R\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \qquad y = R\frac{2t}{1 + t^2},$$

et celles d'un point P′ de (C′), sous la forme

$$x - a = R'\frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2}, \qquad y = R'\frac{2\lambda}{1 + \lambda^2}.$$

Cela posé, désignons par t le paramètre du point A, par λ celui de l'un des deux points B ou C ; nous aurons la relation qui existe entre t et λ, en formant la tangente en A,

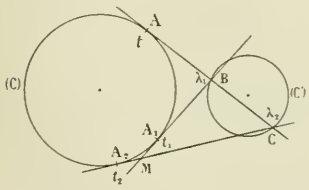
$$Xx + Yy - R^2 = 0, \qquad \text{ou} \qquad (1 - t^2)x + 2ty - R(1 + t^2) = 0,$$

et exprimant qu'elle passe au point B ; ce calcul nous donne

$$(1 - t^2)[a(1 + \lambda^2) + R'(1 - \lambda^2)] + 4R't\lambda - R(1 + t^2)(1 + \lambda^2) = 0.$$

Il est facile alors de comprendre la solution du problème et d'effectuer les calculs : nous appellerons λ_1 et λ_2 les paramètres des points B et C ; pour $\lambda = \lambda_1$, l'équation en t aura deux racines, les paramètres t et t_1 des points de contact des deux tangentes au cercle (C) issues de B ; de même, pour $\lambda = \lambda_2$, l'équation en t aura deux racines, t et t_2, paramètres des points de contact des deux tangentes issues de C. Nous formerons alors l'équation du second degré qui admet pour racines t_1 et t_2 ; nous identifierons celle que fournit la polaire du point courant du lieu M, et nous aurons ainsi le lieu de ce point.

Nous avons tout d'abord



$$t + t_1 = \frac{4R'\lambda_1}{(a + R)(1 + \lambda_1^2) + R'(1 - \lambda_1^2)},$$

et

$$t + t_2 = \frac{4R'\lambda_2}{(a + R)(1 + \lambda_2^2) + R'(1 - \lambda_2^2)};$$

il est facile d'en déduire $t_1 + t_2$ et $t_1 t_2$. Nous ferons le calcul ainsi : nous poserons

$$\mu = \frac{4R\lambda}{(a + R)(1 + \lambda^2) + R'(1 - \lambda^2)}$$

et nous formerons l'équation qui donne μ en éliminant λ entre l'équation qui donne λ en fonction de t et celle-ci. Le calcul se fait aisément comme il suit : remplaçons d'abord le dénominateur par $\frac{4R\lambda}{\mu}$ dans la première équation, puis écrivons les deux équations de la façon suivante :

$$(a+R)(1+\lambda^2)+R'(1-\lambda^2)=\frac{4R\lambda}{\mu},$$

$$(a-R)(1+\lambda^2)+R'(1-\lambda^2)=\frac{4R\lambda}{\mu}(t^2-t\mu);$$

remarquons ensuite que l'on peut poser

$$\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}=\cos\varphi,\qquad \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}=\sin\varphi,$$

puis divisons membre à membre et retranchons ; nous aurons les deux nouvelles relations

$$\frac{a+R+R'\cos\varphi}{a-R+R'\cos\varphi}=\frac{1}{t^2-t\mu},\qquad R\mu=R'\sin\varphi(1-t^2+t\mu).$$

Il n'y a plus qu'à calculer $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, élever au carré et ajouter, pour avoir l'équation en μ :

$$R'^2(t^2-t\mu-1)^2=R^2\mu^2+[(a+R)(t^2-t\mu)-a+R]^2.$$

Cette équation nous donne immédiatement $\mu_1+\mu_2$ et $\mu_1\mu_2$, et, par suite, t_1+t_2 et t_1t_2 :

$$\mu_1+\mu_2=\frac{2t(a+R)[(a+R)t^2-a+R]-2tR'^2(t^2-1)}{R^2+(a+R)^2t^2-R'^2t^2},$$

$$\mu_1\mu_2=\frac{-R'^2(t^2-1)^2+[(a+R)t^2-a+R]^2}{R^2+(a+R)^2t^2-R'^2t^2},$$

puis $\quad 2t+t_1+t_2=\mu_1+\mu_2,\quad$ d'où $\quad t_1+t_2=\dfrac{2t(R'^2-a^2)}{R^2+(a+R)^2t^2-R'^2t^2}$;

ensuite $\quad t^2+t(t_1+t_2)+t_1t_2=\mu_1\mu_2,\quad$ et, par conséquent, $\quad t_1t_2=\dfrac{(a-R)^2-R'^2+R^2t^2}{R^2+(a+R)^2t^2-R'^2t^2}$.

Appelons maintenant α, β les coordonnées du point M, et cherchons les t des points de rencontre de la polaire de ce point avec le cercle (C) ; nous aurons l'équation du second degré

$$(\alpha+R)t^2-2\beta t-\alpha+R=0,$$

qui nous donne aussi t_1+t_2 et t_1t_2.

En comparant les valeurs nouvelles aux précédentes, nous avons

$$\frac{\alpha-R}{\alpha+R}=\frac{R'^2-(a-R)^2-R^2t^2}{R^2+(a+R)^2t^2-R'^2t^2},\qquad \frac{\beta}{\alpha+R}=\frac{(R'^2-a^2)t}{R^2+(a+R)^2t^2-R'^2t^2},$$

la première donne

$$\alpha=R\frac{(a^2+2aR-R'^2)t^2+R'^2-a^2+2aR}{[(a+R)^2+R^2-R'^2]t^2+R^2-R'^2+(a-R)^2},$$

et l'on trouve ensuite aisément

$$\beta=R\frac{2(R'^2-a^2)t}{[(a+R)^2+R^2-R'^2]t^2+R^2-R'^2+(a-R)^2}.$$

Ces deux équations nous fournissent les coordonnées du point M en fonction d'un paramètre, et nous montrent que le lieu de ce point est une conique ayant Ox pour axe de symétrie.

Deuxième solution. — Nos lecteurs habituels auront déjà remarqué que ce problème présente de réelles difficultés et dépasse notablement le niveau auquel nous essayons de maintenir les questions proposées dans la deuxième partie. C'est par erreur que celle-ci y a été placée. Mais, en raison même de la difficulté qu'elle présente, il nous paraît utile d'en donner une autre solution qui ne pourra manquer, comme la précédente, d'intéresser les lecteurs de la première partie.

Nous garderons les mêmes axes que précédemment et nous désignerons par $R\cos\varphi$, $R\sin\varphi$ les coordonnées

du point A ; nous formerons l'équation tangentielle du couple de points B et C et nous écrirons qu'elle est une combinaison linéaire de l'équation tangentielle du cercle (C) et de celle du couple de points A et M.

Pour avoir l'équation tangentielle du couple B, C, nous prendrons la tangente en A,

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - R = 0,$$

son point de rencontre avec la droite courante du plan, $ux + vy + w = 0$, et, par ce point, nous mènerons des tangentes au cercle (C') ; il nous suffira d'écrire qu'elles sont confondues pour obtenir la condition pour que la droite $ux + vy + w = 0$ passe, soit au point B, soit au point C.

Mettons la droite passant au point de rencontre des deux autres sous la forme

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - R + \lambda(ux + vy + w) = 0,$$

et exprimons qu'elle touche le cercle (C') ; nous aurons

$$R'^2[(\cos\varphi + \lambda u)^2 + (\sin\varphi + \lambda v)^2] - [a(\cos\varphi + \lambda u) - R + \lambda w]^2 = 0,$$

ou

$$\lambda^2[R'^2(u^2 + v^2) - (au + w)^2] + 2\lambda[R'^2(u\cos\varphi + v\sin\varphi) - (a\cos\varphi - R)(au + w)] + R'^2 - (a\cos\varphi - R)^2 = 0.$$

Cette équation doit avoir une racine double, ce qui nous donne, toutes réductions faites,

$$[R'^2 - (a\cos\varphi - R)^2](u\sin\varphi - v\cos\varphi)^2 - [(a\cos\varphi - R)(u\cos\varphi + v\sin\varphi) - au - w]^2 = 0.$$

Telle est l'équation tangentielle du couple de points B et C.

Si maintenant nous appelons α, β, γ les coordonnées homogènes du point M, une conique quelconque du faisceau déterminé par le couple A, M et le cercle (C) aura pour équation

$$(\alpha u + \beta v + \gamma w)[Ru\cos\varphi + Rv\sin\varphi + w] + \lambda[R^2(u^2 + v^2) - w^2] = 0,$$

et l'on devra pouvoir identifier cette équation avec la précédente. Ce calcul, appliqué aux termes en u^2, v^2, w^2 et uv, donne

$$R\alpha\cos\varphi + \lambda R^2 = \sin^2\varphi[R'^2 - (a\cos\varphi - R)^2] - [a - \cos\varphi(a\cos\varphi - R)]^2,$$
$$R\beta\sin\varphi + \lambda R^2 = \cos^2\varphi[R'^2 - (a\cos\varphi - R)^2] - \sin^2\varphi(a\cos\varphi - R)^2,$$
$$\gamma - \lambda = -1,$$
$$R(\beta\cos\varphi + \alpha\sin\varphi) = -2\sin\varphi\cos\varphi[R'^2 - (a\cos\varphi - R)^2] + 2\sin\varphi(a\cos\varphi - R)[a - \cos\varphi(a\cos\varphi - R)].$$

Multiplions la première par $\sin^2\varphi$, la seconde par $\cos^2\varphi$, la quatrième par $-\sin\varphi\cos\varphi$, et ajoutons ; nous obtenons ainsi la valeur de λ :

$$\lambda R^2 = R'^2 - a^2\sin^2\varphi - (a\cos\varphi - R)^2,$$

et nous n'avons plus qu'à remplacer λ par cette valeur pour avoir α, β, γ :

$$R\alpha = 2a(\cos\varphi - R) - (a^2 + R'^2)\cos\varphi,$$
$$R\beta = (a^2 - R'^2)\sin\varphi,$$
$$R^2\gamma = R'^2 - R^2 - a^2\sin^2\varphi - (a\cos\varphi - R)^2.$$

Cela fait, on voit qu'il suffit de diviser les deux premières par la dernière pour avoir les coordonnées d'un point du lieu en fonction de φ :

$$\frac{x}{R} = \frac{(a^2 - R'^2)\cos\varphi - 2aR}{R'^2 - 2R^2 - a^2 + 2aR\cos\varphi}, \qquad \frac{y}{R} = \frac{(a^2 - R'^2)\sin\varphi}{R'^2 - 2R^2 - a^2 + 2aR\cos\varphi}.$$

On vérifie immédiatement l'identité de ces deux formules et de celles que la première méthode nous a fournies.

Nous ne nous arrêterons pas à discuter le genre de la conique ainsi trouvée : rien n'est plus facile.

MÉCANIQUE

1490. — *On considère un cercle fixe et un cercle de même rayon qui roule sans glissement sur celui-ci de telle sorte que la vitesse angulaire du rayon de contact dans le cercle fixe soit égale à* 1.

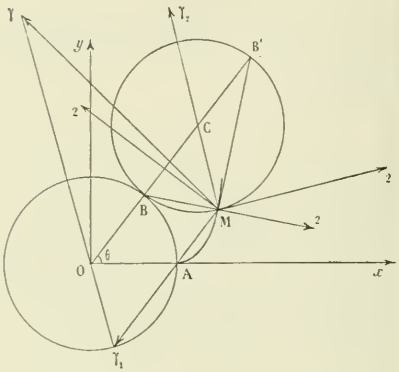
1° *Trouver les équations du mouvement d'un point de la circonférence mobile invariablement lié à cette circonférence ; la vitesse, l'accélération du mobile ainsi que la composante normale de l'accélération.*

2° *Construire l'hodographe du mouvement. Calculer l'arc de la trajectoire, sa longueur totale, et l'aire comprise entre cette courbe et le cercle fixe.*

3° *Trouver le rayon de courbure et la développée de cette trajectoire.*

1. Prenons pour axe des x le rayon du cercle fixe qui va au point A, position initiale du point

mobile M, et pour axe des y le rayon perpendiculaire orienté dans le sens $+\frac{\pi}{2}$, le sens du mouvement étant d'ailleurs choisi comme sens positif.



Si nous appelons θ l'angle du rayon de contact OB avec OA, nous avons par hypothèse $\frac{d\theta}{dt} = 1$, et, par suite, $\theta = t$. Prenons alors le rayon commun pour unité, nous voyons que le vecteur OM est la somme géométrique du vecteur $OC = 2$ porté par l'axe qui fait l'angle t avec Ox, et du vecteur $CM = -1$ porté par l'axe qui fait l'angle $2t$ avec Ox. Les coordonnées du point M sont les projections du contour OCM sur les axes ; ce sont donc

$$(1) \qquad \begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t, \\ y = 2\sin t - \sin 2t. \end{cases}$$

Telles sont les équations du mouvement du point M.

Les composantes de la vitesse sont données par

$$(2) \qquad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2\sin t + 2\sin 2t, \\ \frac{dy}{dt} = 2\cos t - 2\cos 2t\,; \end{cases}$$

elle se présente donc comme étant la somme géométrique de deux vecteurs égaux à 2 et -2 et portés respectivement par les directions $t + \frac{\pi}{2}$ et $2t + \frac{\pi}{2}$, le premier est perpendiculaire à OC et le second est tangent au cercle mobile en M. Il résulte donc de là cette propriété bien connue que la droite de support de la vitesse, c'est-à-dire la tangente à la trajectoire en M passe au point B', et, par suite, la normale passe au point B.

La grandeur de la vitesse est fournie par

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2, \qquad \text{d'ou} \qquad v^2 = 8(1 - \cos t) = 16\sin^2\frac{t}{2},$$

$$(3) \qquad v = 4\sin\frac{t}{2}.$$

On en déduit de suite l'expression de l'arc,

$$s = 4\int_0^t \sin\frac{t}{2}\,dt, \qquad \text{ou} \qquad s = 8\left(1 - \cos\frac{t}{2}\right) = 16\sin^2\frac{t}{4},$$

en prenant pour origine le point A.

Quant à l'accélération, elle a pour composantes

$$(4) \qquad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -2\cos t + 4\cos 2t, \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -2\sin t + 4\sin 2t\,; \end{cases}$$

elle est donc la somme de deux vecteurs γ_1 et γ_2, respectivement égaux à -2 et à $+4$, et portés par les axes orientés dans les directions t et $2t$; il est facile d'en déduire la somme géométrique, c'est-à-dire

le vecteur $M\gamma$. On trouve ainsi

$$\gamma^2 = 20 - 16\cos t.$$

D'autre part, l'accélération tangentielle γ_t est égale à $\frac{dv}{dt}$, c'est-à-dire à $2\cos\frac{t}{2}$; donc

$$\gamma_n^2 = \gamma^2 - \gamma_t^2 = 20 - 16\cos t - 4\cos^2\frac{t}{2}, \qquad \gamma_n^2 = 16(1-\cos t) + 4\sin^2\frac{t}{2} = 36\sin^2\frac{t}{2},$$

et, par suite,

$$\gamma_n = 6\sin\frac{t}{2}.$$

On peut d'ailleurs arriver autrement à cette égalité en projetant les deux vecteurs γ_1 et γ_2 sur l'axe MB, et ajoutant les résultats : on retrouve de suite

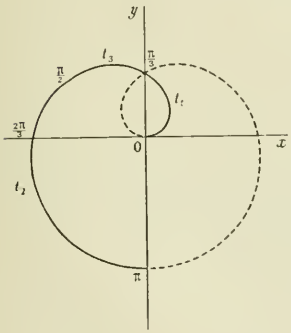
$$(5) \qquad \gamma_n = (2+4)\sin\frac{t}{2} = 6\sin\frac{t}{2}.$$

2. L'hodographe a pour équations paramétriques

$$x = 4\sin\frac{t}{2}\cos\frac{3t}{2}, \qquad y = 4\sin\frac{t}{2}\sin\frac{3t}{2},$$

et il suffit, d'après les formes (2) qui sont équivalentes à celles-ci, de faire varier t dans un intervalle d'étendue 2π. Or si on change t en $-t$, y ne change pas, x ne fait que changer de signe ; il y a donc symétrie par rapport à Oy et il suffit de faire varier t de 0 à π.

Pour $t = 0$, x et y sont nuls, $\frac{y}{x}$ est nul aussi ; la courbe part du point O tangentiellement à Ox. Puis, x et y deviennent positifs. Ensuite x s'annule pour $t = \frac{\pi}{3}$ et y prend la valeur 2. A partir de ce moment, x reste négatif et y reste positif jusqu'à $t = \frac{2\pi}{3}$, valeur pour laquelle il devient nul et x égal à $-2\sqrt{3}$. Enfin, pour $t = \pi$, x redevient nul et y égal à -4.



Il est facile de compléter ces résultats par l'étude des dérivées de x et de y, qui sont ici données par les formules (4), et qui sont

$$x' = 2(2\cos 2t - \cos t), \qquad y' = 2(2\sin 2t - \sin t);$$

la première s'annule pour les valeurs de $\cos t$ qui vérifient l'équation $4\cos^2 t - \cos t - 2 = 0$; l'une d'elles

$$\cos t = \frac{1+\sqrt{33}}{8},$$

est plus grande que $\frac{1}{2}$ et correspond à une valeur de t, t_1, comprise entre 0 et $\frac{\pi}{3}$; l'autre, $\cos t_2$, est négative et plus grande en valeur absolue que $\frac{1}{2}$, l'arc t_2 vient donc après $\frac{2\pi}{3}$.

La deuxième dérivée s'écrit $2\sin t(4\cos t - 1)$; elle s'annule pour $t = 0$ et $t = \pi$ et pour une valeur t_3 comprise entre $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$.

La courbe affecte finalement la forme d'un limaçon de Pascal ayant un point double sur Oy. Il est facile de vérifier ce fait en portant les axes parallèlement à eux-mêmes en ce point $(x = 0, \quad y = 2)$.

On trouve ainsi

$$x_1 = 2\sin t(2\cos t - 1), \qquad y_1 = 2\cos t(1 - 2\cos t),$$

puis
$$\frac{\sin t}{x_1} = \frac{\cos t}{-y_1} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}};$$
en portant ces valeurs dans
$$x_1 \sin t - y_1 \cos t = 2(2\cos t - 1),$$
on trouve
$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \frac{-4y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} - 2, \qquad \text{et finalement} \qquad (x_1^2 + y_1^2 + 4y_1)^2 = 4(x_1^2 + y_1^2).$$

En passant aux coordonnées polaires, on trouve $\rho = -4\sin\omega \pm 2$, ce qui est l'équation la plus réduite du limaçon de Pascal.

Nous avons trouvé $s = 16\sin^2\frac{t}{4}$; il en résulte que la longueur totale de la trajectoire est égale à 16, valeur qu'on obtient pour $t = 2\pi$.

La différentielle de l'aire balayée par le vecteur OM est $\frac{xy' - yx'}{2}dt = dA$.

On a donc
$$dA = (2\cos t - \cos 2t)(\cos t - \cos 2t) + (2\sin t - \sin 2t)(\sin t - \sin 2t),$$
$$dA = 3(1 - \cos t) \qquad \text{et} \qquad A = 3t - 3\sin t + C^{te}.$$

Si on prend cette intégrale de 0 à 2π, on trouve $A = 6\pi$, et, par suite, l'aire de la couronne est égale à 5π.

3° L'expression de l'accélération normale est $\frac{v^2}{\rho}$; nous avons donc, dans le cas actuel,
$$\frac{v^2}{\rho} = 6\sin\frac{t}{2} = \frac{16\sin^2\frac{t}{2}}{\rho};$$
le rayon de courbure a donc pour valeur
$$\rho = \frac{8}{3}\sin\frac{t}{2}.$$

Il faut le porter, à partir du point M, dans la direction MB, c'est-à-dire dans la direction $2t + \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$ ou $\frac{\pi}{2} + \frac{3t}{2}$; par conséquent les coordonnées du centre de courbure sont
$$X = 2\cos t - \cos 2t + \frac{8}{3}\sin\frac{t}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3t}{2}\right),$$
$$Y = 2\sin t - \sin 2t + \frac{8}{3}\sin\frac{t}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3t}{2}\right),$$
ou
$$X = 2\cos t - \cos 2t - \frac{8}{3}\sin\frac{t}{2}\sin\frac{3t}{2},$$
$$Y = 2\sin t - \sin 2t - \frac{8}{3}\sin\frac{t}{2}\cos\frac{3t}{2};$$
toutes réductions faites, on trouve
$$3X = 2\cos t + \cos 2t, \qquad 3Y = 2\sin t + \sin 2t.$$

Telles sont les équations paramétriques de la développée. C'est une autre cardioïde engendrée par un cercle de rayon $\frac{1}{3}$ qui roule extérieurement sans glisser sur un cercle de rayon $\frac{1}{3}$ ayant l'origine

pour centre; le point de rebroussement est ici à gauche du point O et a pour abscisse $-\frac{1}{3}$; le sommet a pour abscisse 1 et coïncide avec le point A.

Bien des parties de ce problème peuvent se traiter géométriquement par la composition des mouvements; il suffit de regarder le cercle (C) comme emporté tout entier dans un mouvement de translation circulaire autour du point O, le point C décrivant un cercle de centre O avec une vitesse égale à 2; et, pendant que ce mouvement s'effectue, le point M tourne sur le cercle (C) avec une vitesse angulaire égale à 2. Il en résulte de suite que la vitesse absolue du point M est la somme des deux vecteurs égaux à 2 que nous avons trouvés antérieurement. Quant à l'accélération elle est aussi la somme géométrique de l'accélération d'entraînement, et de l'accélération sur le cercle (C). Cette remarque donne donc tout ce qui est relatif à la vitesse et à l'accélération dans la question actuelle.

G. BRESSE et R. BATIFOULIER.

Bonnes solutions de M. Brizard, par les coordonnées polaires, et de M. Foucay, à Roanne.
Assez bonne solution de M. Amblard, Conducteur des Ponts et Chaussées, à Ruines.

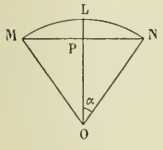
CONCOURS DE 1906 (*Suite.*)

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES (*Cours préparatoires.*)

Algèbre.

I. — **1537.** On donne en axes rectangulaires l'équation d'une surface

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{4c^2-m^2z^2}=1, \qquad m \leqslant 1.$$

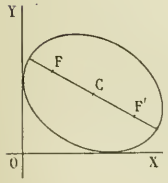


Quel est le volume compris à l'intérieur de cette surface entre les deux plans $z=0$, $z=c$. Cas où $m=0$. Ce volume sera évalué comme somme des volumes infiniment petits compris entre deux plans infiniment voisins parallèles à xOy.

II. — **1538.** On donne un arc de cercle MLN, de longueur l fixe, pris dans un cercle de rayon $OM = x$ et de centre O.

Etudier la variation de la surface du triangle OMN quand x varie.

Représentation graphique de la variation.

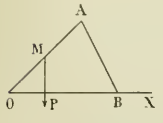


Géométrie analytique.

1539. — Une ellipse de forme et de grandeur données dont on désignera par a et b les demi-axes se déplace dans son plan en restant tangente à deux droites rectangulaires OX et OY.

On demande les lieux décrits par son centre et par ses foyers. Examiner le cas particulier où l'ellipse se transforme en parabole.

Mécanique.



1540. — Un système formé par deux tiges articulées homogènes OA et AB de longueurs l et l' et de poids ϖ et ϖ' est mobile dans un plan vertical autour de son extrémité O qui est fixe. L'extrémité B de la seconde tige peut glisser avec frottement sur la droite horizontale OX. Une surcharge P étant fixée en un point M de la tige OA, on demande quelles sont les positions du point M qui sont compatibles avec l'équilibre du système.

Calcul numérique.

I. — Dans un triangle dont les trois côtés sont égaux à 32^m, 41^m et 53^m ; calculer la surface et le rayon du cercle inscrit.

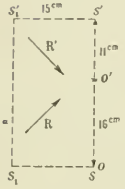
II. — Trouver approximativement la racine différente de zéro de l'équation

$$2x - \operatorname{tg} x = 0$$

comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, en s'aidant de la table de logarithmes et des méthodes d'approximation connues.

Épure de Géométrie descriptive.

1541. — Étant donnés les points (s, s'), (s_1, s_1') et (o, o') définis par le croquis ci-joint sur lequel la figure $ss's_1s_1$ est un rectangle), on demande de représenter la partie du solide commun aux deux cônes de sommets (s, s') et (s_1, s_1') circonscrits à la sphère de centre (o, o') et de rayon égal à 4^{cm}, qui est limitée inférieurement au plan tangent horizontal inférieur à cette sphère.



On construira, en outre, l'ombre propre de ce solide supposé opaque et éclairé par des rayons parallèles à (R, R') dont les projections sont à 45° sur la direction des lignes de rappel.

Nota. — Le contour apparent et les arêtes du solide conservé seront dessinés en noir (avec les parties cachées en pointillé), la séparatrice de l'ombre en bleu (avec aussi les parties cachées en pointillé) ; tout le reste en rouge. On couvrira d'une teinte légère ou de hachures les parties vues dans l'ombre.

QUESTIONS PROPOSÉES

1542. — Déterminer sur une parabole de sommet S et de foyer F un point M tel que l'arc de courbe SM soit dans un rapport donné k avec le rayon vecteur FM. Discuter suivant les valeurs de k.

CH. MICHEL.

1543. — Une droite D se déplace dans un plan donné de façon que ses distances α et β à deux points A et B du plan soient liées par une relation de la forme

$$M\alpha^2 + 2N\alpha\beta + P\beta^2 = k,$$

k désignant une constante.

Trouver l'enveloppe de la droite D, ainsi que la condition pour que l'un des deux points A ou B soit un foyer de l'enveloppe.

V. H.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

TABLE DES MATIÈRES

ANNÉES 1904-1905 ET 1905-1906

Numéros des questions — ALGÈBRE ET ANALYSE — Pages

1344 Etudier la série $u_n = \frac{x^{n-1}}{nx^n + \mathrm{L}n}$. 263

1345 On considère l'identité
$$(a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots)(b_0x^p + b_1x^{p-1} + \dots) \equiv c_0x^{m+p} + c_1x^{m+p-1} + \dots;$$
on se donne les coefficients $c_0, c_1, \cdots c_{m+p}$; calculer les produits a_2b_5. 264

1396 Etablir l'identité
$$e^x = \frac{\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{1}\cdot\frac{x}{x+\gamma} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{x^2}{2x+\gamma} + \frac{1}{3!}\cdot\frac{x^3}{3x+\gamma} + \cdots}{\frac{1}{\gamma} - \frac{x\gamma}{\gamma(x+\gamma)} + \frac{x^2\gamma^2}{\gamma(x+\gamma)(2x+\gamma)} + \cdots}.$$ 423

1428 Démontrer que la quantité
$$\log(x+2) - 2\log(x+1) + 2\log x - 1 - \log x - 2$$
est égale à la somme de la série
$$2\mathrm{M}\left(y + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5 + \cdots\right),$$
M étant le module et y étant égal à $\frac{2}{x^3 - 3x}$. 518

1429 Démontrer que l'expression
$$\log(x+5) - \log(x+4) - \log(x+3) + 2\log x - \log(x-3) - \log(x-4) + \log(x-5)$$
est égale à $-2\mathrm{M}\left(y + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5 + \cdots\right)$ où
$$y = \frac{72}{x^4 - 25x^2 + 72}.$$ 519

1470 Montrer que la dérivée m^e de $\frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}}$, est de la forme $\frac{\mathrm{R}_m(x)}{1 - 2xz + z^2)^{m-\frac{1}{2}}}$, $\mathrm{R}_m(x)$ étant un polynome de degré m qui a toutes ses racines réelles 587

1444 Trouver une courbe telle que la tangente en un point M rencontre Ox en un point T, équidistant de M et d'un point fixe A de Oy 576

1454 Trouver une courbe telle que la tangente et la normale déterminent sur Ox un segment de valeur constante. 577

1468 Etude des équations
$$e^{2x} = \frac{k+x}{k-x}, \quad e^{2x} = \frac{k-a+x}{k+a-x}$$ . . . 600

1482 Équation différentielle de la trajectoire d'un rayon lumineux qui traverse un milieu réfringent dont l'indice de réfraction est fonction de la distance à un plan 607

1360 Déterminer un polynome du cinquième degré $f(x)$ tel que
$$5f(x) \equiv (x-1)f'(x) + x^3 - 2x + 3$$
et qui soit nul pour $x = 2$. 297

1354 Déterminer un polynome du troisième degré qui passe par un minimum pour $x = 1$ et par un maximum pour $x = 2$ 290

1442 $f(x)$ étant un polynome donné du 3e degré, déterminer un polynome du 2e degré, tel que les racines x' et x'' de ce polynome vérifient les équations $f(x') = x'$, $f(x'') = x''$. 539

1370 Soient A, B, C les points de Ox qui ont pour abscisses les racines de $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

Numéros des questions — Pages

1368 Soit P_n le polynome que l'on trouve dans la dérivée n^e de e^{-x^2}; montrer que l'équation
$$P_n - nP_{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}P_{n-2} - \cdots = 0$$ a ses racines réelles 298

1361 Exercice sur une fraction rationnelle dont le dénominateur est $x^3 - 1$ 312

1375 Sur l'erreur commise dans la méthode de Newton. 339

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A DEUX DIMENSIONS

1269, 1270 Démontrer que trois points sont en ligne droite 28

1333 Par les sommets d'un triangle, pris deux à deux, on fait passer trois cercles qui se coupent au même point O. Points en ligne droite et droites concourantes. 204

1340 Un rectangle ABCD a une diagonale fixe AC, tandis que l'autre BD tourne autour de son milieu O. Lieux des orthocentres des triangles AOB, BOC, COD, DOA 272

1343 Par un point K quelconque d'une droite fixe Δ, on mène une corde PQ (dans un cercle fixe de centre O) perpendiculaire à KO. Lieu du point M tel que O soit le point de Lemoine du triangle MPQ 272

1349 Lieu des centres de similitude d'un cercle fixe O' et d'un cercle variable ayant pour diamètre un rayon d'un cercle fixe O 276

1348 Lieux et enveloppe relatifs à des cercles et des droites. 299

1373 Lieux relatifs à deux cercles 335

1399 Lieu du point de contact de deux cercles variables tangents entre eux et tangents à un cercle fixe en deux points fixes 460

1378 Exercices sur des cercles orthogonaux 357

1359 Le sommet A d'un angle variable décrit une droite D; ses deux côtés AB et AC passent par deux points fixes B et C. Soit M le point de rencontre des perpendiculaires en B et C à AB et AC. Lieu de M et enveloppe de AM. 301

1288 Construction de la courbe $x = \cos^3\varphi + \cos\varphi$, $y = \sin^3\varphi + \sin\varphi$ 130

1290, 1291 Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements. 35, 36

1294 Exercices relatifs à la courbe $y^2 = \frac{x^3}{x-a}$ . . 134

1338 Lieux relatifs à la strophoïde
$$(x^2 + y^2)(y - mx) - a(x^2 - y^2) = 0$$ . . . 249

1167 Exercices relatifs à deux cercles 588

1483 Par un point A d'un cercle (C) on mène une tangente à ce cercle qui rencontre un deuxième cercle (C') aux points B et C, et par chacun de ces deux points on mène la deuxième tangente au cercle (C). Lieu du point de rencontre . . 609

1259 Enveloppe et lieu relatifs à des coniques conjuguées à un triangle ABC et ayant leurs centres sur une droite passant par le point A. . . . 7

1275 Lorsqu'un triangle est inscrit dans une parabole, l'axe de cette conique est une droite de Simson du triangle ayant pour sommets les milieux des côtés du précédent. 26

1279 Lieu des centres de similitude d'un cercle fixe et d'un cercle variable passant par le foyer d'une parabole et ayant son centre sur cette courbe. 31

1296 Exercices relatifs à des coniques ayant un foyer

Numéros des questions — Pages.

1280 Exercices sur les diamètres conjugués d'une ellipse. 77
1281 Propriété du point de Frégier. 79
1302 Exercices relatifs à deux coniques telles que l'on puisse inscrire dans l'une un triangle circonscrit à l'autre 92
1307 Cercle tangent à deux axes rectangulaires. Une tangente variable rencontre les axes en A et B. On considère la parabole tangente aux axes et à AB en son milieu. Lieu du foyer. Lieu de l'ombilic commun à la parabole et au cercle . . . 119
1308 Enveloppe des cercles ayant pour diamètres les cordes d'une ellipse qui passent par un point fixe. 123
1289 Quand une corde d'une conique tourne autour d'un point fixe, la somme algébrique des inverses des distances de ses extrémités à la polaire du point fixe est constante 132
1293 Lieu des foyers des paraboles qui ont un sommet donné et qui passent par un point donné. . . 133
1301, 1305 Exercices relatifs à l'ellipse . . . 152, 154
1317 Exercices relatifs aux cercles bitangents à une conique 168
1306-1319 Problèmes sur une ellipse. 180, 181
1325 Propriétés des cercles osculateurs à une ellipse tels que la corde commune à chacun d'eux et à l'ellipse passe par un point donné 192
1320 Cercle rencontrant une ellipse en deux points fixes et en deux points variables M et N. Lieux des points de rencontre de la droite MN avec la polaire du centre de l'ellipse par rapport au cercle, avec la polaire du centre du cercle par rapport à l'ellipse, avec la droite qui joint les centres du cercle et de l'ellipse, etc. 202
1334 Triangles ABC inscrits dans une ellipse et dont les hauteurs sont normales à l'ellipse en des points autres que A, B, C. Propriétés et exercices . . 217
1335 Par les pieds des quatre normales menées d'un point M à une ellipse passent deux paraboles. Si le point M décrit une courbe quelconque, les axes des deux paraboles se déplacent parallèlement à eux-mêmes et leur point d'intersection décrit une courbe de même degré 238
1342 Les côtés d'un angle droit de sommet fixe O rencontrent une conique C en quatre points par lesquels on fait passer une conique S semblable à une conique donnée. Enveloppe de S, lieu de son centre et de ses foyers 239
1347 Lieu des foyers des hyperboles équilatères passant par deux points symétriques par rapport à l'origine et dont l'axe réel est parallèle à Ox. . . 252
1341 Lieu des sommets des angles de grandeur constante dont les côtés sont normaux à une parabole 265
1355 Enveloppe des coniques qui passent par trois points fixes et qui sont semblables à une conique donnée. 291
1346 Dans quelles conditions le quadrilatère formé par les tangentes issues de deux points à une ellipse est-il à la fois inscrit dans un cercle et circonscrit à un autre ? 292
1362 Les droites qui joignent les projections d'un point d'une ellipse sur les axes de la courbe sont normales à une ellipse. 294
1371 Exercices relatifs à une hyperbole équilatère . . 315
1369 Lieu du foyer d'une parabole tangente à l'axe réel d'une hyperbole équilatère au centre et admettant pour axe une normale à l'hyperbole . . 334
1376 Soit M un point variable sur le côté BC d'un triangle ABC, la droite qui joint les projections du point M sur les côtés AB et AC enveloppe une parabole Π_A. On a de même les paraboles Π_B et Π_C. Étudier leurs éléments et leurs tangentes communes 364
1386 Lieu relatif aux diamètres conjugués d'une ellipse 379
1387 La droite qui joint les points de Frégier correspondant aux extrémités de deux diamètres conjugués d'une ellipse enveloppe une ellipse . . 381
1389 Problèmes relatifs à une parabole et un cercle ayant pour centre le foyer de la parabole. . . 398
1400 Paraboles ayant un foyer donné et vues d'un point donné sous un angle droit. Cercle de courbure au sommet et lieu du centre. 409
1411 Hyperboles équilatères en O à Ox et coupant Oy en deux points dont le produit des ordonnées est égal à b^2. Axes obliques. Lieu des [illegible]

Numéros des questions — Pages.

1412 Une tangente variable à une hyperbole équilatère rencontre les asymptotes en A et B. Lieu des sommets d'un polygone régulier de n côtés construit sur AB 462
1420 Par les points de rencontre d'une hyperbole équilatère et d'un cercle passant par son centre on mène les parallèles à une direction Δ et les symétriques par rapport à ces droites des tangentes à l'hyperbole. Les quatre droites ainsi obtenues concourent en un point du cercle . . . 528
1441 Par l'un des points de rencontre A de deux cercles on mène une sécante variable qui rencontre les cercles en B et C. Lieu du conjugué harmonique de A par rapport à B et C 540
1435 Les courbes intégrales de l'équation différentielle

$$x^2 x - a\frac{dy}{dx} + b^2 - (x + a)y = 0$$

sont des hyperboles ayant une asymptote fixe et une autre passant par un point fixe. Enveloppe de leurs axes 548
1434 Lieu des centres des hyperboles équilatères tangentes à une cubique circulaire à point double dont une asymptote est parallèle à celle de la cubique et dont l'autre passe par le point double. 552
1448 Variation de l'aire du parallélogramme formé par les centres de courbure des quatre extrémités de deux diamètres conjugués 561
1447 F foyer d'une ellipse, M et M' deux points variables de la courbe. Enveloppe de MM' sachant que MF et M'F sont parallèles à deux diamètres conjugués. 562
1456 Lieu des centres des cercles tangents à un cercle et orthogonaux à un autre. Enveloppe des polaires d'un point fixe, etc. 564
1457 Soient P et Q les projections d'un point M sur les diamètres conjugués égaux d'une ellipse ; la médiane MR du triangle MPQ est perpendiculaire à la polaire du point M. 565

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A TROIS DIMENSIONS

1445 Exercices sur une ellipse de l'espace dont la projection sur un plan est un cercle 550
1455 Propriétés des foyers d'une ellipse et des focales d'un ellipsoïde 579
1385 Quadriques passant par la section d'un paraboloïde par un plan et touchant le paraboloïde au sommet 424
1390 Lieu des centres et enveloppe des plans des sections planes d'un paraboloïde elliptique, passant par le sommet et telles que la somme des carrés de leurs axes soit constante 426

ÉPURES

1287 Intersection de deux cônes (Ecole des Mines de St-Etienne, 1903). 157
1408 Intersection de deux tores (Ecole Polytechnique, 1905). 371
1425 Intersection de deux cônes (Ecole Centrale, 1905). 433
1416 Ombres d'un paraboloïde équilatère (Ecole Normale, 1905 501
1440 Intersection d'une sphère et d'un cône (Ecole des Ponts et Chaussées, 1905). 537
1502 Intersection d'un cône et d'un cube (Ecole des Mines de St-Etienne, 1905). 589

MÉCANIQUE

1298 Un cylindre circulaire droit, creux et très mince, est placé sur un plan incliné, d'inclinaison α; l'axe étant horizontal. Il descend en roulant sur le plan incliné. Calculer son accélération. . 71, 125
1303 Exercices sur un point matériel pesant suspendu par un fil et situé dans un plan vertical qui tourne autour d'une verticale 95
1297 Un point décrit la parabole $y^2 - 2px = 0$ sous l'action d'une force parallèle à la droite $y = mx$. Lieu de l'extrémité du vecteur vitesse et du vecteur accélération. 144
1299 Un point décrit la courbe $y = a\cos 2x$ de façon que sa vitesse soit égale pour chaque valeur de x à l'ordonnée de la courbe $y = b\sin x$. Trouver l'hodographe 154
1300 Un point M décrit la parabole $y^2 - 2px = 0$ et un point M' décrit la parabole $y^2 - 2qx = 0$ [illegible]

Numéros des questions — Pages

parallèle à celle du point M. Calculer les coordonnées de M'. 182
1310 Un point mobile M possède une accélération passant par un point A, dont la valeur est $\gamma = -k^2AM$. Étudier son mouvement . . . 205
1374 Un point se meut dans un plan suivant la loi des aires, et l'hodographe est circulaire. Montrer que la trajectoire est une conique. 303
1372 L'extrémité A d'une barre AB décrit Ox d'un mouvement uniforme, le point B est animé d'un mouvement uniforme de même vitesse que A. Étudier la trajectoire du point B. Lieu du point de rencontre des normales en A et B. Hodographe du mouvement d'un point lié à AB. 340
1377 Un point matériel M est attiré par un centre fixe O proportionnellement à la distance et lancé en un point A, avec une vitesse v_0, dans une direction parallèle à un plan P. Trajectoire; lieu de cette trajectoire quand la direction de v_0 varie. 365
1384 Trajectoire d'un point dont l'accélération est parallèle à une direction fixe. Exercices divers. 368
1388 Un point M se meut sur la parabole $y^2 - 2px = 0$ de façon que l'hodographe du mouvement soit la parabole elle-même. Exercices 382
1383 Mouvement d'un point qui se déplace sur la courbe $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$ 405
1392 Un point M est attiré par un centre fixe O proportionnellement à la distance. Peut-il atteindre un point donné ? 411
1401 Mouvement d'un point sur la courbe
$$x = a\frac{\lambda^3 - \lambda^2}{\lambda + 1}, \quad y = a(\lambda^2 - 1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 412$$
1391 Une parabole roule sur une parabole égale $y^2 - 2px = 0$, la vitesse de rotation étant égale à $-\frac{2}{1+t^2}$. Mouvement de divers points. . 428
1393 Un point M est attiré par un centre fixe O par une force inversement proportionnelle à OM. Peut-il atteindre un point donné. 437
1413 Un point M est sollicité par une accélération égale à $-g$ et parallèle à Oy. Lieu des points du plan qu'on peut atteindre avec une vitesse parallèle à $y = mx$ 463
1410 Deux points M et μ assujettis à se déplacer sur deux droites rectangulaires D et Δ sont attirés l'un par l'autre et par le pied de la perpendiculaire commune à D et Δ proportionnellement à la distance. Étudier la surface engendrée par la droite Mμ 506
1436 Exercices divers relatifs à un point pesant assujetti à se mouvoir sur une droite OP, le point O étant fixe, le point P décrivant une droite ou un cercle 530
1409 Un point parcourt la parabole $y^2 - 2px = 0$ de façon que son accélération projetée sur Oy soit proportionnelle à la composante de la vitesse suivant Ox. Mouvement, hodographe 555
1458 Une droite roule sans glisser sur un cercle. Mouvement d'un point de la droite 582
1465 Un point M se déplace sur une parabole de foyer F de façon que sa vitesse soit proportionnelle à FM. Étude du mouvement et questions diverses. 603
1490 Un cercle roule sur un cercle de même rayon de façon que la vitesse angulaire du rayon de contact dans le cercle fixe soit égale à 1. Étudier le mouvement d'un point du cercle mobile. Hodographe. Courbure et développée de la trajectoire. 611
1282 Exercices relatifs à la réduction d'un système de forces 37
1382 Réduction d'un système de forces. 360
1380 Résultante des forces BC, CA, BA appliquées suivant les côtés d'un triangle ABC 382
1381 Tétraèdre SABC. Résultante générale et moment résultant des six forces SA, SB, SC, AB, BC, CA. 382
1397 Sur le centre de gravité d'un trapèze. 457
1446 Exercices sur la réduction d'un système de forces. 580

PHYSIQUE

1304 A quel potentiel, exprimé en volts, devrait être portée une bulle de savon pour que la pression de l'air intérieur fût la même que celle de l'air extérieur 10
1336 Calcul de la chaleur dégagée par le frottement d'une machine 220
1283 Étude de la variation d'une température . . . 344
1424 Calculer une charge électrique 436
1421 Une bille est posée sur un cylindre dont l'axe est horizontal. Calculer la longueur du pendule simple synchrone 510
1472 Étudier les images d'un point placé devant trois miroirs 592
1292 Exercices sur un microscope 375

NOTES ET COMMUNICATIONS

Sur les systèmes de formules qui relient les six éléments d'un triangle. (E. H.) 1
Sur les combinaisons simples ou complètes. (R. Vintéjoux) 62
Note sur le calcul d'une série numérique. (E. H.) . . 64
Remarque sur cette note (H. Laurent). 91
Sur le calcul approché des séries. (Lagrange). . . . 444
Calcul approché de certaines séries. (Pernot). . . . 569
Limite de $\frac{x^p}{a^x}$ pour x infini et positif. (E. H.) . . . 138
Sur la dérivée d'ordre x de e^{-x^2}. (J. Richard) . . . 363
Sur la dérivée de x^m. (E. H.). 397
Sur un théorème d'analyse. (J. Richard) 338
Dérivée d'une série. (J. Richard) 116
Sur les séries entières. (A. Labrousse). 117
Sur le développement de Taylor. (V. Jamet 213
Sur la somme des puissances semblables des n premiers nombres. (L. Bickart 417
Sur le théorème des fonctions composées. (G. Fontené). 545
Sur l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficient constant sans second membre (Th. Leconte) 393
Sur le théorème de d'Alembert (J. Richard 33
Sur les méthodes d'approximation. (Ch. Michel). 89, 113
Sur la méthode d'approximation de Newton. (J. Richard) 137
L'énoncé exact du théorème de Rolle. (Ch. Michel). . 337
Sur le rapport anharmonique de quatre points d'un cercle. (Ch. Michel 441
Sur les droites de Simson. (A. Sainte-Laguë 593
Sur la lemniscate (J. Richard 34
Remarque sur cette note. (A. Darmon 91
Note sur le cercle de Mannheim. (L. Garnon 139
Remarques sur cette note. (Droz-Farny et Dufaut). 185, 186
Sur les cubiques circulaires. (Rougié). 465
Sur les épicycloïdes et hypocycloïdes. (G. Cotty . . 489
Sur une application de la transformation par inversion. (R. Bouvaist) 162
Sur les cercles harmoniquement circonscrits à une conique. (R. Bouvaist). 161
Théorèmes sur les coniques. (T. Lemosne 214
Pentagones et hexagones inscrits à une conique et circonscrits à une autre conique. (M. Weill . . . 233, 257
Sur les triangles circonscrits à la parabole. (C. Massing). 284
Mouvement d'une figure plane semblable à une figure donnée. (L. Bickart 418, 546
Sur les faisceaux de coniques. (A. Darmon 595
Propriétés des développées des coniques à centre. (A. Darmon 596
Sur la transformation de coordonnées. (A. Aubry . . 281
Sur la représentation paramétrique des coniques et des quadriques. Bernheim 209
Sur les cubiques gauches. (Ch. Michel 305, 521
Sur les volumes des foudres ovales (G. Maupin) . . . 361
Note de Mécanique. (Th. Leconte 236
Projet de programme pour la classe de Mathématiques spéciales. 57
Correspondance 396

BIBLIOGRAPHIE

Éléments de chimie organique, par M. Ostwald, traduit de l'allemand par L. Lazard. 1re partie, Métalloïdes. 55
Plans côtés. Cours de géométrie descriptive de l'École militaire de Bruxelles, par F. Chomé 111
Œuvres mathématiques de Francesco Brioschi . . . 160

DESSIN GRAPHIQUE

Préparation à la nouvelle épreuve de dessin pour l'admission à l'École Polytechnique :

Accouplement d'arbres 128
Couronnement de lucarne 129
Support d'arbres. 150
Dessus de porte d'escalier 151
Bielle motrice 174
Départ d'escalier droit en pierre. 175
Boîte à étoupe 200
Grande lucarne en pierre 201

EXAMENS ET CONCOURS

Agrégation des Sciences mathématiques.

1904 . . . . . 188.
1905 . . . . . 327, 491.

Bourses de licence près les Facultés des Sciences.

1904. . . { Physique. . . 171.
Chimie . . . 172.
Mathématiques . 214.

Certificats de Mathématiques préparatoires à l'étude des Sciences physiques.

Paris (1905).
1re session (juillet). . . . . 355, 571, 573, 574, 575.
2e session (novembre). . . . 378, 597, 598, 599.

Caen (1905).
1re session . . . . . 459.

Lyon (1905).
1re session . . . . . 478.
2e session . . . . . 511.

Rennes (1905).
1re session . . . . . 535, 584.
2e session . . . . . 557.

Concours généraux de Belgique.

1904 . . . . . 54.

ÉCOLES

École Normale supérieure.

1904 . . . . . 126, 162.
1905 . . . . . 267, 466, 470, 472, 501, 504, 505.
1906 . . . . . 584.

École Polytechnique.

1904 . . . . . 140, 142, 186.
1905 . . . . . 243, 447, 448, 449, 452, 456.
1906 . . . . . 558.

École Centrale.

1903 . . . . . 50.
1904 . . . . . 176, 177, 180, 224, 231.
1905 . . . . . 278, 479, 481, 485, 487.
1906 . . . . . 566.

École des Ponts et Chaussées.

1903. . Cours préparatoires 52.
1904. . { Cours spéciaux . . 73, 288.
Cours préparatoires. 87, 215, 247.
1905. . { Cours spéciaux . . 377, 515, 516.
Cours préparatoires. 303, 536, 537.
1906. . { Cours spéciaux . . 605.
Cours préparatoires. 615.

École nationale supérieure des Mines.

1904 . . . . . 72, 242, 286, 287.
1905 . . . . . 295, 522, 524, 526.

École des Mines de Saint-Etienne.

1903 . . . . . 97, 157.
1904 . . . . . 109, 270, 330.
1905 . . . . . 542.

École supérieure des Postes et Télégraphes

(*2e section.*)
1904 . . . . . 75.

École Militaire de Belgique

(*Section de l'Artillerie et du Génie.*)
1904 . . . . . 235.

EXAMENS ORAUX

École Normale supérieure.

1904 . . . . . 221.
1905 . . . . . 533.

Ecole Polytechnique.

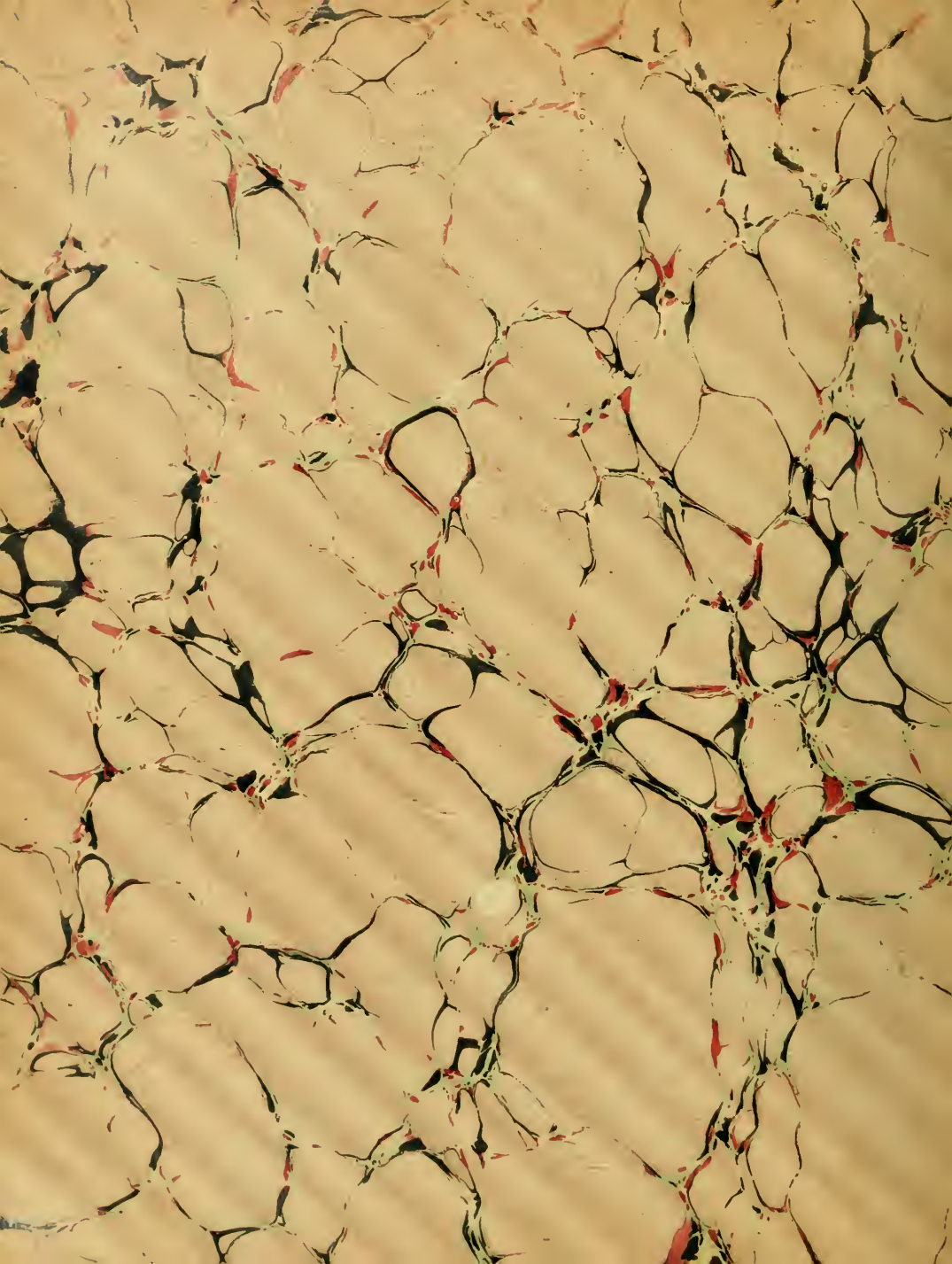
1904 . . . . . 11, 40.
1905 . . . . . 317, 345.

Ecole Centrale.

1904 . . . . . 80, 102.
1905 . . . . . 384, 414.

NOMS D'AUTEURS

ABRAMESCU (N.), 88, 111, 304.
AMBLARD, 288.
AUBERT (Paul), 112.
AURRY (A.), 281.
BARISIEN (E.-N.), 32, 53, 136, 184, 232, 256, 335, 336, 410, 416.
BATIFOULIER (R.), 615.
BERNHEIM, 209.
BICKART (L.), 26, 28, 77, 241, 292, 417, 418, 546, 606.
BORDIER (J.), 128, 129, 150, 151, 174, 175, 200, 201, 512, 513.
BOUVAIST (R.), 9, 10, 28, 30, 32, 37, 54, 79, 80, 160, 161, 162, 529, 589.
BRESSE (G.), 615.
BRIZARD (P.), 588.
BRIOSCHI (Francesco), 160.
BROS, 171, 196, 232, 276, 287, 290, 291, 295, 303, 313, 334, 358, 359, 360, 380, 382, 412, 426, 440, 464, 557, 565, 573, 574, 575, 599, 600.
BUI-QUANG-NGAI, 55, 272.
C. (É.), 50, 130, 202.
C. (N.), 158.
CABEN (E.), 152.
CAMPISTRON (A.), 11.
CARONNET (Th.), 130, 136, 409.
CAUCHARD, 335.
CHANOINE, 199.
CHOMÉ (F.), 111.
COMBETTE, 80, 81, 84, 384, 388.
CONSTANTAKI (M.), 30, 248.
COTTY (G.), 171, 384, 458, 489.
CROZE, 457.
DARMOIS (E.) 133.
DARMON (A.), 91, 595, 596.
DEMEUNYNCK (J.), 173, 242, 244, 256.
DENJOY (Armand), 500.
DESSIMOND, 410, 414, 423
DNALLOR-LECRAM, 9, 32, 132.
DROZ FARNY (A.) 185.
DUCOS (A.), 462, 464, 609.
DUFAUT (J.-D.), 186, 542, 574.
DUJIMBERT (G.), 217.
ESTEVE (P.), 100.
DE FARIA (R.), 598.
FENOUILLET, 566.
FONTENÉ (G.) 96, 360, 545.
FOUCRY (G.), 436, 518, 573.
GARNON (L.), 139.
GIROD (J.), 208, 520.
GOUILLY, 85, 103, 389, 390.
GRANGIER (M.), 418, 478, 550.
GUADE (J.), 607.
GUADET, 530.
GUEIBARD (Alfred), 566.
GUICHARD, 534.
H. (E.), 3, 50, 62, 64, 66, 91, 96, 139, 160, 173, 184, 202, 232, 237, 304, 330, 360, 397, 488, 544, 568.
H. (V.), 616.
HAAG (J.), 79, 80, 102, 130, 132, 134, 149, 152, 154, 157, 171, 181, 182, 184, 204, 208, 239, 252, 272, 276, 296, 440, 554.
HENNEQUIN (A.), 599.
JAMET (V.), 213.
JOURDAN (C.), 295, 299.
L. (H.), 223.
L. (P.), 180, 231, 247, 481, 484, 487, 487, 488.
L. (Th.), 245, 297, 433, 460, 479, 514, 536.
DE LABARRE (H.), 564.
LABROUSSE (A.), 117.
LAGRANGE, 444.
LAGUERRE, 329.
LATTES (Ch.), 127, 168.
LAURENCE (M.), 173, 176, 177, 221, 264, 270, 511, 528, 577
LAZARD (L.), 55.
LECONTE (Th.), 236, 393.
LEMOYNE (E.), 9, 30, 205, 314.
LEVI, 104, 106, 391, 411.
LUGOL, 416.
MACH (Ernst), 72.
MAGRON (P.), 392.
MASSING (Camille), 284.
MAUPIN (G.), 361.
MAURAIN, 536.
MERIGOT (W.), 280, 298, 416, 519, 520.
MICHEL (Ch.), 89, 113, 305, 337, 360, 379, 397, 409, 433, 441, 459, 514, 521, 536, 561, 616.
NICOLESCO (J.-G.), 111, 154, 181, 238.
D'OCAGNE (M.), 223.
OSTWALD (W.), 55.
P. (G.), 297, 440.
PARROD, 36, 37, 40, 134, 136, 192, 290, 295, 315, 358, 365, 370, 426, 580.
PELISSIER (G.), 204, 249, 278, 382, 384, 392, 414, 428, 544, 562, 564, 576, 582, 605.
PERNOT, 569.
POMEY (Etienne), 451.
PREVOST, 578.
QUEMENEUR, 317, 603.
R. (C.), 56, 125.
R. (J.), 142, 143, 450, 456.
RICHARD (J.), 33, 34, 116, 137, 338, 363.
RODA (J.), 39.
ROUGIER (M.), 465, 479.
SAINTE-LAGUE (A.), 152, 411, 593.
SAVOUS (L.), 95.
SOUDET (Jean), 572.
TANNERY, 533.
THIERY (M.), 30.
DE THY (J.), 336.
TRIBIER (P.), 592.
VASNIER, 26, 50, 202, 220, 266, 269, 294, 356, 405, 529, 580.
VINTÉJOUX (R.), 62.
WEILL (Mathieu), 233, 257.
X., 205, 334, 603.
VERNAUX (Jules), 460, 461, 589.



QA
1
R486
année 16

Revue de mathématiques
spéciales

Physical &
Applied Sci.
Serials

Math

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY